به نام خدا

سوالات امتحانی پایان ترم نیمسال اول(با جواب)

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران غرب

1402-1403

– مشتق توابع زیر را محاسبه کنید .

الف) $y = \text{Arcsin}(x) + e^{x^2} + \text{Ln}(\ 1 + \sqrt{x}\ )$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2x.e^{x^2} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}$

ب) $x^2y^3 + \sqrt{x\ -\ 2y} + \cos(2x - 3y) + \frac{x}{y} = 0$

$$y' = -\frac{2xy^3+\frac{1}{2\sqrt{x-2y}}-\frac{1}{y}-2sin(2x-3y)}{3y^2x^2-\frac{2}{2\sqrt{x-2y}}-\frac{x}{y*2}+3sin(2x-3y)}$$

2) قضیه مقدار میانگین (قضیه لاگرانژ) در مشتق را بیان کنید و با استفاده از آن نشان دهید که:

اگر $0 < a < b$ آنگاه: $\frac{b-a}{b} < Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$

f (x) = Lnx

$$\frac{Lnb - Lna}{b - a} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{a} \rightarrow Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{b} \rightarrow Ln\left(\frac{b}{a}\right) > \frac{b-a}{a}$$

$$\rightarrow \frac{b-a}{b} < Ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

انتگرال های زیر را محاسبه کنید .

الف) $\int \frac{\sqrt[3]{1+Ln(x)}}{2x}$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+lnx}}{2x}dx = \int \frac{\sqrt[3]{u}}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}(1+lnx)^{\frac{4}{3}} + c$$

u=Lnx+1 , du=$\frac{1}{x}$dx , x=e^{u-1}

ب) $\int (x^2 - x + 1)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

$\int \left(x^2 - x + 1\right) \sin\frac{1}{2}x\, dx$

$\int udv = uv - \int vdu$ ➔

$$\int \left(x^2 - x + 1\right) \sin\frac{1}{2}x\, dx =$$

$\left(x^2 - x + 1\right)(- 2\cos\frac{1}{2}x) - \int (- 2\cos\frac{1}{2}x)(2x - 1)dx$ ➔

$\int (2x - 1)\left(\cos\frac{1}{2}x\right) dx = (2x - 1)2\sin\frac{1}{2}x$-$\int 2\sin\frac{1}{2}x\ 2dx$ ➔

$\left(x^2 - x + 1\right)\left(-2\cos\frac{1}{2}x\right) + (2x - 1)2sin\, 1/2\, x - 16\cos\frac{1}{2}x$
+ c

پ) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{dx}$

$\int \frac{x^2-x+1}{x^2-3x+2}dx$ = $\int 1 + \frac{4x-1}{x^2-3x+2}$ dx = $\int 1dx + \int \frac{4x-1}{x^2-3x+2}dx$

= x + $\int \frac{4x-1}{x^2-3x+2}\ dx$

$\int \frac{4x-1}{x^2-3x+2}\ dx = \frac{4x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$ = $\frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}$

$$A =- 3\ , B =- 3$$

$\Rightarrow \int \frac{-3}{(x-1)}dx + \int \frac{7}{(x-2)}dx$

= $-3Ln\,|x-1\,| + 7Ln\,|x-2|\ + x + c$

- منحنی $f(x) = \tan(x)$ را در فاصله $0 \le x\ \le \frac{\pi}{2}$ حول محور x دوران دوران میدهیم، حجم جسم دوران را محاسبه کنید.

محاسبه ی انتگرال:

V = π[∫[0, π/4] $\sec^2$(x)dx - ∫[0, π/4] 1dx]

V = π[tan(x) - x] |[0, π/4]

با توجه به اینکه Tan(0)=1 و $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$=1 داریم:

$$V = \pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

نتیجه نهایی:

$$v = \pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

5) رفتار سریهای زیر را از لحاظ همگرایی یا واگرایی برسی کنید

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n$$

تحلیل :

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n \approx \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

آزمون ریشه :

$$\mathrm{L} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1$$

نتیجه : همگرا است.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$$

صورت n! :بسیار سریع رشد می کند ، مخرج 2^n :نیز رشد می کند اما آهسته تر از. n!

برای بررسی از آزمون نسبت استفاده می کنیم:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2} = \infty$$

چون $r > 1$ ، این سری نیز واگرا است.

۶)حاصل عبارت زیر را به شکل یک عدد مختلط در آورید.

$$A = \frac{(1+1i)^{12}}{2^4(1-1i)^4}$$

1 : محاسبه ی $(1+i)^{12}$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{(1+i)^{12} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} . e^{i.12.\frac{\pi}{4}}}$$

$$\boldsymbol{= 2^6 . e^{i3\pi} = 64 . (-1) = -64}$$

2 : محاسبه ی $(1+i)^4$

$$\mathbf{1-\ i\ =\ \sqrt{2}e^{-i\frac{x}{4}}}$$

$$(1-i)^4=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4.e^{-i\pi}=2^2.(-1)=-4$$

3 :محاسبه ی مخرج

$$2^4.(1-i)^4=16.(-4)=-64$$

4 :محاسبه نهایی

$$A=\frac{-64}{-64}=1+0i\ =\ 1$$