لطفا پیش از تکثیر، پیشگفتار کتاب را بخوانید.

این کتاب به‌صورت الکترونیکی انتشار یافته است

با حفظ حقوق مادی و معنوی برای نگارنده

تکثیر از فایل این کتاب برای عموم بلامانع است.

آموزش حل مسئله ریاضی

برای دانشجویان دبیری ریاضی

دکتر مانی رضائی

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزش حل مسئله ریاضی

برای دانشجویان دبیری ریاضی

۱۳۹۹

شاگردی در محضر استاد گرامی سرکار خانم دکتر زهرا گویا
همراهی در چندین دوره مختلف آموزشی
فعالیت مشترک در مجله رشد آموزش ریاضی
همکاری (هر چند کوتاه) در دانشگاه
و ده‌ها تجربه حرفه‌ای دیگر با ایشان
امکان نشر این کتاب را برایم فراهم کرد. سپاسگزارم

پیشگفتار (نسخه الکترونیکی)

به‌عنوان آموزشگر ریاضی، تا پیش از زمستان ۱۳۹۸، موضوع‌های متنوعی در این حوزه برایم مطرح بود و دغدغه‌های گوناگونی داشتم. اما با همه‌گیر شدن ویروس کرونا در پایان سال ۱۳۹۸، و به تعطیلی کشانده شدن آموزش رسمی، پرسشی کلیدی برایم مطرح شد: **پس از پایان این بیماری عالم‌گیر، آموزش چگونه خواهد بود؟** به‌دنبال این پرسش، پرسش‌های بیشتری در ذهن داشتم: آیا نگرانی از شیوع دوباره این بیماری، یا هر بیماری همه‌گیر دیگری، این امکان را فراهم می‌کند تا کلاس‌های درس، حال و هوای پیش از این دوره را داشته باشند؟ مسیر آموزش به‌طور عام، و آموزش ریاضی به‌طور خاص، چگونه خواهد شد؟ آیا دانش‌آموزان برای ریاضی‌ورزی به روش‌های فعلی یا برای تعامل با هم‌کلاسی‌های خود، مجالی خواهند داشت؟ آیا لزوم تغییر محتوا در درس ریاضی، که مدت‌ها به‌شکل‌های مختلف مطرح شده، بیشتر خواهد شد؟ چه مهارت‌های ریاضی در اولویت تدریس قرار خواهند داشت؟ و ده‌ها پرسش دیگر.

پاسخ به این پرسش‌ها ساده نیست، و حتی می‌تواند به عواملی خارج از حیطه آموزش وابسته باشند، که ممکن است موجب تغییر برخی روابط حاکم بر کلاس درس شود! اما بر این باور هستم که **آموزش باکیفیت**، همواره طرفدار دارد، و هم‌چنان **دانش‌آموزان نیازمند معلمانی باانگیزه، مشتاق، علاقه‌مند و آگاه هستند. معلمانی که تنوع آنان را درک کنند و فرصت‌های متعددی برای دانش‌آموزان پدید آورند تا در محیط‌های آموزشی غنی بتوانند رشد کنند** (رضائی،۱۳۹۶). شاید دور از ذهن نباشد که پس از کرونا، نیاز به تعریف مجدد **محیط آموزشی غنی** داشته باشیم. هم‌چنین لازم است، برای امکان ارائه آموزش باکیفیت، از **معلمان باانگیزه، مشتاق، علاقه‌مند و آگاه**، حمایت و پشتیبانی بشود. این حمایت و پشتیبانی، هم باید مادی باشد، تا معلمان با دغدغه‌های کمتری وارد کلاس درس خود شوند؛ و هم علمی باشد، تا بتوانند با **ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان**، ایشان با آگاهی بیشتری برای کلاس درس خود برنامه‌ریزی کنند.

مدتی است که به اجبار ناخواسته، از تدریس دور شده‌ام، اما از آموزش نه! ارتباط با گروهی از معلمانی که با وجود مشکلات شخصی، به‌دنبال پیدا کردن راهکارهایی برای بهتر شدن تدریس خود بودند، موجب شد، تا ایده تدوین جزوه یا کتاب در حوزه تخصصی آموزش ریاضی برایم پُررنگ‌تر شود. انتخاب موضوع **حل مسئله**، به‌عنوان یکی از دغدغه‌های مشترک معلمان از آنجا ناشی شد که بارها پرسش‌هایی پیرامون آن مطرح شد. در دوره قرنطینه اجباری کرونا، و ارتباط مجازی با معلمان، برای تدوین کتاب **آموزش حل مسئله ریاضی** مصمم‌تر شدم، تا هم پاسخی باشد به این دغدغه‌ها و هم از خانه‌نشینی ناشی از کرونا، بهتر بهره ببرم☺. با وجود درخواست‌ها برای روی آوردن معلمان به رویکردهای حل مسئله در آموزش ریاضی، نگرانی معلمان برای انتقال از آموزش **حقایق و رویه‌های ریاضی** به آموزش همراه با تأکید بر **فهم و درک ریاضی و مهارت‌های تفکر**، طبیعی و البته بجاست. یکی از هدف‌های تألیف این کتاب را آشکار کردن این مسیر پُرفراز و نشیب قرار دادم. با این همه، قصد ندارم برای کسانی که نمی‌خواهند شیوه‌های سنتی را کنار بگذارند، استدلالی ارائه کنم، یا کسی را به قدم گذاشتن در این راه تشویق کنم! در عوض، تصمیم گرفتم تا با استفاده از تجربه‌های تدریس مدرسه‌ای، همراه با تجربه‌های تدریس دانشگاهی، به‌ویژه در درس **بنیادهای نظری حل مسئله ریاضی**، این تجربه‌ها را برای معلمان گرامی، در قالب کتاب پیش‌رو، گردآوری کنم.

درس **بنیادهای نظری حل مسئله ریاضی** در دوره تحصیلات تکمیلی رشته آموزش ریاضی ارائه می‌شود. آشنا کردن دانشجویان با نگرش‌های مختلف نسبت به تدریس ریاضیات، و نقش حل مسئله در هر یک از این نگرش‌ها، مهم‌ترین هدف این درس است. در این مسیر، با اشاره به تحقیقات انجام شده در زمینه آموزش و یادگیری شیوه‌های حل مسئله، برخی از استراتژی‌های حل مسئله و کارکرد آن در آموزش مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین فرایند حل مسئله به‌عنوان هسته اصلی یادگیری ریاضیات مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به هدف‌های این درس، موضوع‌های زیر در این درس بیان می‌شود: ۱ـ آشنایی با فرایند حل مسئله برای یک مسئله‌حل‌کن تازه‌کار و خبره، و تفاوت‌های آن‌ها؛ ۲ـ بررسی تأثیر افکار پولیا بر آموزش و یادگیری حل مسئله و نقش وی در شکل‌گیری این فرایند؛ ۳ـ عوامل دخیل در حل مسئله و آموزش حل مسئله و دیدگاه صاحب‌نظران در این زمینه؛ ۴ـ نقش دانش شناختی و دانش فراشناختی در حل مسئله؛ ۵ـ ارزیابی کمی و کیفی حل مسئله، و بررسی اجمالی انواع ارزیابی.

کتاب حاضر، بخش عملی درس **بنیادهای نظری حل مسئله ریاضی** را در پیش گرفته است. روال معمول این درس، با معرفی مثال‌هایی از کلاس درس آغاز می‌شود. مثال‌ها از میان مقاله‌های مرتبط و تجربه عملی دانشجویان انتخاب شده و با توجه به مبانی نظری، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. بدیهی است این کتاب، نمی‌تواند جزوه‌ای برای درس مذکور باشد، زیرا بسیاری از جزییات مباحث نظری این درس، از حوصله این کتاب خارج است و به‌همین سبب، از آن‌ها صرف‌نظر شده است. با این همه، خط کلی این مبانی نظری و مسیر درس، در کتاب معرفی شده است. امیدوارم گذر زمان، امکان قضاوت درباره مفید بودن این کار را میسر کند.

در عصر سرعت برای انتقال اطلاعات، گروهی هستند که برای رسیدن به **جان‌کلام** شتاب دارند. بنابراین، این گروه می‌توانند از بخش۱ـ۴ آغاز کنند، سپس فصل۲ را بخوانند و با بخش۳ـ۵، کتاب را به‌پایان ببرند. چنان‌چه علاقه‌مند به مبانی نظری این بحث هستید، مسیر بدیهی، خواندن پیوسته کتاب را از نخستین فصل تا پایان آن درپیش بگیرید!

کتاب **آموزش حل مسئله ریاضی،** با هدف **حمایت از معلمان** و کمک به **ارتقای دانش حرفه‌ای معلمان،** نگارش شد. به‌همین سبب، نگارنده با صرف‌نظر کردن از امتیاز انتشار نسخه چاپی کتاب، از همان ابتدا، تصمیم به انتشار نسخه الکترونیکی کتاب گرفت، زیرا به‌یقین در فضای پس از کرونا، انتشار چاپی کتاب، امکان دسترسی معلمان به کتاب را برای مدت بسیار طولانی، به‌تعویق می‌اندازد. بنابراین، با **حفظ کلیه حقوق مادی و معنوی کتاب برای نگارنده،** تکثیر فایل کتاب را برای عموم، بلامانع اعلام می‌کنم. با این همه، برای کمک به تأمین هزینه‌های عمومیِ تدوین و آماده‌سازی این کتاب و کتاب‌های بعد، از خوانندگان درخواست می‌شود، در صورت تمایل، به ازای هر نسخه کپی از فایل کتاب، مبلغی (به اختیار خود) به حساب نگارنده با شماره کارت **۶۰۳۷-۹۹۷۴-۹۶۴۸-۸۹۰۰** واریز نمایید. بدیهی است، این درخواست، یک تعهد یا الزامی قانونی نیست، بلکه درخواستی حرفه‌ای و اخلاقی است و همان‌طورکه تأکید شد، واریز این وجه الزامی نیست! نگارنده، از ارسال نقد کتاب توسط کارشناسان و معلمان، استقبال می‌کند. این بازخوردها می‌تواند علاوه بر آگاهی از کاستی‌ها، کمکی به تدوین کتاب‌های بعد کند.

مانی رضائی ـ فروردین ۱۳۹۹
mani_rezaie@yahoo.com

فهرست مطالب

فصل نخست

حل مسئله در مدرسه

مقدمه

امروزه، سفر کردن (چه سفر از شهری به شهر دیگر، یا از نقطه‌ای در شهر به مکانی دیگر) آسان است. حال فرض کنید می‌خواهید از نقطه‌ای به نقطه دیگر بروید. اگر بتوانید سوار یکی از وسایل نقلیه عمومی (تاکسی یا اتوبوس) بشوید یا با خودرو شخصی به مقصد برسید، مسئله‌ای پیش رو ندارید. اما اگر هیچ وسیله نقلیه عمومی نباشد و وسیله مناسبی هم در اختیار نداشته باشید، ضرورت رفتن به مقصد، برای شما مسئله ایجاد می‌کند. در این حال، اگر بلافاصله، به‌دلیلی، وسیله‌ای به ذهن‌تان برسد و به‌کمک آن بتوانید به مقصد برسید، مسئله‌ای به‌وجود نمی‌آید. ولی اگر چنین وسیله‌ای پیدا نشود یا چنان‌چه با محدودیت‌هایی (مانند محدودیت زمانی یا محدودیت پولی که در اختیار دارید) روبه‌رو باشد، با یک مسئله سر و کار دارید، و گاهی می‌تواند مسئله دشوار باشد...

این مثال، نمونه‌ای است از مسئله‌هایی که در زندگی امروزی با آن روبه‌رو می‌شویم. واژه مسئله به مفهومی بسیار گسترده به‌کار می‌رود. بنابراین پیش از همه، باید به‌طور دقیق‌تر، روشن کنیم که منظور ما از این واژه چیست: مسئله عبارت است از **ضرورت جست‌وجوی آگاهانه وسیله مناسبی، برای رسیدن به هدفی روشن، ولی در بدو امر غیرقابل دسترس.** و حل مسئله، به معنای **پیدا کردن این وسیله** است (پولیا، ۱۹۶۵).

مسئله، می‌تواند ساده یا پیچیده باشد. در حالت اول پیدا کردن راه حل ساده است و در حالت دوم دشوار. اما دشواری پیدا کردن راه حل، تا حد زیاد به مفهوم مسئله مرتبط است: جایی که دشواری نباشد، مسئله‌ای نیست! ممکن است یک پرسش مشخص، برای دانش‌آموزان یک پایه تحصیلی مسئله‌ای دشوار باشد، و همین پرسش برای دانش‌آموزان در یک پایه تحصیلی دیگر ساده باشد؛ یا در جایی دیگر، تنها مروری بر یک درس و به‌عنوان یک تمرین باشد. از سوی دیگر، یک مسئله می‌تواند برای گروهی از دانش‌آموزان بسیار ساده باشد، اما برای گروه دیگری از دانش‌آموزان بسیار دشوار باشد. علاوه بر پایه تحصیلی، و دانش‌آموزان، عوامل دیگری مانند رویارویی با مسئله‌های مشابه، یا محتوای تکمیلی ارائه شده برای دانش‌آموزان، می‌تواند برای ارزش‌گذاری یک مسئله و تقلیل آن تا حد یک تمرین ساده مؤثر باشد. در این فصل، ضمن معرفی مسئله و حل مسئله در برنامه درسی مدرسه‌ای، به تفاوت مسئله با تمرین اشاره می‌شود. در بخش سوم، رابطه ریاضیات و حل مسئله مورد کنکاش قرار گرفته و بخش کاربردی و خواندنی پایانی، به راهکارهای تدریس حل مسئله اختصاص دارد.

۱-۱- حل مسئله در برنامه درسی

در منشور مبانی نظری تحول بنیادی در نظام آموزشی، ذیل عنوان **یادگیری‌های مشترک در عنصر تفکر**، فهرستی از انواع تفکر مانند: تخیل، حل مسئله، تفکر انتقادی، ابداع و خلق، تفکر سیستمی بیان شده که مورد تأکید قرار گرفته‌اند. به‌ویژه، به تفکر حل مسئله در کنار تصمیم‌گیری اشاره شده است: «فرایند تفکر به‌ترتیب با پرسش‌گری، کاوش‌گری، هدایت مشاهدات، تحلیل، قضاوت بر اساس شواهد، و تصمیم‌گیری ادامه می‌یابد اما کار به تفکر ختم نمی‌شود بلکه قضاوت براساس نظام معیار که همان تعقل است پیگیری می‌شود. همه اینها به‌منظور تربیت فرد و ارتقا موقعیت او در مسیر شکوفایی فطرت الهی و حیات طیبه است لذا تأمل در خود و خودارزش‌یابی به‌عنوان یکی از یادگیری‌ها و صلاحیت‌های مشترک و نه به‌عنوان فنون ارزشیابی حائز اهمیت می‌شود.» (منشور، ۱۳۹۰).

پیش از ادامه، باید تأکید شود که حل مسئله به‌عنوان تفکر، تفاوت‌های معنایی با حل مسئله ریاضی دارد. برای روشن شدن تفاوت‌های مذکور، در ادامه این بخش، معرفی دقیق‌تری از تفکر حل مسئله ارائه می‌شود. هم‌چنین، تصمیم‌گیری، به‌عنوان حالت خاصی از حل مسئله معرفی می‌شود. لازم به‌ذکر است، حل مسئله در این کتاب، با تمرکز بر حل مسئله ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است.

از تفکر حل مسئله (به‌معنای عام) به‌عنوان پیچیده‌ترین بخش هر عملیات فکری نام برده می‌شود و به‌عنوان یک روند مهم شناختی تعریف می‌گردد که محتاج تلفیق و مهار یک سری مهارت‌های بنیادین و معمولی است. حل مسئله وقتی مطرح می‌شود که یک موجود زنده یا یک سامانه هوش مصنوعی نداند که برای رفتن از یک موقعیت به موقعیت دیگر باید چه مسیری را بپیماید. این نیز خود بخشی از روند یک مسئله بزرگ‌تر است که یافتن مسئله و شکل‌دهی مسئله بخشی از آن می‌باشد. در بعضی از متون، بین مهارت حل مسئله (Problem-Solving) با مهارت تصمیم‌گیری (Decision-Making) تمایزی قایل نمی‌شوند. هر چند این دو عنوان، مهارت‌های متفاوتی هستند، اما مرزهای مشترک زیادی با هم دارند. اما در مجموع، مهارت حل مسئله فراگیرتر از مهارت تصمیم‌گیری در نظر گرفته می‌شود. مهارت حل مسئله به‌عنوان برخورد فعالانه در جستجو و تشخیص مسئله‌ها، مشکلات و فرصت‌ها، استفاده از منطق و مهارت قضاوت در جمع‌آوری و تحلیل اطلاعات و جستجو و خلق راهکارها، مقایسه راهکارهای مختلف و انتخاب بهترین شیوه برای مواجهه با یک مسئله تعریف می‌شود.

برای مهارت حل مسئله، چهار سطح تعریف می‌شود: **سطح پایه:** قدرت تشخیص مشکلات را دارد، و شاید نتواند آن‌ها را حل کند. ممکن است بتواند فرد یا افرادی که می‌توانند به حل مشکلات کمک کنند را تشخیص دهد. **سطح میانی:** نه تنها در تشخیص مشکلات توانمند هست، بلکه در بیشتر موارد می‌تواند راهکار مناسب برای آن‌ها را نیز انتخاب و اجرا کند. مراجعه به دیگران برای بهبود کیفیت تحلیل و تصمیم‌گیری است. **سطح پیشرفته:** می‌تواند به دیگران در تشخیص مشکلاتشان کمک کند. این کمک با نگاهی بی‌طرف و با سوگیری کمتر برای ریشه‌یابی مشکلات آنان است. **سطح خبره:** توانایی کمک به دیگران را برای بهبود مهارت حل مسئله خودشان دارد تا بتوانند مسئولیت نهایی راهکار انتخاب شده را آگاهانه بر عهده بگیرند (مک‌کال، ۱۹۹۸).

ممکن است اختصاص یک تعریف به تصمیم‌گیری کمی عجیب به نظر برسد، با این همه، نیاز به ارائه یک تعریف رسمی‌تر ضروری است: فرایند شناختی انتخاب یک موضوع یا مورد از میان چند گزینه را تصمیم‌گیری می‌نامند. وقتی از صحبت از تصمیم‌گیری است، به‌طور معمول گزینه‌ها مشخص هستند و هدف آن است که با اتکا به تکنیک‌ها و ابزارهای دانش تصمیم‌گیری، بهترین گزینه را انتخاب شود. به بیان دیگر، پرسش تصمیم‌گیری این نیست که **چه گزینه‌هایی پیش رو است؟** بلکه این پرسش است که **کدام‌یک از گزینه‌های پیش رو انتخاب شود؟** در زندگی روزمره، نمونه‌های فراوانی وجود دارد که به تصمیم‌گیری منجر می‌شود و تلاش می‌شود تا قدرت تصمیم‌گیری بهبود یابد.

برای تصمیم‌گیری چند مرحله تعریف می‌شود: **مرحله اول** شناسایی و تشخیص نیاز به تغییر است. **مرحله دوم**، تحلیلی و بررسی موقعیت فعلی و شرایط است. در **مرحله سوم** باید هدف‌ها شناسایی شوند و ارزش‌ها تعیین شوند. **مرحله چهارم**، در نظر گرفتن همه راه‌ها و انتخاب‌های موجود است. **مرحله پنجم**، یکی از مهم‌ترین مراحل است: شناسایی ارزیابی عوارضی است که هر تصمیم به دنبال دارد. **مرحله ششم**، انتخاب مناسب‌ترین گزینه از نظر هماهنگی با هدف‌ها و ارزش‌ها است (و در صورت لزوم، بازگشت به مرحله چهارم است). انتخاب راه، پایان تصمیم‌گیری نیست. **مرحله هفتم**، به اجرا درآوردن تصمیم است. **مرحله هشتم**، (به‌دنبال اجرای تصمیم) خود به خود پیش خواهد آمد و آن پذیرش مسئولیت تصمیم‌گیری و پیامدهای آن است (که به واقع‌بینانه بودن و آگاهی کافی در مرحله پنجم بستگی دارد). **مرحله نهم**، ارزیابی نتایج است (کروزر، ۲۰۰۲).

به برنامه درسی ریاضی بازگردیم. در مبانی نظری تحول بنیادین (منشور، ۱۳۹۰) ضمن تأکید بر فرایند تفکر، قضاوت و تصمیم‌گیری با توجه به نظام معیارها مورد توجه قرار گرفته است. نزدیک بودن مفهوم **حل مسئله** به معنای عام آن به چارچوب‌ها و مدل‌های حل مسئله ریاضی می‌تواند در پاره‌ای موارد به درک بهتر از حل مسئله ریاضی کمک کند. اما وقتی سخن از حل مسئله ریاضی است، ادعایی مبنی بر حل تمام مسئله‌ها در این چارچوب نیست. هر چند، این امکان وجود دارد که با مدل‌سازی مناسب، ریاضیات برای حل مسئله مطرح شده در چارچوب آن مدل، کارآمد باشد. از سوی دیگر، استفاده از مهارت‌های تصمیم‌گیری می‌تواند مستقل از حل مسئله ریاضی مورد توجه باشد، البته ممکن است برای انتخاب مناسب‌ترین گزینه، مهارت‌ها و دانش ریاضی را نیز به‌کار گرفت.

برنامه درسی ملی، به‌عنوان سند راهنمای اجرایی، هوشمندانه یکی از جهت‌گیری‌ها در آموزش ریاضی را مسئله و راهبردهای حل مسئله، بیان می‌کند: «یادگیری عمیق مفاهیم ریاضی وقتی رخ می‌دهد که دانش‌آموزان خودشان در طی حل یک مسئله قابل‌توجه به آن مفاهیم رسیده باشند و خودشان آن مفاهیم را ساخته باشند. این عمل مشابه یک پژوهش ریاضی است. بنابراین، در فرایند یاددهی‌ـیادگیری ریاضی، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که چگونه مفاهیم جدید رخ می‌دهد، چگونه باید آن‌ها را نامگذاری کرد و چگونه می‌توان با آن‌ها کار کرد و آن‌ها را تعمیم داد.» (سند، ۱۳۹۱). اما مخدوش شدن مفهوم حل مسئله (به‌معنی عام) با حل مسئله ریاضی، شکافی ژرف بین برنامه درسی قصدشده با برنامه اجراشده، پدید آورده است، شکافی که جبران آن نیازمند بازنگری در کتاب‌های درسی است.

۱-۲- تفاوت مسئله با تمرین

چندان دشوار نیست که با بررسی کتاب‌های درسی (و حتی جزوه‌هایی که با عنوان «جزوه تکمیلی» در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد) دریابیم که روند معمول در این کتاب‌ها، ارائه مجموعه‌ای از تکلیف‌های مشابه است. تمرکز بر این مجموعه از تکلیف‌ها، نمی‌تواند کافی باشد. در این زمینه شونفیلد (به نقل از گویا، ۱۳۷۹) به صراحت اشاره می‌کند: «... اغلب اوقات معلمان بر گردایه باریکی از تکلیف‌های خوب تعریف شده متمرکز می‌شوند و دانش‌آموزان را چنان آموزش می‌دهند تا آن تکلیف‌ها را از راه‌های معمولی، اگر نه الگوریتمی، انجام دهند. سپس دانش‌آموزان را با تکلیف‌های بسیار مشابه آن‌چه تدریس کرده بودند مورد آزمون قرار می‌دهند... این یک فریب‌کاری و حیله‌گری است که به خودمان و آن‌ها اجازه دهیم تا باور کنیم که دانش‌آموزان آن ریاضی را فهمیده‌اند.» با این حال، به‌دلیل روشن نبودن مرز بین این تکلیف‌ها و مسئله، لازم است تعریفی رسمی ارائه شود.

کتاب‌های درسی شامل بخش‌هایی با عنوان‌های **مسئله** یا **تمرین** هستند. محتوای مطالبی که زیر این عنوان‌ها قرار دارند، تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند. بیشتر تمرین‌ها، مجموعه‌ای از تکلیف‌های خوب تعریف شده، هستند. به‌طور معمول انتظار عمومی بر آن است که دانش‌آموزان به‌سرعت بتوانند به این تمرین‌ها پاسخ دهند و تمام تلاش معلم باید بر این موضوع، یعنی سرعت عمل دانش‌آموزان، متمرکز باشد. در انتهای درس، پرسشی فراتر از چارچوب درس مطرح نمی‌شود و در خوشبینانه‌ترین حالت، در «تمرین‌های دوره‌ای» یکی دو پرسش، خارج از این چارچوب گنجانده می‌شود که البته در بیشتر موارد با ستاره و علامت‌های دیگر برجسته شده و به‌عنوان پرسش اختیاری از مسئولیت دانش‌آموز برای پاسخ دادن به آن کنار گذاشته می‌شود! از همان نخستین سال دوره ابتدایی، پرسش‌هایی در قالب «مسئله» برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود که این مسئله‌ها نیز از قاعده بالا خارج نمی‌شوند و سرعت عمل (حتی بدون درنگی برای تفکر) شرط اصلی پرداختن به آن‌ها است. در عین حال، تلاش می‌شود آن‌ها را مثال‌های از زندگی واقعی نشان دهند. بنابراین، با تشریح یک موقعیت (البته به کوتاه‌ترین شکل ممکن و بدون هیچ اطلاعات اضافی) مسئله بیان می‌شود و به‌دنبال آن، انتظار می‌رود دانش‌آموزان بتوانند مدلی «ریاضی» برای آن ارائه دهند. در نهایت به دانش‌آموزان (و در مواردی والدین) اجازه می‌دهیم تا باور کنند آن ریاضی را فهمیده‌اند!

با وجود تلاشی که برای تطابق چنین مسئله‌هایی با زندگی روزمره صورت می‌گیرد، مسئله‌ها برای دانش‌آموزان چندان شباهتی با زندگی روزمره آنان ندارد. پرسش‌های پایان هر درس (چه در قالب مسئله و چه به‌شکل تمرین)، با به‌کارگیری روشی «خاص» در پرسشی «خاص» برای رسیدن به پاسخی «خاص» طراحی شده‌اند! این شکل از پرسش‌های درسی، به دانش‌آموزان اجازه نمی‌دهد با تمام توان خود، درگیر یک بحث و بررسی واقع‌گرایانه بشوند. در این حالت، کوشش معلم برای نزدیک کردن این پرسش‌ها به زندگی روزمره بی‌نتیجه است.

در بعضی موارد، ممکن است، دانش‌آموزان زیرک پاسخ‌های دقیق‌تری بیان کنند که اگر مورد شماتت قرار نگیرند، باعث شوخی دیگر دانش‌آموزان کلاس می‌شود یا لبخندی بر لب آنان می‌نشاند، اما برای معلمان، جای تأمل دارد: «علی ۲۰ کیک دارد، ۱۲تای آن را می‌خورد. اکنون علی چه دارد؟» پاسخ یکی از دانش‌آموزان: «دل درد!»!!!

برای بررسی دقیق‌تر تفاوت بین تمرین و مسئله، لازم است تعریفی رسمی‌تر از این دو مفهوم در اختیار داشته باشیم. تلاش نگارنده برای یافتن چنین تعریف‌هایی در اسناد آموزش‌وپرورش نافرجام باقی‌ماند. با بهره‌گیری از تعریفی که در مقدمه این فصل به نقل از پولیا آمده، می‌توان تعریفی برای تمرین نیز ارائه کرد:

مسئله عبارت است از **ضرورت جست‌وجوی آگاهانه وسیله مناسبی، برای رسیدن به هدفی روشن، ولی در بدو امر غیرقابل دسترس.** و حل مسئله، به معنای **پیدا کردن این وسیله** است (پولیا، ۱۹۶۵).

تمرین عبارت است از **عمل استفاده از وسیله‌ای مناسب، برای رسیدن به هدفی روشن و شناخته شده، از میان وسیله‌های در دسترس.** و انجام تمرین، به معنای **انتخاب و به‌کارگیری وسیله مناسب** است.

هر چند، تعریف ارائه شده برای تمرین، می‌تواند به هر نوع تمرین در درس‌های دیگر یا مهارت‌آموزی‌های عملی تعمیم پیدا کند، اما تعریف آن را در چارچوب ریاضی و به آموزش مدرسه‌ای محدود می‌کنیم. تمرین‌هایی که برای استفاده از انواع فرمول‌های ریاضی در مسئله‌های متنوع (مانند ریشه‌های چندجمله‌ای)، یا رویه‌های الگوریتمی برای پیدا کردن مقداری خاص (مانند بزرگ‌ترین مضرب‌مشترک)، یا ترسیم شکلی خاص (مانند رسم نیمساز)، یا رویه‌های عادی (مانند انتگرال جز به جز) ارائه می‌شوند. نمی‌توان ارزش انجام چنین تمرین‌هایی را برای پیدا کردن مهارت در این زمینه و به‌کارگیری ابزارهای اولیه برای درک بهتر آن‌ها نادیده گرفت. اما لازم است کمی فراتر رفت و در گام دوم دانش‌آموزان را با مسئله‌های غنی روبه‌رو کرد تا از **ریاضی‌ورزی** نیز لذت ببرند.

یک پرسش ممکن است در یک پایه تحصیلی برای دانش‌آموزان یک مسئله باشد، چرا که با وجود آن‌که، هدف روشن است اما وسیله مناسب برای رسیدن به آن هنوز در اختیار دانش‌آموزان قرار نگرفته است و می‌تواند برای آنان یک چالش باشد. همین پرسش، پس از تدریس مباحث مرتبط، برای دانش‌آموزان در پایه‌های بالاتر و پس از معرفی آن وسیله، دیگر یک مسئله نیست و تنها یک تمرین است. تکرار چنین تمرینی یعنی انتخاب و به‌کارگیری یک وسیله مناسب (از میان وسیله‌های تدریس شده) می‌تواند برای دانش‌آموزان آموزنده باشد. اما تکرار مکرر آن، نه‌تنها ضرورتی ندارد، بلکه از حوصله بیشتر دانش‌آموزان خارج است. دانش‌آموزان نیاز دارند که در کنار تمرین‌های مهارت‌آموزی، با چند مسئله روبه‌رو شود تا بتواند توانایی‌های دیگر خود را ارتقا دهد.

روند کلی کتاب‌های درسی را می‌توان چنین خلاصه کرد: **معرفی** یک روش، الگوریتم، یا یک مفهوم؛ سپس **ارائه** یکی‌دو مثال، و در پایان **محول کردن** چند تمرین به دانش‌آموزان. در بعضی موارد، مؤلفان برای تنوع، ابتدا ارائه مثال و سپس معرفی را انجام می‌دهند. اما این کار با هدف ایجاد فرصتی مناسب برای کشف آن روش یا مفهوم توسط دانش‌آموزان نیست، چرا که بی‌درنگ معرفی انجام می‌شود. بیشتر مؤلفان با نگرانی از کم بودن زمان و زیاد بودن مطالب، این نگرانی را در میان معلمان نیز دامن می‌زنند. بدین ترتیب، می‌توان ادعا کرد بجز چند استثنا، **تمام** پرسش‌ها در کتاب‌های درسی ریاضی چیزی جز **مجموعه باریکی از تکلیف‌های خوب تعریف شده**، نیستند! با وجود تمام این محدودها، معلمانی هستند که در جستجو مسئله‌ای مناسب برای کلاس درس خود هستند تا بتوانند پیش از آغاز تدریس، دانش‌آموزان را با آن مسئله درگیر کنند. کتاب حاضر برای این گروه معلمان است.

۱-۳- ریاضیات و حل مسئله

در دهه ۸۰ میلادی، شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) توصیه کرد که حل مسئله باید نقطه تمرکز اصلی آموزش ریاضی باشد. در استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه‌ای، هدف اصلی آموزش ریاضی را توسعه قدرت ریاضی دانش‌آموزان توصیف کرده است. در این توصیف، توانایی فرد در کشف کردن، حدسیه‌سازی، استدلال منطقی، به اضافه توانایی استفاده مؤثر از روش‌های گوناگون ریاضی برای حل مسئله‌های غیرمعمول مورد توجه قرار گرفت. همزمان، این رویکرد در سایر کشورها نیز فراگیر شد. سه مضمون کلی به‌طور تاریخی نقش حل مسئله را در ریاضیات مدرسه‌ای روشن می‌کند. این سه عبارتند از **حل مسئله به‌عنوان زمینه، حل مسئله به‌عنوان مهارت** و **حل مسئله به‌عنوان هنر** که در ادامه توصیف مختصری از هر یک بیان شده است:

- **حل مسئله به‌عنوان زمینه.** حل مسئله به‌عنوان زمینه‌ای برای انجام ریاضی به چندین زیرمقوله تقسیم می‌شود. در این دیدگاه، از حل مسئله به‌عنوان **توجیهی برای تدریس ریاضی** استفاده شده است و برای متقاعد کردن دانش‌آموزان نسبت به ارزش ریاضی، محتوای آن با تجربه‌های حل مسئله‌های واقعی زندگی مرتبط شده است. هم‌چنین، از حل مسئله برای **ایجاد انگیزه** در دانش‌آموزان استفاده شده تا علاقه آن‌ها به یک موضوع خاص ریاضی با یک رویه، از طریق عرضه یک مثال زمینه‌مدار (از دنیای واقعی) برانگیخته شود. از این گذشته، حل مسئله **به‌عنوان یک سرگرمی**، یک فعالیت تفریحی که اغلب به‌عنوان پاداش یا فراغت از مطالعات معمولی مطرح می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد. بالاخره، حل مسئله **به‌عنوان یک تمرین**، که شاید رایج‌ترین نوع استفاده است، برای تقویت مهارت‌ها و مفاهیمی مورد استفاده قرار می‌گیرد که به‌صورت مستقیم آموزش داده می‌شود.

زمانی که حل مسئله به‌عنوان زمینه‌ای برای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تأکید بر یافتن تکلیف‌ها و مسئله‌های جالب‌توجهی است که به آشکار ساختن یک مفهوم یا رویه ریاضی کمک می‌کند. برای استفاده از حل مسئله به‌عنوان زمینه، برای نمونه، تصور کنید معلمی می‌خواهد مفهوم کسرها را نشان دهد و برای این‌کار از گروه‌هایی از دانش‌آموزان می‌خواهد که دو تکه آب‌نبات را به‌نحوی تقسیم کنند که به هر کدام سهم مساوی برسد. با ارائه این زمینه حل مسئله، معلم هدف‌های چندگانه‌ای را دنبال می‌کند که عبارتند از ایجاد فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان جهت کشف مفاهیم کسر با استفاده از یک وسیله آشنا و مطلوب (انگیزش)؛ کمک به درک عینی‌تر مفاهیم (تمرین)؛ و ارائه یک دلیل منطقی برای یادگیری مفهوم کسر (توجیه کردن).

- **حل مسئله به‌عنوان مهارت.** طرفداران این دیدگاه، مهارت‌های حل مسئله را به‌عنوان یک موضوع جداگانه در برنامه درسی می‌بینند، نه این که آن را در سرتاسر برنامه یا طی آن به‌عنوان ابزاری برای توسعه درک مفهومی و مهارت‌های پایه‌ای ببینند. آن‌ها مجموعه‌ای از رویه‌های عمومی (یا قواعد سرانگشتی) را برای حل مسئله به دانش‌آموزان تدریس می‌کنند، برای نمونه، کشیدن یک تصویر، بازگشت به عقب، تهیه یک فهرست و دیگر راهبردهای حل مسئله، و به آن‌ها تمرین‌هایی می‌دهند تا بتوانند از این رویه‌ها برای حل مسئله‌های معمولی استفاده کنند. با این حال، زمانی که حل مسئله به‌عنوان مجموعه‌ای از مهارت‌ها در نظر گرفته می‌شود، این

مهارت‌ها اغلب در سلسله‌مراتبی قرار می‌گیرند که در آن، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود ابتدا در حل مسئله‌های معمولی به مهارت برسند و سپس به مسئله‌های غیرمعمول بپردازند. در نتیجه، به‌جای آن‌که حل کردن مسئله‌های غیرمعمول به تمام دانش‌آموزان آموزش داده شود، اغلب تنها به دانش‌آموزان سطح بالا آموزش داده می‌شود. پس وقتی که هدف‌های آموزشی حل مسئله تعریف می‌شود، معلمان تمایل دارند که از تمایز بین آموزش حل مسئله به‌عنوان یک مهارت جداگانه یا قرار دادن حل مسئله در سرتاسر برنامه درسی برای توسعه درک مفهومی و مهارت‌های پایه‌ای آگاهی یابند تا برنامه آموزشی خود را برای آن تنظیم کند.

حل مسئله به‌عنوان هنر. پولیا (۱۹۴۵) این ایده را معرفی کرد که حل مسئله می‌تواند به‌عنوان یک هنر عملی مانند نواختن پیانو یا شنا کردن، آموزش داده شود. پولیا، حل مسئله را به‌عنوان عمل اکتشاف می‌دانست و عبارت **هنر پژوهش و اکتشاف** را برای توضیح توانایی‌های لازم برای بررسی و پژوهش موفقیت‌آمیز مسئله‌های جدید معرفی کرد. وی مشوق این بود که ریاضی نه به‌صورت یک مجموعه تمام شده از حقایق و قواعد، بلکه به‌عنوان یک علم آزمایشی و استقرایی ارائه شود. هدف از آموزش حل مسئله به‌عنوان هنر این است که توانایی‌های دانش‌آموزان توسعه یابد تا مسئله حل‌کن‌های ماهر و مشتاقی شوند. متفکران مستقلی که حتی قادر به درگیر شدن با مسئله‌های باز–پاسخِ بد تعریف‌شده نیز باشند.

هر چند که پولیا بیش از ۷۰ سال پیش، چارچوبی مبتنی بر جست‌وجوگری برای آموزش حل مسئله ارائه کرد (به فصل سوم مراجعه کنید)، اما هنوز لزوم به‌کارگیری گسترده ایده‌های او در کلاس‌های درس احساس نمی‌شود. این نشان‌دهنده چالش‌های متعددی است که بر سر راه انجام این تغییر در تدریس ریاضی وجود دارد. آموزش حل مسئله غیرمعمول، مشکل است. حل مسئله همان‌قدر که برای معلم وقت‌گیر و سخت است، برای دانش‌آموزان نیز وقت‌گیر و سخت است. تسلط بر هنر آموزش ریاضی تنها در مدت زمان طولانی ممکن است. چنان‌چه زمانی کافی در اختیار معلم و دانش‌آموزان قرار نگیرد، معلم وادار می‌شود هر یک از مهارت‌های عملی را به‌طور سطحی و فرمان‌های متکی بر حافظه به دانش‌آموزان ارائه کند که در خوشبینانه‌ترین حالت، شاهد یادگیری طوطی‌وار خواهیم بود.

آموزش حل مسئله مشکل است زیرا معلمان باید...

- پیامدهای انتخاب رویکردهای گوناگون توسط دانش‌آموزان را درک کنند و بدانند آیا ممکن است این رویکردها به نتیجه برسند و اگر نه، چه چیزی می‌تواند موجب شود رویکردهای دانش‌آموزان به نتیجه برسد؛
- باید بدانند چه موقع مداخله کنند و وقتی که تمام مراحل حل مسئله را به عهده دانش‌آموزان می‌گذارند، چه پیشنهادهایی می‌تواند به آن‌ها کمک کند و چگونه این‌کار را با هر دانش‌آموز انجام دهند؛
- گاهی باید در موقعیتی قرار گیرند که گویی حل مسئله را از قبل نمی‌دانند. به‌خوبی انجام دادن این‌کار، بدون دانستن همه پاسخ‌ها، مستلزم تجربه، اعتمادبه‌نفس و خودآگاهی است.

تدریس حل مسئله برای معلمان از ابعاد مختلف مشکلاتی به همراه دارد. معلمان باید در **بُعد ریاضی** آن خبرگی را داشته باشند تا رویکردهای متفاوتی را که دانش‌آموزان ممکن است برای حل مسئله انتخاب کنند، بفهمند و تشخیص دهند چگونه آن رویکردها می‌توانند امیدوارکننده باشند. بسیاری از معلمان در دوره‌های آموزش عمومی شرکت کرده‌اند و اغلب فاقد زمینه ریاضی قوی هستند که لازمه آموزش ریاضی با رویکرد حل مسئله است. از **بُعد پداگوژیکی**، معلمان باید تصمیم‌های مهم و پیچیده‌ای درباره سطح مشکل بودن مسئله‌های تعیین شده برای حل، زمان ارائه کمک و چگونگی ارائه کمک اتخاذ کنند، به‌طوری‌که هم متضمن موفقیت دانش‌آموز باشد و هم اطمینان حاصل کنند که احساس مالکیت دانش‌آموزان را نسبت به راهبردهای حل مسئله آن‌ها حفظ می‌کنند. از **بُعد شخصی**، معلمان گاهی خود را در وضعیت ناخوشایند ندانستن راه حل مسئله می‌بینند. بازی نقش «خبره» که معلمان به‌طور سنتی به ایفای آن پرداخته‌اند، نیازمند تجربه، اعتمادبه‌نفس و خودآگاهی است. اغلب از معلمان خواسته می‌شود ریاضیاتی را تدریس کنند که هرگز در مدرسه با آن روبه‌رو نشده بودند و به شیوه‌ای تدریس کنند که مغایر با آموزش خود آن‌ها بوده است. به این دلایل، معلمان ممکن است علاوه بر این‌ها، به آموزش جدیدی در محتوا و نظریه ریاضی و نیز در شیوه‌های آموزش حل مسئله نیاز داشته باشند.

یکی از مسئولیت‌های کلیدی معلمان، انتخاب و ارائه مسئله‌های مناسب است. معلم با انتخاب مسئله‌های **خوب**، شرایط مناسب را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند تا آن‌ها درگیر فرایند معنادار حل مسئله شوند. این بدان معناست که مسئله باید...

- باز–پاسخ باشد، یعنی شیوه‌های متنوع حل و پاسخ‌های چندگانه را ارائه کند. دانش‌آموزان به‌طور معمول با این مسئله‌ها روبه‌رو نمی‌شوند و بیشتر چیزی که مسئله نام دارد، تمرینی است که در ادامه درس آمده است؛
- به مفاهیم مهم ریاضی اشاره کند؛
- دانش‌آموزان را جذب کند و به چالش بکشد؛
- با یادگیری قبلی دانش‌آموز مرتبط باشد.

هر چند، تقاضاها و درخواست‌ها برای روی آوردن معلمان به رویکردهای حل مسئله در آموزش ریاضی وجود دارد، انتقال از آموزش حقایق و رویه‌های ریاضی به آموزش همراه با تأکید بر فهم و درک ریاضی و مهارت‌های تفکر، کند و پُر فراز و نشیب است. بسیاری از معلمان مجاب نشده‌اند که شیوه‌های سنتی باید کنار گذاشته شوند. بیشتر آن‌هایی هم که مایل به تغییر هستند، اطمینان ندارند که چگونه باید این‌کار را انجام دهند. یکی از مشکلات این است که اجماعی وجود ندارد که منظور از حل مسئله چیست، و بهترین راه تدریس و ارزشیابی آن چگونه است. هم‌چنین از موارد دیگری که آن‌ها نیز رویکرد حل مسئله را به چالش می‌کشند، می‌توان به سه عامل اشاره کرد:

- معلمان نسبت به تمام کردن محتوای درس، دغدغه دارند؛
- مسئله‌های غیرمعمول برای دانش‌آموزان مشکل هستند؛
- کتاب‌های درسی، مسئله‌های غیرمعمول بسیار کمی عرضه می‌کنند.

۱-۴- راهکار برای تدریس حل مسئله

ارائه یک راهکار عملی برای تدریس، نیازمند شناخت کافی از عوامل مختلفی ازجمله محیط آموزشی، دانش‌آموزان و توانایی آن‌ها، معلم و روابط وی با دانش‌آموزان بستگی دارد. به‌علاوه، این راهکارها می‌تواند برای پایه‌های مختلف، تفاوت داشته باشند. با این حال، می‌توان راهکارهای عمومی ارائه کرد. راهکارها و توصیه‌هایی که به رویکرد آموزشی معلم نیز بستگی دارد. در ابتدا، تلاش کنید با مسئله‌های ساده‌تر دانش‌آموزان را به‌چالش بکشانید و زمان کافی برای حل کردن همین مسئله‌های ساده صرف کنید و جزییات آن را با دانش‌آموزان تبادل نظر کنید. در عمل نشان دهید که نباید جزییات را نادیده بگیرند. در این مسیر به این موارد عمل کنید و ...

در توضیح فرایند حل مسئله، صریح باشید

- به دانش‌آموزان نشان دهید که چگونه یک مسئله را تبیین کنند. این تبیین، شامل رسم نمودارهای مفید و چگونگی مشخص کردن جلوه‌های مفید مسئله است. در صورت امکان، مجموعه‌ای از پرسش‌های مفید را تهیه کنید که در حین فرایند تبیین مسئله و به طور نظام‌وار، در موقع بحث راجع به مسئله‌ها در کلاس، آن‌ها را از دانش‌آموزان بپرسید.
- به دانش‌آموزان فرصت دهید تا تغییر صورت مسئله را در کلاس تمرین کنند. می‌توانید برای خواندن صورت مسئله، به دانش‌آموزان وقت بیشتری بدهید، و از بعضی از آن‌ها بخواهید تا صورت مسئله را به زبان خود بیان کنند. سپس هر ابهام احتمالی در صورت مسئله را در کلاس به بحث بگذارید.
- مراحل حل هر مسئله را به‌طور ضمنی ارزشیابی کنید تا دانش‌آموزان مهارت‌های کنترلی خود را توسعه دهند.
- مثال‌های گوناگونی برای استفاده در کلاس درس و تکلیف منزل انتخاب کنید که ممکن است دانش‌آموزان، با آن‌ها در موقعیت‌های واقعی، روبه‌رو شوند.
- در کنار مسئله‌هایی که خوب تعریف شده‌اند، گاهی مسئله‌هایی را در کلاس مطرح کنید که بد تعریف شده یا توضیحات کافی نداشته باشند و لازم باشد که دانش‌آموزان، برای تعیین فرض‌های مستدل، دنبال اطلاعات بیشتری بگردند.
- تلاش کنید تا مسئله‌های متنوعی برای بحث در کلاس یا تکلیف منزل انتخاب کنید. دانش‌آموزان نیازمند وقت کافی برای تمرین عملی در چگونگی تلفیق راهبردها و کاربرد مفاهیم در موقعیت‌های جدید هستند.
- مسئله‌هایی انتخاب کنید که فرایند آن‌ها، تسهیل‌کننده یادگیری ریاضی و مراحل برتر تفکر حل مسئله باشند.
- پرسش‌هایی طرح کنید که پاسخ به آن‌ها، مستلزم مرور راه حل‌ها توسط دانش‌آموزان و تعمیم دادن آن راه حل‌ها باشد. برای مثال، مقایسه صریح بین مسئله‌های مرتبط با مسئله حل شده یا جست‌وجو برای عواملی که بیشترین یا کمترین تأثیر را در پاسخ مسئله داشته‌اند، مفید است.

- مسئله‌هایی را برای تکلیف یا بحث کلاسی بدهید که دانش‌آموزان به جای یک متغیر خاص، مجبور باشند تمام متغیرهای ممکن را پیدا کنند. هم‌چنین، استدلال کردن را بر اساس اصول زیربنایی مسئله تشویق کنید، نه آن که تنها استفاده از فرمول را تشویق کنید.
- تنها یک مسئله برای تکلیف منزل انتخاب کنید اما از دانش‌آموزان بخواهید که تمام فرایند حل و جزییات آن را تا حد امکان «ثبت» کنند. حتماً به دانش‌آموزان خود، بازخورد مکتوب بدهید تا آن‌ها بدانند که شما نوشته‌های آن‌ها را با حوصله می‌خوانید و آن نوشته‌ها با ارزش هستند. از این گذشته، دانش‌آموزان از طریق نوشتن، متوجه اشتباهات خود و علل وقوع آن‌ها می‌شوند و فرصتی می‌یابند تا راهبردهای نادرست خود را تصحیح کنند.
- فرصت‌هایی را برای تمرین عملی در کلاس ایجاد کنید تا دانش‌آموزان بتوانند از شما، بازخورد فوری بگیرند و با هم‌گروهی‌های خود مشورت کنند و از هم یاد بگیرند.
- در موقع بررسی راه حل‌های مکتوب دانش‌آموزان، به اشتباهات آن‌ها توجه کنید و اشتباه‌های تکرارپذیر ناشی از «بدفهمی» را شناسایی کرده و ضمن نوشتن علت آن‌ها، در کلاس نیز آن‌ها را به بحث بگذارید.
- در نمره‌گذاری راه حل‌های دانش‌آموزان ـ چه به صورت انفرادی و چه گروهی، تنها بر پاسخ صحیح تأکید نکنید، بلکه برای تمام مراحل حل ازجمله راهبردهای انتخاب شده و چگونگی انتخاب آن‌ها نیز، نمره‌ای اختصاص دهید.

چند پیشنهاد کلی برای کلاس درس

راهبردهای مؤثر را در حل مسئله، به‌کار گیرید و با استناد به اطلاعات شفاف درباره فرایند حل همان مسئله، این حل را مدل‌سازی کنید. گاهی اوقات به‌جای یک حل «شسته و رفته»، تمام مراحل انجام یک مسئله را به دانش‌آموزان نشان دهید تا دانش‌آموزان با چگونگی تفکر و جست‌وجوی شما برای یافتن حل مسئله آشنا شوند. هر تصمیمی را که برای حل مسئله گرفته‌اید، به بحث بگذارید و بگویید که چگونه هر اشتباه را تشخیص دادید و آن را برطرف کردید. یا مسئله‌ای را که تا به حال آن را حل نکرده‌اید، در مقابل کلاس حل کنید و برای دانش‌آموزان به نمایش بگذارید. توجه کنید که اگر برای حل مسئله مشکل داشته باشید، استفاده از این روش، پر مخاطره است!

- حل مسئله باید بخشی از کار روزانه دانش‌آموزان باشد. در هر جلسه کلاسی، یک زمان کوتاه را به بحث و حل مسئله‌ها به صورت گروهی، اختصاص دهید.
- الزامی ندارد که مسئله به‌طور کامل در این زمان حل شود، اما فرصتی است تا دانش‌آموزان مسئله‌ها را هضم کنند، درباره آن‌ها فکر کنند، فکرشان را رها کنند و دفعه بعد، با ایده‌های تازه و جدید به آن‌ها بپردازند.
- در هر جلسه، دانش‌آموزان را با پرسش یا مسئله‌ای مواجه کنید که نتوانند آن را به‌راحتی از ذهن دور کنند!

اقدامات زیر برای تدریس حل مسئله مفید هستند

مسئله‌ها را تعریف کنید: وقتی که مسئله‌ای را معرفی می‌کنید، با دقت علت انتخاب مسئله را به بحث بگذارید. مسئله را به همراه کلاس بخوانید و دانش‌آموزان را به پرسش کردن دعوت کنید. دقت نمایید که فهمیدن مسئله، برای حل موفقیت‌آمیز آن حیاتی است.

روی مسئله‌ها کار کنید: قبل از آن که مسئله‌ای را به کلاس بدهید، روی آن کار کنید. در این صورت، احساس بهتری نسبت به مسئله پیدا می‌کنید و قادر خواهید بود تا مشکلات احتمالی دانش‌آموزان را پیش‌بینی کنید.

اجازه دهید دانش‌آموزان، خودشان یک نقشه برای حل مسئله طراحی کنند: بسته به آگاهی‌ها و مهارت‌های هر دانش‌آموز، رویکردهای مختلفی به حل مسئله اتخاذ می‌شود. بحث راجع به راه‌های مختلف حل یک مسئله، هم برای کلاس و هم برای معلم، روشنگر و آموزنده است.

از دانش‌آموزان بخواهید تا مراحل حل مسئله خود را ثبت کنند: دانش‌آموزان را تشویق کنید تا مراحل حل مسئله خود را مکتوب کنند. لازم است که دانش‌آموزان، تمام اقدامات خود را که منجر به موفقیت یا شکست شده است، ثبت کنند. از دانش‌آموزان بخواهید تا فرایند فکری خود را شرح دهند. آشنایی با این فرایندها، برای دوباره‌نگری در روش‌های تدریس و سازمان‌دهی فعالیت‌های کلاسی، مفید هستند.

در حین حل، دنبال مسئله‌های مرتبط اما ساده‌تر باشید: دانش‌آموزان را تشویق کنید که مسئله‌های ساده‌تر و مرتبط با مسئله را پیدا کنند تا درباره مسئله مورد نظر، بصیرت بیشتری پیدا کنند. به طور مثال، بپرسید «ساده‌ترین مسئله کدام است؟ اول خودتان را با مسئله‌های خیلی سخت خسته نکنید.» بسیاری از اوقات، مسئله‌های مرتبط و ساده‌تر، کلید حل مسئله را به شما می‌دهند.

تعمیم دهید: از دانش‌آموزان بخواهید تا در صورت امکان مسئله را تعمیم دهند. اما به‌دنبال عبارت‌های دقیق و رسمی نباشید. در بسیاری موارد، دانش‌آموزان به‌طور ضمنی راه حلی برای مسئله در ذهن دارند، اما توانایی ارائه آن را ندارند. کار در گروه‌های کوچک، فرصتی ایجاد می‌کند تا آنچه که در ذهن وجود دارند، ابراز کنند.

زمان کافی بگذارید: مسئله‌ها را به طور کامل در کلاس به بحث بگذارید. به دانش‌آموزان فرصت دهید تا روی مسئله‌ها کار نموده و راجع به آن‌ها فکر کنند تا بالاخره، فکری برای حل مسئله به ذهنشان برسد.

پرسش را با پرسش پاسخ دهید: اطلاعات را تنها زمانی به دانش‌آموزان بدهید که آن‌ها طالب باشند. لازم است دانش‌آموزان، فکر کردن را یاد بگیرند و در تمام فرایند حل، برای هر کاری که انجام می‌دهند، دلیل بیاورند.

به عقب برگردید و آنچه را که انجام شده است، مرور کنید: چگونه مسئله حل شد؟ آیا راه دیگری برای حل این مسئله وجود دارد؟ آیا این حل، شبیه به حل مسئله دیگری که می‌شناسید هست؟ آیا این راه حل، مسئله‌های دیگری را برای بحث و جست‌وجو پیشنهاد می‌کند؟

فعالانه در فرایند حل مسئله مشارکت کنید: شما نمی‌توانید حل مسئله را آموزش دهید مگر آن که خودتان در فرایند حل، مشارکت داشته باشید. خودتان مسئله‌ها را حل کنید. چه رویکردهای دیگری برای حل آن مسئله ممکن است؟ دانش‌آموزان ممکن است در حل مسئله با چه مشکلاتی مواجه شوند؟ ارتباط این مسئله با سایر مسئله‌هایی که دانش‌آموزان حل کرده‌اند، چیست؟ این مسئله، چه مسئله‌های جدیدی را پیشنهاد می‌کند؟

فصل دوم

تجربه‌هایی از کلاس

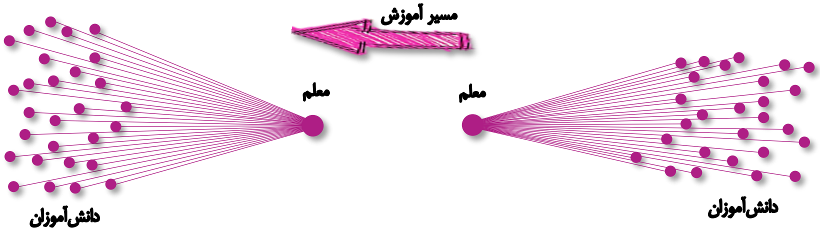
مقدمه

آمادگی برای کلاس درس، از مهم‌ترین دغدغه‌های معلمان پیش از هر جلسه آموزشی است. در این موارد، استفاده از تجربه تدریس دیگر معلمان همواره مفید بوده و هست. یکی از قدیمی‌ترین توصیه‌های آموزشی، تهیه **طرح درس** است. امروزه طرح درس معنای قدیم خود را از دست داده است و تهیه یک شمای کلی از **برنامه درس** برای معلمان بیشتر توصیه می‌شود. یکی از نیازهای اصلی برای یک برنامه درس موفق، **مشارکت دانش‌آموزان** است. اگر می‌خواهید برای کلاسی آماده شوید که در آن دانش‌آموزان مشارکت وسیع دارند، باید **مسئله‌های غنی** در برنامه درس خود بگنجانید. برای مشارکت حداکثری دانش‌آموزان، بایستی مسئله‌های را متناسب با موضوع درس، و توانایی عمومی دانش‌آموزان انتخاب کنید. پیدا کردن چنین مسئله‌هایی بسیار دشوار است و حتی در بیشتر موارد، ناهماهنگی بین توانایی‌های دانش‌آموزان چنین انتخابی را ناممکن می‌کند. ممکن است، مجبور شوید از دانش‌آموزانی که سرعت عمل بیشتری دارند بخواهید به دیگر دانش‌آموزان فرصت دهند تا آن‌ها نیز مسیر حل مسئله را طی کنند. اما باید برای آن‌ها سؤال‌های در حاشیه بحث تهیه کنید تا کلاس برای آنان نیز سودمند باشد.

رابطه بین معلم و دانش‌آموز را می‌توان مانند ریسمانی تشبیه کرد که یک سر آن در دست دانش‌آموز و سر دیگر آن دست معلم است. در بیشتر موارد، معلم باید با دسته‌ای از ریسمان‌ها که در دست دارد، تلاش کند دانش‌آموزان را به‌دنبال خود بکشاند. در این حال، کاری دشوار پیش روی معلم است و ممکن است مهم‌ترین دل‌نگرانی وی از دست دادن زمان باشد! اما معلم می‌تواند شکل دیگری به برنامه کلاس بدهد تا دانش‌آموزان به حرکت درآیند و معلم به‌دنبال آنان حرکت کند. در چنین حالتی معلم می‌تواند آغازگر باشد اما این دانش‌آموزان با انگیزه هستند که با مشارکت وسیع خود در برنامه درس، کلاس را پیش می‌برند.

برای استفاده از تجربه تدریس دیگر معلمان، پیش از همه باید شناخت مناسبی از دانش‌آموزان کلاس خودتان داشته باشید. طرح درس در بستر خالی (بدون توجه به توانایی‌های دانش‌آموزان) محکوم به شکست است. از سوی دیگر، اگر محتوای برنامه درس مناسب و غنی نباشد، دانش‌آموزان رغبت کمی به مشارکت خواهند داشت. هم‌چنین، برای ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان‌تان کافی است به آنان نشان دهیم مالک یادگیری خود هستند و سهم مهمی در کلاس درس دارند. این موضوع نه در حرف، بلکه باید در عمل به باور دانش‌آموزان تبدیل شود. جلب

نظر دانش‌آموزان در این مسیر سخت و زمان‌بر است. ممکن است به‌نظر برسد وقت کلاس محدود است و جبران زمان از دست رفته دشوار و حتی ناممکن است. اما اگر به‌عنوان معلم، دغدغه زمان را کنار بگذارید و بین شما و دانش‌آموزان‌تان اعتماد متقابل ایجاد شود، وظیفه شما از کشاندن تمام دانش‌آموزان (مدل سمت راست) به هدایت آن‌ها (مدل سمت چپ) تبدیل می‌شود.



نمایی برای دو مدل آموزشی: معلم محور (سمت راست) ـ دانش‌آموزمحور (سمت چپ)

در مدل سمت راست، وجود تفاوت‌ها بین دانش‌آموزان، کار معلم را دشوار می‌کند. معلم انتظار دارد دانش‌آموزان زودتر قانع شوند و خواسته‌هایشان محدود باشد، در نتیجه آن، دانش‌آموزان کمتر مستقل و بیشتر فِعل‌پذیر هستند. اما در مدل سمت چپ، خواسته‌های متنوع دانش‌آموزان و تفاوت‌های آنان موجب می‌شود که معلم امکان این را بیابد تا با استفاده از آن، عمیق‌تر و پرمعناتر به بحث دامن بزند. در این حالت، انتظار می‌رود دانش‌آموزان مستقل‌تر و خود باورتر شوند، دانش‌آموزان دلیل بیشتری می‌خواهند و دوست دارند خودشان دانش خود را تولید کنند.

در این فصل، به مواردی اشاره می‌شود که معلمان در حین **حل مسئله** (به‌عنوان یکی از مصالح در برنامه درس) می‌توانند با آن‌ها روبه‌رو شوند. بدون در نظر گرفتن پایه تحصیلی، تجربه‌هایی از کلاس درس بیان شده و در آن، مسئله و برخی حاشیه‌های آن بررسی شده است. تلاش شده، حالی که تنوع موضوع حفظ شده، پیوستگی مطالب از دست نرود. چنان‌چه مسئله‌ای را برای کلاس انتخاب می‌کنید، ابتدا برای خودتان آن را حل کنید و اطلاعات خودتان را پیرامون آن تکمیل کنید، و چالش‌هایی که ممکن است دانش‌آموزان پیش رو داشته باشند را پیدا کنید و در صورتی که آن را برای دانش‌آموزان مناسب تشخیص دادید، آن را به کلاس درس ببرید. در هر حال، انتظار داشته باشید با موارد پیش‌بینی نشده روبه‌رو شوید! تجربیات خودتان را به دقت ثبت کنید تا در سال‌های بعد از آن استفاده کنید. توجه کنید که ممکن است بسیاری از جزییات آن را در آینده نه چندان دور (حتی تا آخر هفته!) فراموش کنید.

به **راهکار برای تدریس حل مسئله** توجه کنید که در بخش چهارم از فصل اول آمده است. به‌ویژه پیش از ادامه این فصل، **چند پیشنهاد کلی برای کلاس درس** را بخوانید. دقت کنید که حل مسئله می‌تواند برای دانش‌آموزان هم تفریح و هم چالش باشد. تلاش کنید کلاس درس را به‌گونه‌ای هدایت شود که حل مسئله بیش از آن‌که یک تفریح باشد، یک چالش باشد، اما چالشی لذت‌بخش! در بیشتر موارد، برای دانش‌آموزان، چالش رسیدن به یک راه حل موفقیت‌آمیز، تلاش شما را با ارزش‌تر می‌کند.

۲-۱- یک دنباله و چند پاسخ

آیا تاکنون سؤالی مشابه سؤال زیر در مجموعه سؤالات امتحانی دیده‌اید؟

جمله عمومی دنباله روبه‌رو بیابید. (۱ نمره) **۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ...**

پاسخ مورد نظر شما چه بود؟ چند نفر از دانش‌آموزان پاسخ درست دادند؟ پاسخ‌های نادرست چگونه بود؟ اجازه دهید از زاویه‌ای دیگر به این سؤال نگاه کنیم. آیا می‌توانیم ضابطه چنین دنباله‌ای را تعیین کنیم؟ اگر پاسخ شما مثبت است، باید احتیاط بیشتری به خرج دهید، زیرا در این شرایط، نمی‌توان یکتایی جواب تضمین کرد.

الف) با چهار جمله نخست دنباله، این حدس به ذهن می‌رسد که جمله‌های این دنباله از توان‌های متوالی ۲ تشکیل شده است. بنابراین ادامه دنباله می‌تواند چنین باشد:

۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۶ , ۳۲ , ۶۴ , ۱۲۸ , ... , ۲^n , ...

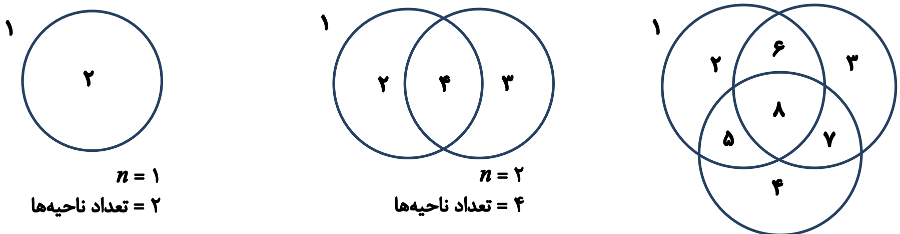
توجه کنید که جملات دنباله از جمله صفر شروع شده است.

ب) ممکن است دانش‌آموزان خودشان هر فرض دیگری را برای یافتن جواب به مسئله اضافه کنند. برای مثال می‌توان فرض کرد ضابطه عمومی این دنباله یک چندجمله‌ای است. دو نمونه در اینجا آمده است:

۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۵ , ۲۸ , ۵۱ , ۸۹ , ... , $\frac{1}{6}\left(n^3 + 5n + 6\right)$, ...

۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۶ , ۳۱ , ۵۷ , ۹۹ , ... , $\frac{1}{24}\left(n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24\right)$, ...

پ) این دنباله می‌تواند از یک مدل هندسی به‌دست آمده باشد. برای نمونه، حداکثر تعداد ناحیه‌هایی را حساب کنید که از تلاقی n دایره در صفحه ایجاد می‌شود. واضح است که اگر $n = 0$ (یعنی هیچ دایره‌ای نباشد) تنها یک ناحیه (تمام صفحه) وجود دارد. به ازای $n \geq 1$ تعداد ناحیه‌ها چنین است:



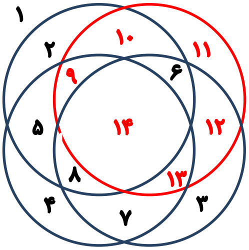
n = ۱
تعداد ناحیه‌ها = ۲

n = ۲
تعداد ناحیه‌ها = ۴

n = ۳
تعداد ناحیه‌ها = ۸

ناحیه‌هایی که از تلاقی n = ۱, ۲, ۳ دایره در صفحه ایجاد می‌شود

دایره چهارم هر یک از دایره‌های قبلی را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند و به ازای هر دو نقطه متوالی، کمان دایره چهارم (دایره قرمز در شکل روبه‌رو) یک ناحیه جدید جدا می‌کند. بنابراین ۶ = ۳ × ۲ ناحیه جدید به‌دست می‌آید: به‌طور مشابه با ترسیم دایره پنجم، ۸ ناحیه جدید ایجاد می‌شود و دایره ششم ۱۰ ناحیه، دایره هفتم ۱۲ ناحیه، و... بنابراین ادامه دنباله چنین است:



$n =$ ۴
۱۴ = تعداد ناحیه‌ها

+۱ +۲ +۴ +۶ +۸ +۱۲ +۱۴

۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۴ , ۲۲ , ۳۲ , ۴۴ , ... , a_n , ...

اگر $a_1 = 2$ ، به ازای $n \geq 1$ ، جمله عمومی a_n از رابطه بازگشتی $a_{n+1} = a_n + 2$ به‌دست می‌آید.

ت) چنان‌چه فرض کنیم، بعد از جمله چهارم، دنباله به‌صورت تناوبی تکرار شود، جمله عمومی به‌دست می‌آید:

($a_n = 2^k$ و k باقی‌مانده n به پیمانه ۴ است) ۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ... , a_n , ...

چهار نگرش مختلف به این مسئله، به پاسخ‌های گوناگونی منجر شد. حتی ممکن است در یک کلاس درس، این سؤال به تعداد دانش‌آموزان دارای پاسخ باشد! واضح است که نمی‌توان ادعا کرد که کدام پاسخ صحیح است. بنابراین چنان‌چه پاسخ خاصی (برای نمونه، پاسخ الف) مورد نظر است باید طرح سؤال با دقت بیشتری انجام شود:

جمله عمومی دنباله هندسی روبه‌رو بیابید. (۱ نمره) **۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ...**

در عبارت بالا، دنباله هندسی در مقابل دنباله حسابی آمده است و به معنای یک دنباله با عبارتی نمایی (توانی) است. در برخی موارد، دنباله‌هایی که هر جمله آن با یک شکل (که وابسته به n است) معرفی می‌شود نیز دنباله هندسی نامیده می‌شود. در این دنباله‌ها هدف، یافتن شکل جمله nام است. اما برای چنین دنباله‌ای ممکن است تعبیرهای مختلفی بیان شود. هر یک از این تعبیرها می‌تواند پاسخی متفاوت برای مسئله به‌دست بدهد.

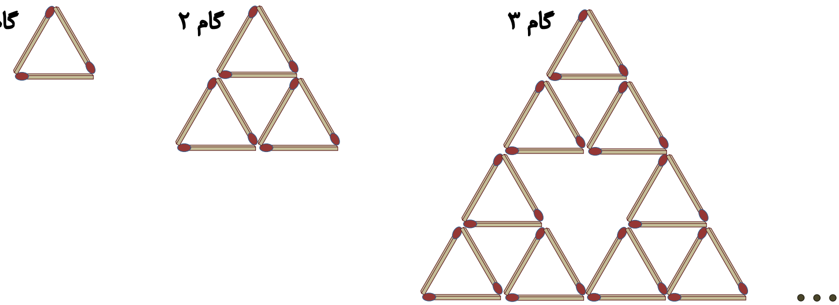
این موضوع با باور عمومی دانش‌آموزان، مبنی بر وجود جواب منحصربفرد برای سؤال‌های ریاضی در تعارض است. معلم می‌تواند از وجود تنوع در پاسخ‌های دنباله‌ها (چه عددی و چه شکلی) برای تغییر این باور تلاش کند. تغییر این باور عمومی، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا در رویارویی با یک مسئله ریاضی، برای یافتن راه‌های مختلف کنجکاو باشند و خود را محدود به اولین نقشه‌ای که به ذهن‌شان می‌رسد، نکنند. هم‌چنین معلمان با استفاده از این موقعیت، می‌توانند به ارتقای توانایی‌های استدلالی دانش‌آموزان کمک کنند. دنباله‌های چوب‌کبریتی را می‌توان هم به‌عنوان یک دنباله عددی (تعداد چوب‌کبریت‌ها) و هم به‌عنوان یک دنباله شکلی (ساختار هندسی قرار گرفتن چوب‌کبریت‌ها) در نظر گرفت. مثال بعدی به یکی از این دنباله‌ها اختصاص دارد.

دنباله چوب‌کبریتی

تمرین زیر برگرفته از تجربه کلاس درس است. این تمرین در ادامه تمرین‌های مشابه (چوب‌کبریتی) آمده بود که در کلاس به دانش‌آموزان داده شد. دانش‌آموزان با آگاهی از این که ارائه پاسخ‌های متنوع و البته مرتبط از نظر معلم قابل‌قبول است، در صدد ارائه ایده‌های مختلف هستند. سه نمونه از پاسخ‌های دانش‌آموزان در ادامه آن آمده است. مطرح شدن این پاسخ‌ها در یک کلاس درس، نتیجه بدیهی تعامل بین دانش‌آموزان است که با نظارت معلم و تشویق آنان به بحث دقیق‌تر ممکن خواهد بود. انتظار می‌رود، بحث و بررسی بر روی راه‌های مختلف به افزایش توانایی استدلالی دانش‌آموزان کمک کند و از آنان یک مسئله‌حل‌کن خبره بسازد. در اینجا با صرف‌نظر کردن از گفتگوهای حاشیه‌ای که منجر به یافتن این پاسخ‌ها شد، تنها به بررسی این سه پاسخ بسنده شد.

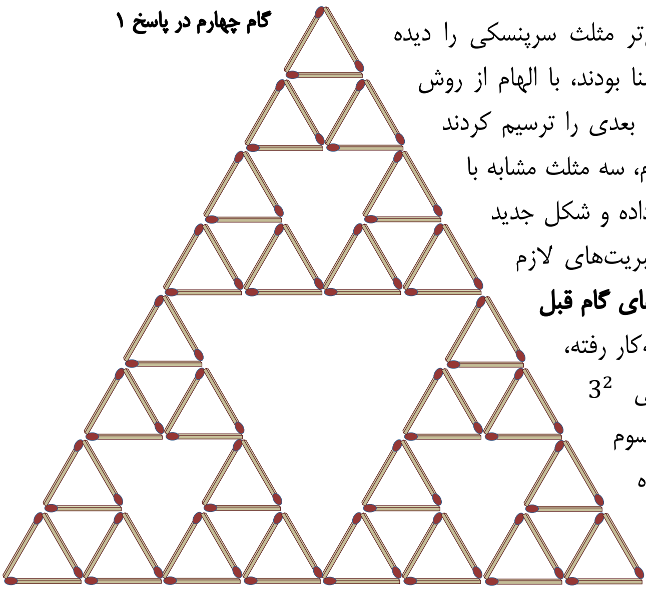
تمرین. در دنباله چوب‌کبریتی زیر سه جمله اول داده شده است. تعداد چوب‌کبریت‌های جمله nام را بیابید.

گام ۱   گام ۲   گام ۳

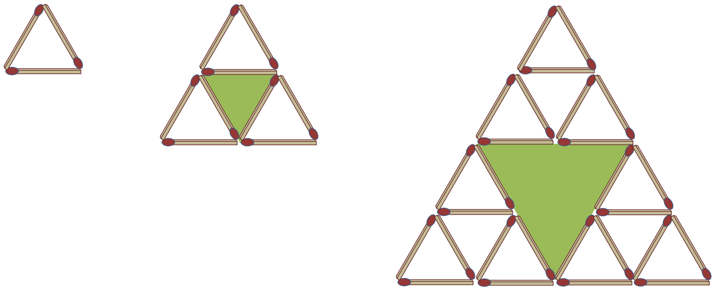


پاسخ ۱. بیشتر دانش‌آموزانی که پیش‌تر مثلث سرپنسکی را دیده بودند و با چگونگی تولید فرکتال‌ها آشنا بودند، با الهام از روش ساخت فرکتال، گام چهارم و جمله‌های بعدی را ترسیم کردند (شکل روبه‌رو). بدین ترتیب، در هر گام، سه مثلث مشابه با شکل مثلث در گام قبل کنار هم قرار داده و شکل جدید را معرفی کردند. بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌های لازم در هر گام، **سه برابر تعداد چوب‌کبریت‌های گام قبل** است. در گام نخست، 3 چوب‌کبریت به‌کار رفته، و در گام دوم، تعداد 3×3 یعنی 3^2 چوب‌کبریت لازم است و در گام سوم $3^2 \times 3$ یعنی 3^3 چوب‌کبریت استفاده می‌شود. در نهایت، در گام nام تعداد 3^n چوب‌کبریت نیاز داریم.

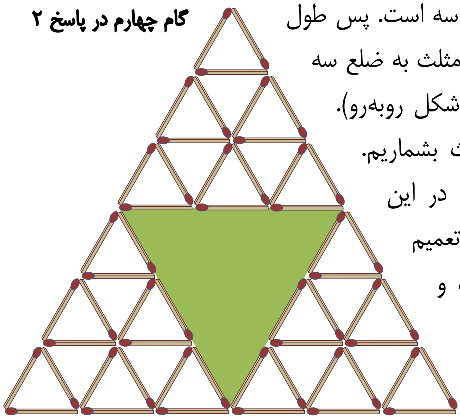
گام چهارم در پاسخ ۱



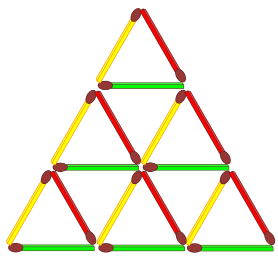
پاسخ ۲. تفسیر دیگری که برای این دنباله ارائه شد نیز بر یک مثلث وارونه در وسط شکل استوار است، با این تفاوت که مثلث دوم در گام دوم به طول ضلع یک چوب‌کبریت است. این مثلث در گام نخست به طول ضلع صفر است (و در عمل وجود ندارد). در گام سوم به طول ضلع دو است که در شکل زیر نشان داده شده است:



گام چهارم در پاسخ ۲



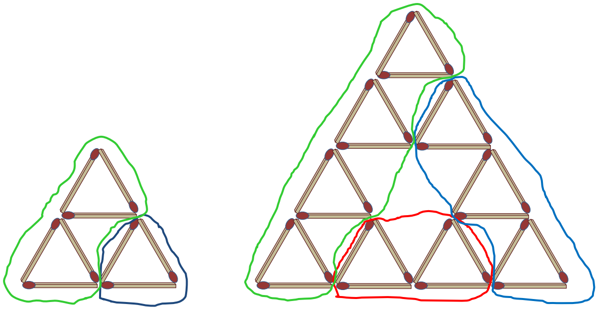
بنابراین، در گام چهارم طول ضلع مثلث وارونه وسط برابر با سه است. پس طول ضلع مثلث اصلی شش خواهد بود، زیرا در سه گوشه آن سه مثلث به ضلع سه قرار دارد و هر مثلث با چوب‌کبریت‌ها بخش‌بندی شده‌اند (شکل روبه‌رو). اکنون کافی است تعداد چوب‌کبریت‌ها را در این سه مثلث بشماریم. پیش از این، در یکی از تمرین‌ها، تعداد چوب‌کبریت‌ها را در این ساختار مثلثی (مشابه یکی شمرده بودند و به‌نظر می‌رسید در تعمیم همان تمرین بود که آنان را به سمت این الگو سوق داده و چنین تفسیری برای جمله چهارم، و در حالت کلی برای جمله گام nام ارائه کردند.



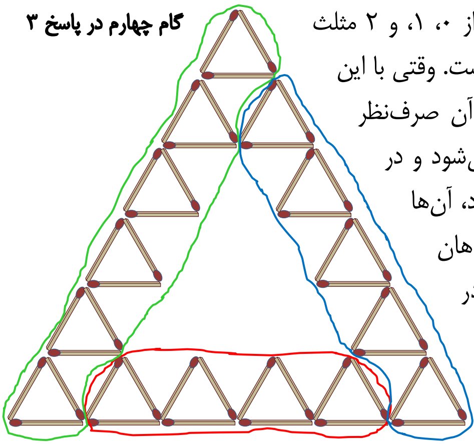
با رنگ‌آمیزی چوب‌کبریت‌های موازی در این ساختار مثلثی، الگویی برای شمارش چوب‌کبریت‌ها به‌دست می‌آید (شکل سمت راست): $3(1+2+3)$. بنابراین، تعداد چوب‌کبریت‌ها در گام n ام سه برابر این تعداد خواهد شد: یعنی در این گام $3^2(1+2+3+\cdots+n)$ چوب‌کبریت لازم است.

با ارائه این دو پاسخ، دانش‌آموزان به طرفداری از یکی از این دو پاسخ و ردّ دیگری بحث کردند. دانش‌آموزان برای تأیید یا ردّ موارد مختلف، نیم‌نگاهی به معلم خود داشتند تا به بحث خود قوت بدهند تلاش معلم بر آن بود که درستی استدلال‌ها را معیار قرار دهد. هنوز بحث خیلی بالا نگرفته بود که پاسخ سوم مطرح شد. دانش‌آموزی که پاسخ سوم را ارائه کرد، پیش از این در کلاس ریاضی فعال نبود و مشارکت وی و ادعای ارائه پاسخی برای این مسئله، کنجکاوی دانش‌آموزان کلاس را برانگیخت. توضیحات شفاهی وی حاکی از نگاهی کاملاً متفاوت به مسئله بود و همین امر باعث شد که دانش‌آموزان وی را تشویق کنند تا پاسخ خود را روی تخته کامل کند.

پاسخ ۳. نگاه جالب این دانش‌آموز به این مسئله مورد توجه بیشتر هم‌کلاسی‌های وی قرار گرفت. پیش از معرفی گام چهارم، وی مثلث‌های گام‌های ۲ و ۳ را مطابق شکل زیر دسته‌بندی کرد:



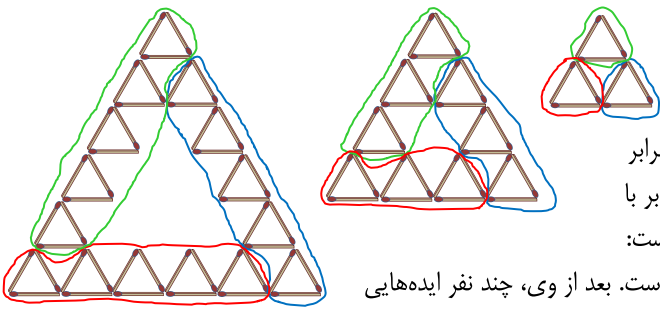
و چنین تفسیر کرد که گام دوم شامل سه دسته متشکل از ۰، ۱، و ۲ مثلث است. شکل مرحله بعد (گام سوم) شامل ۲، ۳، و ۴ مثلث است. وقتی با این پرسش روبه‌رو شد که جمله اول چه شد؟ پاسخ داد: از آن صرف‌نظر می‌کنیم! وی این شکل را به دهانی تشبیه کرد که باز می‌شود و در سه ضلع آن دندان‌هایش آشکار می‌شود. وی در تشبیه خود، آن‌ها را به دهانی دارای سه لب معرفی کرد و گفت در گام اول دهان فرضی بسته است! (تشبیه وی باعث شوخی‌های بسیاری در کلاس شد اما جدیت وی در محاسبه‌های بعدی موجب شد کلاس روال عادی خود را از دست ندهد.) وی گام چهارم را شامل ۴، ۵، و ۶ مثلث معرفی کرد:



گام چهارم در پاسخ ۳

در نتیجه، در گام $(n+1)$ام این سه دسته به‌ترتیب شامل $2n-2$، $2n-1$، و $2n$ مثلث است و چون هر مثلث از سه چوب‌کبریت ساخته شده است، بنابراین، در این گام $3(6n-3)$ چوب‌کبریت لازم است.

در این میان، یکی از دانش‌آموزان دسته‌بندی دیگری را پیشنهاد کرد (شکل روبه‌رو): در این دسته‌بندی در هر گام تعداد مثلث‌ها در سه دسته برابر است. در گام $(n+1)$ام این تعداد برابر با $2n-1$ است و نتیجه نهایی همان است: تعداد $3(6n-3)$ چوب‌کبریت لازم است. بعد از وی، چند نفر ایده‌هایی برای پاسخ‌های مشابه مطرح کردند. دانش‌آموزان بعد از بحثی طولانی، تنها همین سه پاسخ را پذیرفتند. اما دانش‌آموزان کلاس با یک پرسش جدی روبه‌رو شد: بالاخره کدام پاسخ صحیح است؟!



۲-۲- در مسیر حدس، کشف و اثبات

زمانی‌که با عبارت «نشان دهید ...» یا «درستی ... را بررسی کنید» و مانند آن روبه‌رو می‌شویم، به‌دنبال اثبات مطلبی هستیم. اما **اثبات** چیست؟ پاسخ به این پرسش، چندان که می‌نماید، ساده نیست. در لغت‌نامه دهخدا ذیل مدخل اثبات معانی بسیاری نوشته شده که برخی از آن‌ها چنین است: قرار دادن ـ درست کردن ـ نوشتن ـ پابرجا کردن؛ و در حیطه فلسفه آمده «حکم کردن است به ثبوت چیزی دیگر». فرهنگ آکسفورد نیز در مقابل proof در ریاضیات چنین آمده است: «راهی برای نشان دادن درستی یک عبارت یا صحیح بودن محاسبه در ریاضیات».

هر یک از تعریف‌های بالا به فرایندی اشاره دارد که کمابیش با آن آشنا هستیم. خواننده اثبات باید ببیند که چرا یک عبارت خاص درست است و نیز ببیند که چگونه این اثبات شروع می‌شود و مسیر آن چیست. این فرایند بر پایه **دانسته‌های** مورد توافق و در روندی **منطقی**، درستی حکم مورد نظر را به دیگری نشان می‌دهد. تاریخ ریاضیات از اثبات‌های گوناگون غنا یافته است که برخی از آن‌ها بسیار بدیع هستند و در آن‌ها ایده‌های بکری دیده می‌شود و برخی نیز با وجود درستی حکم مورد نظر، بر پایه پیش‌فرض‌هایی بنا شده بودند که چندان پایه‌های محکم و پابرجایی نداشتند و نادرستی اثبات‌های ارائه شده، به‌زودی آشکار شد. بنابراین درستی پیش‌فرض‌ها و دانسته‌های اثبات، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. بدین ترتیب، ریاضیات به‌صورت مرحله به مرحله و بر پایه گزارها و قضیه‌های اثبات شده یا پذیرفته‌شده توسعه می‌یابد و هر چه در **مسیر اثبات** از پیش‌فرض‌ها و دانسته‌های کمتری استفاده شود، اثباتی مقدماتی‌تر پیش‌رو خواهیم داشت. با این همه، یک اثبات مقدماتی ممکن است چندان ساده و سرراست نباشد و در آن ایده‌ای بکر به چشم بخورد. مثال بعد این مطلب را روشن‌تر می‌کند:

گزاره. توان گنگ عددی گنگ وجود دارد که گویا است.

اثبات. می‌دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است (به‌عنوان یک «دانسته» مورد توافق).

عدد $A=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ را بررسی می‌کنیم.

دو حالت ممکن است: الف) عدد A گویا است؛ ب) عدد A گنگ است.

اگر A گویا باشد (حالت الف)، حکم ثابت می‌شود.

فرض کنید A گنگ باشد (حالت ب) در این صورت، عدد $B=A^{\sqrt{2}}$ گویا است، زیرا

$$B=A^{\sqrt{2}}=((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$$

با فرض گنگ بودن A (و گنگ بودن $\sqrt{2}$) عدد گویای B توان گنگی از عددی گنگ است، و حکم ثابت می‌شود.

در اثبات کوتاه و زیبای بالا، وجود چنین عددی نشان داده شده است، اما درباره این‌که جواب چیست و چگونه به‌دست می‌آید، چیزی بیان نشده است. اثبات‌هایی از این دست را اثبات وجودی می‌نامیم. تنها وجود جواب را ثابت می‌کند. اما اگر در مسیر اثبات، روش یافتن جواب یا الگوریتمی برای تولید آن ارائه شود، با اثبات ساختاری روبه‌رو می‌شویم. مهم این است که در هر دو نوع اثبات، باید ایده‌ای برای اثبات به ذهن برسد. در غیر این‌صورت، مسیر اثبات و حل مسئله **کشف** نمی‌شود. کشف چنین مسیری نیز با کسب تجربه **مسئله‌حل‌کن** میسر می‌شود.

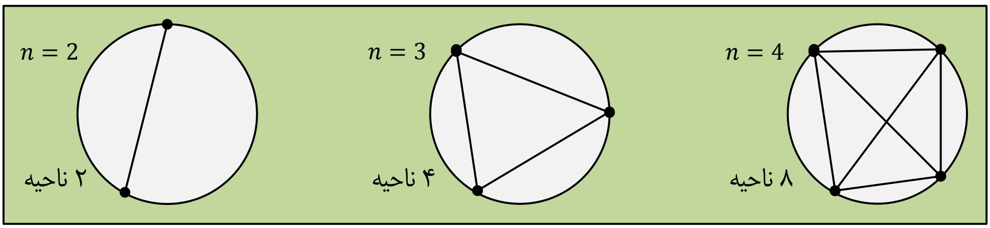
این تجربه می‌تواند از آن یک مسئله‌حل‌کن **خبره** باشد که در رویارویی با مسئله‌های دیگر چنین تجربه‌ای را کسب کرده است. اما یک دانش‌آموز **تازه‌کار** نیز می‌تواند با بررسی حالت‌های گوناگون، به حدسی مناسب در مسیر حل مسئله و اثبات آن دست پیدا کند.

یک مسئله‌حل‌کن خبره، در اثر تجربه و بررسی‌های متعددی که روی انواع مسئله‌ها انجام داده استمی‌تواند برای مسئله‌ای جدید، رهیافتی متناسب با آن بیابد. این تجربه، تنها با دیدن راه‌حل‌ها به دست نمی‌آیدنیز می‌تواند با بررسی حالت‌های گوناگون، به حدسی مناسب در مسیر حل مسئله و اثبات آن دست پیدا کند.

یک مسئله‌حل‌کن خبره، در اثر تجربه و بررسی‌های متعددی که روی انواع مسئله‌ها انجام داده است می‌تواند برای مسئله‌ای جدید، رهیافتی متناسب با آن بیابد. این تجربه، تنها با دیدن راه‌حل‌ها به دست نمی‌آید؛ بلکه در مسیر تلاش فردی، حدس زدن، آزمون و خطا، بررسی‌های مکرر و مانند آن کسب می‌شود. اهمیت حدس زدن زمانی آشکارتر می‌شود که مسئله یک پرسش باشد و نه یک حکم بیان شده! به مثال زیر توجه کنید:

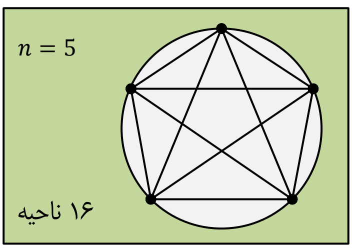
مسئله. از ترسیم تمام وترهای ممکن بین n نقطه روی محیط دایره، حداکثر چند ناحیه در دایره به‌دست می‌آید؟

پیش از هر پاسخی به مسئله و اقدام برای اثبات آن، ضروری است که حدسی متناسب با مسئله بزنیم. برای این منظور، «بررسی حالت‌های ساده‌تر» به‌عنوان رهیافتی عملی می‌تواند کارآمد باشد: به ازای $n = 1$ هیچ وتری را نمی‌تواند ترسیم کرد و تنها یک ناحیه (داخل دایره) خواهیم داشت. با اضافه شدن یک نقطه دیگر، $n = 2$ تنها یک وتر می‌توان ترسیم کرد و داخل دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. در حالتی که سه نقطه روی دایره انتخاب شود، $n = 3$ سه وتر و چهار ناحیه به‌دست می‌آید و به ازای $n = 4$ هشت ناحیه در دایره ایجاد می‌شود.



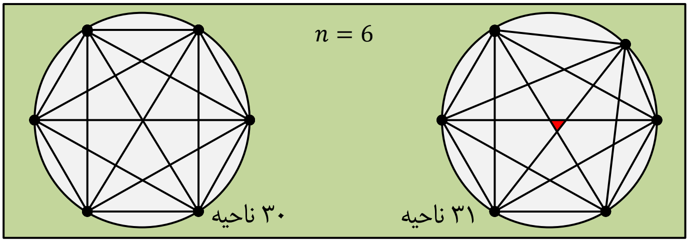
با سازمان‌دهی اطلاعات به‌دست آمده، می‌توان جدولی به‌صورت زیر تنظیم کرد:

تعداد نقطه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد ناحیه‌ها	۱	۲	۴	۸		

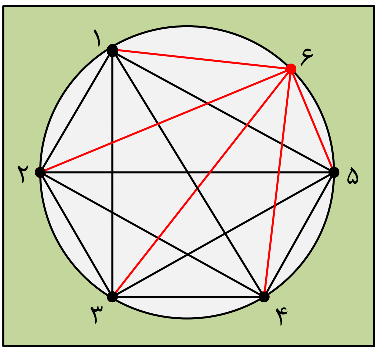


ضابطه‌های متعددی برای ادامه این دنباله عددی متصور است. می‌توان **حدس** زد، به ازای هر n نقطه، تعداد ناحیه‌ها 2^{n-1} است. بررسی بیشتر نشان می‌دهد این حدس به ازای $n = 5$ نیز درست است (تعداد ناحیه‌ها برابر با $16 = 2^{5-1}$ است):

اما این مشاهده را نمی‌توان به‌عنوان اثبات (یا پاسخ نهایی) پذیرفت و بررسی عددی نتیجه‌های به‌دست آمده نیز تأیید حدس نیست و (همان‌گونه که خواهید دید) ممکن است نادرست باشد. تجربه نشان داده است که بین مسئله‌حل‌کن‌های تازه‌کار، کنار گذاشتن موضوع اصلی مسئله (تعداد ناحیه با افزایش تعداد نقطه‌ها) و پرداختن به دنباله عددی ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶ رایج است. اما در ادامه این دنباله مشاهده می‌شود که به ازای $n = 6$ دو شکل متفاوت پیش رو خواهیم داشت:



در شکل سمت چپ، سه وتر (قطرهای دایره) یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند (همرس‌اند) در حالی که وترهای متناظر در شکل سمت راست همرس نیستند و بدین ترتیب یک ناحیه بیشتر (ناحیه قرمزرنگ) به‌دست می‌آید. با این حال، نمی‌توان ۳۲ ناحیه به‌دست آورد. بنابراین، حدس 2^{n-1} نادرست است. بررسی دقیق‌تر حالت $n = 6$ می‌تواند به اصلاح حدس اولیه منجر شود: به نظر می‌رسد که **اگر هیچ سه وتری در داخل دایره همرس نباشند، بیشترین تعداد ناحیه‌ها به‌دست می‌آید.** پذیرفتن این پیش‌فرض (بدون اثبات) مشکل چندانی در مسیر کشف حکم ایجاد نمی‌کند و در صورتی که با این پیش‌فرض، پاسخ مسئله به‌دست بیاید (که چنین است) اثبات این پیش‌فرض اهمیت خواهد داشت (که یک مسئله‌حل‌کن خبره آن را از نظر دور نمی‌کند). اکنون برای شمارش بیشترین ناحیه‌های ممکن در دایره، بر اساس این پیش‌فرض، حالت $n = 6$ را از $n = 5$ به‌دست می‌آوریم:



به ازای $n = 5$ دایره به ۱۶ ناحیه تقسیم شد. نقطه ششم را روی محیط دایره طوری انتخاب می‌کنیم که هیچ‌یک از نقطه‌های تقاطع وترهای قبلی در امتداد این نقطه و پنج نقطه دیگر واقع نباشند. با این روش، هیچ سه وتری در دایره همرس نخواهند شد. با وصل کردن رأس ششم به رأس ۱، یک ناحیه جدید به‌دست می‌آید و با وصل کردن این رأس به رأس ۲، چهار ناحیه دیگر ایجاد می‌شود. به‌همین ترتیب، از وصل کردن رأس ششم به رأس‌های ۳، ۴، و ۵ به‌ترتیب ۵، ۴، و ۱ ناحیه جدید اضافه می‌شود. پس:

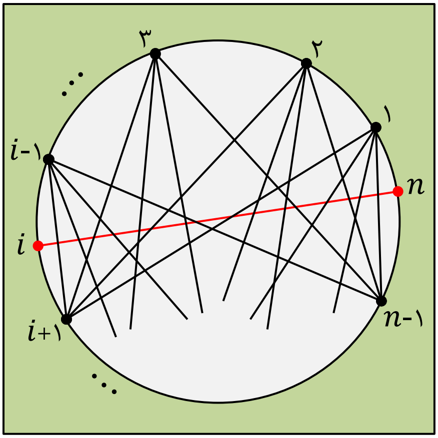
تعداد ناحیه‌ها به ازای ۶ نقطه = تعداد ناحیه‌ها به ازای ۵ نقطه + تعداد ناحیه‌های جدید = ۱۶ + (۱ + ۴ + ۵ + ۴ + ۱) = ۳۱

همان مقداری که به ازای $n = 6$ پیش‌بینی کرده بودیم. در حالت کلی، پاسخ مسئله و اثبات آن نتیجه می‌شود:

حل مسئله. با بررسی بیشتر، مشاهده می‌شود با انتخاب یک نقطه جدید روی محیط دایره و ترسیم وترهای میان این نقطه با نقطه‌های قبلی، هر پاره‌خط متناظر بین دو تقاطع، یک ناحیه جدید جدا می‌کند. برای نمونه، به اضافه شدن نقطه ششم و ناحیه‌های ایجاد شده جدید نگاه کنید. بنابراین اگر روی یک وتر k نقطه باشد، $k+1$ ناحیه جدید ایجاد می‌شود. پس حداکثر تعداد ناحیه‌ها به‌صورت بازگشتی به‌دست می‌آید:

تعداد وترهای جدید + **تعداد نقطه‌های تقاطع وترهای جدید با وترهای قبلی** + **تعداد ناحیه‌ها به ازای $n-1$ نقطه** = **تعداد ناحیه‌ها به ازای n نقطه**

فرض کنید **تعداد ناحیه‌ها به ازای $n-1$ نقطه** داده شده است. می‌دانیم **تعداد وترهای جدید** برابر با $n-1$ است. کافی است **تعداد نقطه‌های تقاطع وترهای جدید با وترهای قبلی** حساب شود. نقطه nام را طوری انتخاب می‌کنیم که هیچ سه وتری در داخل دایره همرس نباشند. به‌سادگی می‌توان دید، تعداد وترهایی که وتر in را قطع می‌کنند، برابر با حاصلضرب تعداد نقطه‌های یک‌طرف وتر in در تعداد نقطه‌های طرف دیگر این وتر است که برابر با $(i-1)(n-i-1)$ است. با تغییر i در فاصله بین 2 تا $n-3$ تعداد نقطه‌های تقاطع این وترها در مجموع محاسبه می‌شود:



تعداد نقطه‌های تقاطع وترهای جدید با وترهای قبلی $= 1\times(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\cdots+(n-3)\times 1$

و پاسخ مسئله کامل می‌شود.

در فرایند بالا، برخی جزییات حذف شده است. برای یک راه حل کامل باید به این جزییات توجه شود. برای نمونه، نباید فراموش کنیم که اثبات پیش‌فرض **اگر هیچ سه وتری در داخل دایره همرس نباشند، بیشترین تعداد ناحیه‌ها به‌دست می‌آید** ضروری است. همچنین بررسی موشکافانه‌تر چگونگی شمارش ناحیه‌های جدید می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا تجربه بیشتری برای تحلیل یک مسئله به‌دست آورند. از سویی، تلاش برای به‌دست آوردن رابطه صریح (در مقابل رابطه بازگشتی) می‌تواند به افزایش توانایی‌های محاسباتی دانش‌آموزان بیانجامد.

طی این فرایند، حدس زدن و به‌دنبال آن کشف پاسخ و سپس ارائه استدلال با بررسی **حالت‌های ساده‌تر** و **سازمان‌دهی داده‌ها** امکان‌پذیر شد. با وجود آن‌که حدس اولیه مبنی بر پاسخ سرراست 2^{n-1} با چند مثال اول سازگار بود، لیکن بررسی عمیق‌تر و بررسی حالت‌های بیشتر برای آن، نادرستی این حدس را نشان داد و همزمان حدس جدیدی مطرح شد. مطرح کردن چنین مثال‌هایی و بررسی همه‌جانبه آن در کلاس درسی می‌تواند به کسب مهارت دانش‌آموزان در حدس زدن منجر شود.

۲-۳- واقعیت ریاضی یا حقیقت باور نکردنی؟

توسعه اعداد از سه مسیر متفاوت قابل بررسی است: مسیر توسعه اعداد بر **بستر تاریخ**؛ مسیر **منطقی** توسعه اعداد با استفاده از اصول موضوعه ریاضی؛ و مسیری که در برنامه درسی (**آموزشی**) گنجانده شده است. بررسی سیر تاریخی توسعه اعداد جذابیت‌های خاص خود را دارد و پاره‌ای موارد بر خلاف مسیری است که با استفاده از اصول موضوعه و به‌صورت منطقی در ریاضیات به آن توجه می‌شود. چیزی که می‌تواند مورد توجه بیشتری قرار گیرد، مسیری است که در برنامه درسی آمده است. اما چالش‌های متعددی می‌تواند در این میان ایجاد شود.

در تجربه حرفه‌ای نگارنده، شامل مشاهداتی بود که موجب شد تا به بررسی باور دانش‌آموزان (و حتی دانشجویان) درباره اعداد علاقه‌مند شوم و تحقیق بیشتری داشته باشم. بر پایه این تحقیق، پرسشی زیر به شاگردان داده شد:

مقدار عددی $[0.\bar{9}]$ چیست؟ (جزء صحیح $0.\bar{9}$)

پاسخ به این پرسش، مخاطبان آن را به دو گروه تقسیم می‌کند: گروهی که پاسخ را برابر با صفر می‌دانند، و گروهی که پاسخ را ۱ می‌دانند. اما باورهای آنان در هر گروه یکسان نیست! برای بررسی موشکافانه‌تر مسیر آشنایی دانش‌آموزان را با اعداد در مسیر آموزشی آنان به اختصار در چند گام زیر دنبال می‌کنیم. مسیری که با همه فراز و فرودها با شناخت آنان از اعداد می‌انجامد.

⇦ آشنایی دانش‌آموزان با محور اعداد در دبستان و با معرفی اعداد طبیعی روی یک خط (خط‌کش) آغاز می‌شود. در سال‌های بعد نیز نمایش اعداد گویا روی محور معرفی می‌شود. در این دوره، دانش‌آموزان با استفاده از محور اعداد تا حدی ارتباط بین نماش کسری و اعشاری اعداد گویا را تجربه می‌کنند. برای نمونه، نمایش مقدار **نیمی از واحد** به شکل $\frac{1}{2}$ و 0.5 با تقسیم طول واحد روی محور نشان داده می‌شود و تصور کسر به‌عنوان یک **تقسیم** در نمایش کسری اعداد گویا را برای دانش‌آموزان بدیهی می‌نمایاند. بدین ترتیب، دانش‌آموزان از ابتدا، تناظری بین اعداد و نقطه‌های روی محور برقرار می‌کنند. در نتیجه با شناسایی و معرفی اعداد بیشتری روی محور، این توجیه برای دانش‌آموزان تا حدودی بدیهی است که به ازای هر عدد، جایی روی محور برای آن پیدا شود، و برعکس، هر نقطه روی محور متناظر با یک عدد است.

⇦ در مسیر آشنایی دانش‌آموزان با اعداد، نمایش‌های کسری متعددی برای یک عدد گویا معرفی می‌شود و بیشتر تمرین‌ها برای نشان دادن یکسانی مقدار این‌گونه نمایش‌ها است. برای نمونه، اعداد $\frac{5}{1}$، $\frac{10}{2}$، $\frac{15}{3}$، یا $\frac{-5}{-1}$ و مانند آن، شکل‌های گوناگون برای نمایش عدد ۵ است. دانش‌آموزان درمی‌یابند: چنان‌چه صورت مخرج یک کسر در عددی ضرب شود، شکل دیگری برای نمایش کسری آن عدد به دست می‌آید. در نهایت، نمایش کسری اعداد گویا چنین معرفی می‌شود: عددی به‌صورت $\frac{p}{q}$ گویا نامیده می‌شود، اگر p عددی صحیح، و q عددی طبیعی باشد. وجود علامت در شکل‌های دیگر نمایش کسر را می‌توان با این قرارداد معرفی کرد:

$$-\frac{p}{q}=\frac{-p}{q}=\frac{p}{-q}$$

⇦ به روش‌های مختلف **می‌توانیم دو عدد را با هم مقایسه کنیم** و عدد بزرگ‌تر را شناسایی کنیم. به‌علاوه، در مجموعه اعداد صحیح، به ازای هر عدد داده شده، می‌توانیم عدد **بعدی** را **تعیین** کنیم. اما تعیین عدد بعدی در مجموعه اعداد گویا ممکن نیست زیرا بین هر دو عدد گویا، یک **عدد گویا** وجود دارد. بر خلاف بسیاری از جزییاتی که در مسیر آموزش مورد تأکید قرار گرفته است، وجود عددی گویا بین هر دو عدد گویای دلخواه، به‌صورت پراکنده بیان می‌شود و تنها در چند گزاره کوتاه به آن اشاره می‌شود. با این همه، از این ویژگی به‌عنوان یک پیش‌فرض بدیهی از دوره متوسطه به بعد استفاده می‌شود.

⇦ به روش‌های مختلفی **می‌توانیم عددی گویا بین دو عدد داده شده پیدا کنیم**. فرض کنید دو عدد $a=\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_2}{q_2}=b$ داده شده است (سه روش معرفی شده و واضح است که روش‌های دیگری نیز وجود دارد).

روش نخست: میانگین هر دو عدد داده شده (از جمله اعداد گویا) بین آن دو عدد قرار دارد. برای اثبات، کافی است به عبارت زیر توجه کنید:

$$a=\frac{a+a}{2}<\frac{a+b}{2}<\frac{b+b}{2}=b$$

روش دوم: فرض کنید $\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_2}{q_2}$ در نتیجه $p_1q_2<p_2q_1$ با استفاده از این رابطه، روش دیگری برای پیدا کردن یک عدد گویا بین دو عدد گویا داده شده معرفی می‌کنیم:

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_1(q_1+q_2)}{q_1(q_1+q_2)}=\frac{p_1q_1+p_1q_2}{q_1(q_1+q_2)}<\frac{p_1q_1+p_2q_1}{q_1(q_1+q_2)}=\frac{(p_1+p_2)q_1}{q_1(q_1+q_2)}=\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}=\frac{(p_1+p_2)q_2}{(q_1+q_2)q_2}=\frac{p_1q_2+p_2q_2}{(q_1+q_2)q_2}<\frac{p_2q_1+p_2q_2}{(q_1+q_2)q_2}=\frac{p_2(q_1+q_2)}{(q_1+q_2)q_2}=\frac{p_2}{q_2}$$

در نتیجه:

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}<\frac{p_2}{q_2}$$

روش سوم: اگر $q_1=q_2$ آنگاه می‌توانیم عددی صحیح مانند c بین p_1 و p_2 بیابیم و کسر $\frac{c}{q_1}$ بین این دو عدد است. در صورتی که p_1 و p_2 دو عدد متوالی باشند، می‌توان با ضرب صورت و مخرج کسرها و نمایش‌های دیگری از این کسرها، عدد c را پیدا کرد. اگر مخرج کسرها برابر نباشند نیز می‌توان با هم‌مخرج کردن دو کسر از این روش استفاده کرد.

⇦ یکی دیگر از شکل‌های نمایش عدد گویا $\frac{p}{q}$ **نمایش اعشاری** آن است. نمایش اعشاری هر عدد گویا از تقسیم صورت بر مخرج آن به‌دست می‌آید. اگر در هر مرحله، باقی‌مانده تقسیم برابر با صفر شود، نمایش اعشاری آن عدد گویا **متناهی** (یا **مختوم**) است. اما چنان‌چه باقی‌مانده در هیچ مرحله‌ای باقی‌مانده صفر نشود، و از آنجا که به ازای هر q (مخرج کسر) $q-1$ باقی‌مانده ناصفر متمایز داریم. بنابراین حداکثر به این تعداد رقم‌های اعشاری مختلف به‌دست می‌آید و از جایی به بعد، باقی‌مانده تقسیم، تکرار می‌شود. یک مجموعه از این رقم‌های تکراری **دوره گردش** نامیده می‌شود که با گذاشتن یک خط بالای این رقم‌ها، این دوره گردش را مشخص می‌کنیم.

برای مثال، بسط اعشاری عددهای $\frac{1}{n}$ به ازای $n = 2,3,4,5,6,7,8,9$ چنین است:

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{6} = 0.16666\ldots = 0.1\bar{6}$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\bar{3} \qquad \frac{1}{7} = 0.142867142867142867\ldots = 0.\overline{142867}$$

$$\frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{1}{5} = 0.2 \qquad \frac{1}{9} = 0.11111\ldots = 0.\bar{1}$$

می‌توانیم فرض کنیم هر عدد گویا به صورت حاصل‌جمع کسرهایی است که مخرج آن‌ها توانی از ۱۰ باشد:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} \qquad \frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} \qquad \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \cdots$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \qquad \frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \cdots$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} \qquad \frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots$$

در حالت نامتناهی، مجموع هر تعداد متناهی از جمله‌های این عبارت‌ها (مجموع جزیی سری) تقریبی از عدد گویا مورد نظر است. هم‌چنین، برای هر عدد گویا با دوره گردش نیز می‌توان چنین تقریبی را به‌دست آورد. اما همین رویکرد در پاره‌ای موارد می‌تواند مبدأ یکی از بدفهمی‌ها باشد. برای مثال، عدد 0.3333 تقریبی از عدد $0.\bar{3}$ است. در نتیجه، عدد 0.3333 تقریبی برای عدد 0.3333 تقریبی $\frac{1}{3}$ نیز هست. اما تجربه تدریس، نشان می‌دهد در برخی موارد، دانش‌آموزان با تعمیم این تقریب، عدد $0.\bar{3}$ را به‌عنوان تقریب $\frac{1}{3}$ می‌دانند!

⇦ **رابطه بین نمایش اعشاری عدد گویا A و نمایش اعشاری 10A** چیست؟ به‌جای بررسی حالت کلی، یک حالت خاص را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض کنید در نمایش اعشاری عدد مورد نظر، تنها یک رقم تکرار شود، یعنی طول دوره گردش ۱ باشد، مانند $A = 0.\bar{a}$. در نمایش کسرهای اعشاری این عدد داریم:

$$A = 0.\bar{a} = \frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \frac{a}{10^3} + \cdots + \frac{a}{10^n} + \cdots$$

$$10A = 10\left(\frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \frac{a}{10^3} + \cdots + \frac{a}{10^n} + \cdots\right)$$
$$= a + \frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \frac{a}{10^3} + \cdots + \frac{a}{10^n} + \cdots = a + 0.\bar{a} = a.\bar{a}$$

یعنی علامت اعشاری یک رقم جابه‌جا شده است. با تعمیم این ویژگی، می‌توان نشان داد اگر عدد گویا را در 10^n ضرب کنیم، در نمایش اعشاری آن، علامت اعشاری به تعداد n مکان جابه‌جا می‌شود.

⇦ چگونه **می‌توانیم نمایش اعشاری عدد گویا را به نمایش کسری آن تبدیل کنیم**؟ برای پاسخ به این پرسش، از ویژگی بند قبل استفاده می‌کنیم و آن را در مثال‌های زیر بررسی می‌کنیم:

مثال. نمایش کسری عدد $A = 0.\bar{4}$ را بیابید.

$$\begin{array}{rl} 10A = 4.\bar{4} & \\ - \quad A = 0.\bar{4} & \\ \hline 9A = 4 & \Rightarrow \quad A = \frac{4}{9} \end{array}$$

مثال. نمایش کسری عدد $A = 0.12\bar{3}$ را بیابید.

$$\begin{array}{rl} 1000A = 123.\bar{3} & \\ - \quad 100A = 12.\bar{3} & \\ \hline 900A = 111 & \Rightarrow \quad A = \frac{111}{900} \end{array}$$

برای دانش‌آموزان جالب خواهد بود اگر نشان دهیم انتخاب دوره گردش، برای یک عدد منحصر بفرد نیست. برای مثال عدد گویا $A = 0.1919191919\ldots$ را می‌توان به دو صورت $A = 0.\overline{19}$ و $A' = 0.1\overline{91}$ نمایش داد:

$$\begin{array}{r} 100A = 19.\overline{19} \\ - \quad 10A = 1.\overline{91} \\ \hline 99A = 19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000A' = 191.\overline{91} \\ - \quad 10A' = 1.\overline{91} \\ \hline 990A' = 190 \end{array}$$

که در هر دو حالت: $A = A' = \frac{19}{99}$

⇦ فرض کنید a عددی یک‌رقمی باشد، با کشف این نکته که $A = 0.\bar{a} = \frac{a}{9}$، دانش‌آموزان می‌توانند نتایج جالب دیگری نیز به‌دست آورند. فرض کنید a، b و c عددهایی یک‌رقمی باشند و $c = ab$. رابطه بین نمایش کسری دو عدد گویا $A = 0.\bar{a}$ و $C = 0.\bar{c}$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{array}{rl} 10A = a.\bar{a} & \\ - \quad A = 0.\bar{a} & \\ \hline 9A = a & \Rightarrow \quad A = \frac{a}{9} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 10C = c.\bar{c} & \\ - \quad C = 0.\bar{c} & \\ \hline 9C = c & \Rightarrow \quad C = \frac{ab}{9} = bA \end{array}$$

برای مثال، $2 \times 0.\bar{3} = 2 \times \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = 0.\bar{6}$. اگر $c = a + b$ رابطه مشابه بین نمایش کسری عددهای گویا $A = 0.\bar{a}$، $B = 0.\bar{b}$ و $C = 0.\bar{c}$ وجود دارد: $A + B = \frac{a}{9} + \frac{b}{9} = \frac{a+b}{9} = \frac{c}{9} = C$

توجه کنید که اگر حاصل‌ضرب یا حاصل‌جمع این عددها تک رقمی نباشد، این نتایج کارآمد نیستند. می‌توانیم با استفاده از این ویژگی‌ها به بحث اصلی برگردیم: فرض کنید $A = 0.\bar{9}$

$$\begin{array}{rl} 10A = 9.\bar{9} & \\ - \quad A = 0.\bar{9} & \\ \hline 9A = 9 & \Rightarrow \quad A = 1 \end{array}$$

به‌عبارت دیگر: مقدار عددی $[0.\bar{9}] = 1$. اما این آغاز بحث است: به ازای نمایش کسری هر عدد گویا، می‌توان با تقسیم صورت بر مخرج، نمایش اعشاری آن را به‌دست آورد، اما نمی‌توان کسر مانند $\frac{p}{q}$ یافت که با عمل تقسیم، نمایش اعشاری $0.\bar{9}$ به‌دست بیاید! این موضوع باعث شده تا در دوره‌های مختلف آموزشی، شاهد آن باشیم که دانش‌آموزان و دانشجویان با وجود دیدن اثبات‌های متعدد برای برابری ۱ با $0.\bar{9}$، این برابری را باور نداشته باشند!

می‌دانیم $0.\bar{1} = \frac{1}{9}$ و می‌توان مضارب این کسر را محاسبه کرد: $3 \times \frac{1}{9} = 3 \times 0.\bar{1} = 0.\bar{3}$ یعنی $\frac{3}{9} = 0.\bar{3}$ و به‌طور مشابه $\frac{6}{9} = 0.\bar{6}$ و به‌ویژه $\frac{9}{9} = 0.\bar{9}$ که همان حکم مورد نظر است یعنی $0.\bar{9} = 1$.

⇦ به‌عنوان اثباتی دیگر، فرض کنید این تساوی برقرار نباشد (برهان خلف) یعنی $0.\bar{9} < 1$که در این صورت بین این دو عدد، باید عددی دیگر مانند M وجود داشته باشد که $0.\bar{9} < M < 1$. با توجه $M < 1$، هر یک از رقم‌های اعشاری عدد M نمی‌تواند کمتر از ۹ باشد، زیرا در غیر این صورت، $M < 0.\bar{9}$ که خلاف انتخاب M است. بنابراین تمام رقم‌های M برابر با ۹ است، یعنی $M = 0.\bar{9}$ که در این حالت نیز در تناقض با انتخاب M است. پس چنین عددی نمی‌تواند وجود داشته باشد و فرض $0.\bar{9} < 1$ نادرست است. در نتیجه $0.\bar{9} = 1$.

تا این جا استدلال‌های گوناگونی برای این برابری ارائه شد. به سؤال امتحانی ابتدای این بخش باز می‌گردیم:

مقدار عددی $[0.\bar{9}]$ چیست؟ (جزء صحیح $0.\bar{9}$)

این سؤال هم در سال‌های پایانی دبیرستان و هم در آزمون‌های سال اول دانشگاه گنجانده شد و از آنان خواسته شد، دلایل خود را بنویسند. تفاوت محسوسی در نتایج عملکرد این دو گروه مشاهده نمی‌شود. حدود یک‌سوم از دانش‌آموزان و دانشجویان (۳۱٪) مقدار عددی را برای این جزء صحیح، برابر با ۱ اعلام کردند. هر چند تفاوت‌هایی در استدلال آنان وجود داشت، اما مهم‌ترین دلیل آنان، استفاده از برابری $0.\bar{9} = 1$ بود. بقیه آنان، این مقدار را برابر با صفر اعلام کردند. جالب آن که گروهی (حدود ۴۸٪) با اشاره به این برابری، پاسخ صفر را بیان کردند. این گروه مدعی بودند که هر چند برابری $0.\bar{9} = 1$ برقرار است، اما مقدار $0.\bar{9}$ در حد، برابر ۱ است! و چون جزء صحیح آن را حساب می‌کنیم، دنباله‌ای از صفر داریم که حد آن نیز صفر است!! این تعبیر دوگانه که از یک سو، برابری $0.\bar{9} = 1$ را می‌پذیرند و از سوی دیگر، در عمل، نماد $0.\bar{9}$ را نه به‌عنوان یک عدد ثابت، بلکه یک دنباله عددی در نظر می‌گیرند موجب می‌شود تا این برابری به‌عنوان یک **واقعیت ریاضی** پذیرفته شود، اما در عملکرد آنان شواهدی مبنی بر عدم باور به آن مشاهده شود.

در بحث بیشتر با این گروه نتایج دیگری نیز مشاهده می‌شود. در تجربه معلمی، بارها شاهد آن بودیم که دانش‌آموزان این عبارت را یک **حقیقت باور نکردنی** تلقی کرده‌اند. تعبیر دانش‌آموزان از $0.\bar{9}$ دوگانه است: از یک سو، آن را به‌عنوان عددی گویا می‌پذیرند، زیرا نمایش اعشاری آن دارای دوره گردش است. از سوی دیگر معتقدند در عین حال که $0.\bar{9}$ عدد است، مکان آن را روی محور اعداد نمی‌توان تعیین کرد، که ناشی از ماهیت این عبارت است که «حدی» است! در این حالت، مفهوم بینهایت به‌عنوان یک مقدار ایستا در عدد $0.\bar{9}$، با مفهوم بینهایت به عنوان یک مقدار پویا در «حد دنباله عددهایی اعشاری با k رقم (همگی ۹) وقتی k بزرگ می‌شود» مخدوش شده است.

در بحث دقیق‌تر با دانشجویان، وجود برخی میان‌بُرها در آزمون‌های تستی برجسته شد. گروهی از دانشجویان معتقدند مقدار $0.\bar{9}$ برابر با «یک حدی» یا «صفر حدی» است! مفهوم «یک حدی» در آموزش برای تست‌زنی بیان می‌شود، اما با توجه به ماهیت این‌گونه آموزش‌ها، تعریف دقیقی برای آن بیان نمی‌شود و تنها با هدف ارائه روش‌هایی «سریع» برای محاسبه حد، این اصطلاح معرفی می‌شود. با پیگیری بیشتر، حتی در بین بعضی از معلمان «متخصص» در حوزه این‌گونه آزمون‌ها، توافقی برای معنا و مفهوم آن وجود ندارد! با این همه، مفهوم «عدد حدی» هم‌چنان در باور عمومی دانش‌آموزان و حتی دانشجویان مطرح است!

۲-۴- چند تجربه کوتاه دیگر در حل مسئله

پیگیری (سماجت) یا تغییر راهبرد

مشاهده و استنتاج بخشی از تلاش برای حل مسئله است. در مواردی ممکن است مشاهده اولیه و استنتاج ناشی از آن، به پاسخ مطلوب منجر نشود. هم‌چنین ممکن است این نتایج با دیگر حقایق سازگار نباشد. این ناسازگاری می‌تواند به‌دلایل مختلفی باشد: از جمله، کافی نبودن تعداد مشاهده‌ها، استنتاج نادرست از مشاهده، حدس اولیه نادرست، و مانند آن. یک مسئله‌حل‌کن تازه‌کار با تمام توانایی‌های که می‌تواند داشته باشد، ممکن است با پا فشاری بر یک مسیر، امکان رسیدن به پاسخ نهایی را از دست بدهد. در حالی که یک مسئله‌حل‌کن خبره ضمن آن که برای رسیدن به پاسخ، پیگیری و سماجت (پشتکار) کافی را دارد، این توانایی را نیز دارد که حین کار روی مسئله، از مجموعه مشاهدات خود استفاده کند تا در فرصت مناسب، حدس اولیه را تغییر دهد؛ یا مسیرهای دیگر نیز را بررسی کند. این تغییر راهبرد در چرخه پولیا نیز مورد تأکید است. نمونه زیر، بیشتر به یک شوخی می‌ماند که نشان از سماجت بسیار زیاد (در حد شک به قابل‌قبول‌ترین حکم) دارد، اما روایتی واقعی از یک کلاس درس است که با اندکی تغییر در اینجا آمده است.

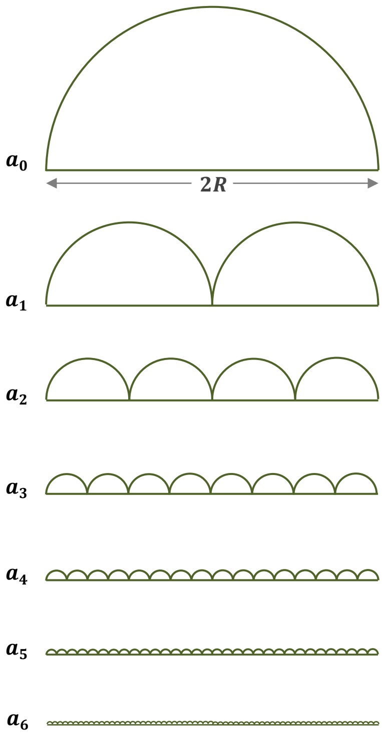
گفتم: فرض کن $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشه که $a_n =$ {مجموع محیط 2^nتا نیم‌دایره که مجموع قطر آن‌ها $2R$ باشد}

گفت: R چنده؟

گفتم: یک عدد ثابت، مثلاً شعاع دایره اولی...

گفت: مگه n از چند شروع میشه؟

گفتم: از صفر ... محیط نیم‌دایره‌های شکل روبه‌رو...



گفت: خب معلومه این دنباله به $2R$ نزدیک میشه.

گفتم: حالا محاسبه کن!

گفت: محیط هر نیم‌دایره برابره با $r\pi$، پس $a_n = 2^n r\pi$

که r شعاع دایره کوچیکه هست اما می‌دونیم $r = \frac{R}{2^n}$

یعنی: $a_n = 2^n \frac{R}{2^n}\pi = R\pi$

گفتم: پس همه جملات دنباله ثابت هستن! (دنباله ثابت)

گفت: آره!

گفتم: اما گفتی دنباله به سمت $2R$ نزدیک میشه!

گفت: لابد π مساوی ۲ هست!

گفتم: آخه می‌دونیم که ... $\pi = 3.1415$!

گفت: حتماً قبلاً اشتباه حساب کردن! من که اشتباه نکردم!

گفتم: ولی...

گفت: ولی نداره. برو اشتباه بقیه رو پیدا کن!

آیا هر نتیجه‌ای دوطرفه است؟

به‌عنوان معلم، بارها شاهد بودم، دانش‌آموزی با توانایی‌های متعدد، دچار اشتباه‌هایی شده که یافتن علت آن، برایشان چندان ساده نبود. یکی از رایج‌ترین آن‌ها ناشی از استدلال‌ها و مسیرهای است که در مسیر برگشت صحیح نیست. بدیهی است که حاصل‌ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است. اما نمی‌توان نتیجه گرفت هر عدد زوج، حاصل‌ضرب دو عدد زوج هستند! ممکن است شما نیز با نمونه‌های متعددی روبه‌رو شده باشید. موضوع زمانی جالب می‌شود که این موضوع در لابه‌لای راه حل مسئله پنهان شده و در نهایت با اشتباهی روبه‌رو هستیم که نادرست بودن آن بدیهی است، اما یافتن علت بروز چنین اشتباهی پنهان می‌ماند. در این حالت، به‌عنوان معلم سعی نکنید تا علت را خودتان بیابید، زیرا ممکن است وقت زیادی در کلاس یا خارج از آن از شما بگیرد. اما می‌توانید از آن به‌عنوان فرصت مناسبی برای آموزش استفاده کنید. از دیگر دانش‌آموزان بخواهیم تا علت را بیابند. در جریان این تلاش، آنان می‌آموزند که چگونه باید در فرایند حل مسئله، حالت‌های نامطلوب و مسیرهای نادرست را تحت کنترل خود قرار دهند. نمونه زیر در یکی از کلاس‌های درس رخ داد و دانش‌آموزی که به این نتیجه شگفت‌انگیز رسیده بود، آن را برای دیگر دوستانش در قالب یک راه حل ارائه کرد و از آن‌ها برای یافتن اشتباه خود کمک خواست. این موضوع و نتیجه‌ای که از بحث حول آن در کلاس درس پدید آمد، موجب شد تا در سال‌های بعد، بخشی از تدریس خود را به کمک آن به پایان برسانم.

گفتم: می‌تونی یکی از ریشه‌های معادله $x^2+x+1=0$ را پیدا کنی؟

گفت: *آره، ببین! $x=0$ که جواب معادله نیست!*

گفتم: نه نیست! چون طرف چپ معادله صفر نمیشه، پس $x\neq 0$

گفت: *پس* $x(x+1+\frac{1}{x})=0$

و چون عبارت باید صفر بشه، باید: $x+1+\frac{1}{x}=0$

پس $x+1=-\frac{1}{x}$

حالا توی معادله اصلی جاگذاری کن: $x^2+(-\frac{1}{x})=0$

یعنی $x^2-\frac{1}{x}=0$

که با مخرج مشترک‌گیری داریم: $\frac{x^3-1}{x}=0$

و برای صفر شدن این عبارت باید صورت صفر بشه: $x^3-1=0$

و می‌دونیم $x=1$ یکی از ریشه‌های این عبارته. پس یکی از ریشه‌های معادله‌ست!!

گفتم: عجب! یعنی توی معادله صدق می‌کنه؟

گفت: *باید درست باشه!*

گفتم: نه نیست! چون میشه $1^2+1+1=0$ و ...

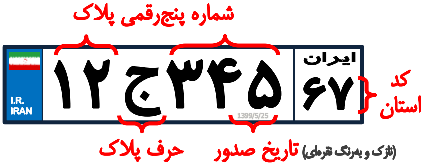
گفت: *کاری ندارم جواب هست یا نه! اما این ریشه معادله‌ست!*

گفتم: آخه ... !

گفت: *همینه که هست! مگه راه من اشتباهه!؟*

ارتباط با زندگی روزمره

یکی از مشکلات پیش روی معلمان، انتخاب یا طراحی یک سؤال متناسب با درس و برگرفته از زندگی روزمره دانش‌آموزان است. در چنین مواردی به‌طور معمول، معلم با تکمیل اطلاعات شخصی خود، موضوعی را انتخاب می‌کند که دانش‌آموزان نیز امکان جستجو و تکمیل اطلاعات را داشته باشند. معلم می‌تواند برخی اطلاعات خود را برای دانش‌آموزان آشکار نکند و اجازه دهد تا آنان این اطلاعات را خودشان بیابند و با هم به اشتراک بگذارند.



انواع حروف پلاک (و کاربرد آن)

- **الف** (دولتی)
- **ب**
- **پ** (پلیس)
- **ت** (تاکسی)
- **ث** (سپاه)
- **ج**
- **د**
- **س**
- **ش** (ارتش)
- **ص**
- **ط**
- **ع** (عمومی)
- **ق**
- **ک** (کشاورزی)
- **ل**
- **م**
- **ن**
- **و**
- **هـ**
- **ی**

⇦ برای نمونه، شیوه شماره‌گذاری پلاک خودروها می‌تواند موضوعی جالب برای دانش‌آموزان باشد. معلم می‌تواند ابتدا چند سؤال به دانش‌آموزان بدهد و آنان را به تکمیل اطلاعات دعوت کند و از دانش‌آموزان بخواهد در حین ارائه راه‌حل خودشان ارائه کنند. [جدول «انواع حروف پلاک» شامل همه موارد نیست و حروفی مانند **ز ف گ** در این فهرست نیست!!] محول کردن چند سؤال ساده (مانند سؤال‌های ۱ تا ۳) در پایان یک جلسه آموزشی، می‌تواند انگیزه‌ای باشد تا برای ارائه پاسخ به سؤال‌ها، دانش‌آموزان به‌دنبال اطلاعات ضروری مورد نیاز بروند. الزامی نیست که معلم اطلاعات یا روش دست‌یابی به آن‌ها را به دانش‌آموزان بگوید. این فرصتی است که دانش‌آموزان با انواع روش‌های جستجو آشنا شوند. ممکن است اطلاعات غیرضروری (مانند تاریخ صدور)، برای حل سؤال‌ها به‌کار نیایند، اما می‌تواند برای دانش‌آموزان جالب باشد. معلم می‌تواند سؤال‌هایی چالش‌برانگیز (مانند سؤال‌های ۴ تا ۷) را در جلسه بعدی کلاس مطرح کند. بحث درباره راه‌حل‌ها می‌تواند بخشی از یادگیری دانش‌آموزان باشد. یک سؤال مشابه، اما بسیار متفاوت (مانند سؤال ۸)، می‌تواند پایان‌بخش کلاس باشد که در عین حال مقدمه‌ای برای درس بعدی است.

سؤال ۱. در یک کد استان، چند خودروی عمومی را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

سؤال ۲. بدون توجه به کد استان، چند خودرو می‌تواند دارای پلاک همانند باشند؟

سؤال ۳. در یک کد استان، پلاک چند خودرو شخصی می‌تواند دارای رقم‌های همانند باشند؟

سؤال ۴. با یک کد استان، چند خودروی شخصی را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

سؤال ۵. در ایران حداکثر چند خودرو شخصی را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

مجموع رقم‌های اصلی هر پلاک خودرو می‌تواند از ۵ تا ۴۵ باشد (بررسی کنید).

سؤال ۶. چند پلاک وجود دارد که مجموع رقم‌های اصلی آن‌ها برابر با ۵ است؟

سؤال ۷. چند پلاک وجود دارد که مجموع رقم‌های اصلی آن‌ها برابر با ۴۴ است؟

سؤال ۸. چند درصد از پلاک‌ها، مجموع رقم‌های اصلی آن‌ها برابر با ۲۵ است؟

معمایی برای تمام پایه‌ها

معلم از دانش‌آموزان خواست تا یک عدد دلخواه انتخاب کنند. برای نمونه: ۱۲۳۴

سپس از آن‌ها خواست که مقلوب (وارونه‌نویسی) آن عدد را بنویسند. ۴۳۲۱

... عدد کوچکتر را از عدد بزرگ‌تر کم کنید و حاصل را بنویسید. ۴۳۲۱ − ۱۲۳۴ = ۳۰۸۷

... یکی از رقم‌های مخالف صفر را برای خودتان مخفی کنید. برای مثال ۸ را جدا می‌کنیم

... حاصل‌جمع بقیه رقم‌ها را حساب کنید... ۳ + ۰ + ۷ = ۱۰ (۸ مخفی شده)

تا اینجا، کار را تمام دانش‌آموزان کلاس انجام دادند و در این مدت معلم خود را سرگرم نشان داد و به ورقه کسی نگاه نکرد. از آن‌ها خواست تا هر کس حاصل‌جمع را بلند بگوید. در برابر هر حاصل‌جمع، عدد مخفی وی را گفت! (در برخی موارد با تکرار حاصل‌جمع آن‌ها، برای خود زمان کسب می‌کرد تا محاسبه‌های ذهنی را انجام دهد).

بعضی از حاصل‌جمع‌ها و پاسخ معلم در زیر آمده است: ۹ ⇦ ۱۸ ۵ ⇦ ۲۲ ۲ ⇦ ۷ ۵ ⇦ ۱۳

۱ ⇦ ۸ ۱ ⇦ ۲۶ ۷ ⇦ ۱۱ ۶ ⇦ ۳ ۸ ⇦ ۱۰ ۱ ⇦ ۱۷ ۴ ⇦ ۵ ۷ ⇦ ۱۱

این تجربه‌ای است که در دبستان (پایه پنجم)، راهنمایی (همان دوره متوسطه اول)، دبیرستان، و حتی در دانشگاه تکرار شده است و نگارنده همواره با شگفتی دانش‌آموزان (و البته دانشجویان) روبه‌رو شده است. به‌دلیل زیاد بودن تعداد پاسخ‌ها، چندان دور از ذهن نیست که دانش‌آموزان بتوانند الگو را بیابند. مهم‌ترین کشف در دبستان، درک این موضوع است که حاصل‌جمع عدد مخفی شده به‌علاوه عدد اعلام شده برابر با مضربی از ۹ است! اما در پایه‌های بالاتر، در مقابل هر حدس درستی، این امکان وجود دارد که سؤال‌های دیگری که بیان شود:

سؤال۱. چرا عدد مخفی، فاصله حاصل‌جمع از اولین مضرب ۹ (بزرگ‌تر از آن) به‌دست می‌آید؟ دلیل آن چیست؟

سوال۲. فرض کنید به‌جای نوشتن مقلوب آن عدد، جایگشتی دلخواه از رقم‌های عدد اولیه را بنویسیم. آیا حکم مشابه برقرار است؟ (پاسخ مثبت است!)

سؤال۳. برای درک این مسئله، چه معلوماتی لازم است؟

سؤال۴. برای برادر یا خواهر کوچک‌تر خود چگونه این مسئله را توضیح می‌دهید؟

سؤال۵. مسئله مشابهی سراغ دارید؟

سؤال۶. در مقابل هر ادعایی که کردند، یک سؤال مدام تکرار می‌شود: ادعای خودتان را ثابت کنید!

هر چند که تنها دانش پایه برای حل این مسئله، اطلاع از **بخش‌پذیری بر ۹** است، اما این‌که چنین معمایی را در چه پایه‌ای می‌توان مطرح کرد، بحث دیگری است. بسیاری از شاگردان، مسئله را برای پایه‌های بالاتر خود مناسب می‌دانستند. یکی از دلایل این داوری، آن بود که از ابتدا ایده‌ای برای حل آن نداشتند. بنابراین معما بسیار دشوار ارزیابی می‌شد. برای انتخاب یک مسئله یا معما، تنها داشتن دانش پایه‌ای کافی نیست. داشتن مهارت‌های مرتبط و توانایی‌های استدلالی یا تجربه پیشین در حل یک مسئله نیز حائز اهمیت است.

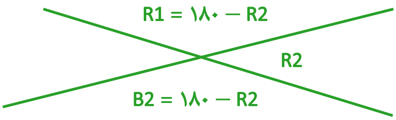
فرصتی برای اکتشاف

یک پرسش می‌تواند برای دانش‌آموزان جذاب یا کسالت‌بار باشد و این به‌روش ارائه آن و نقطه شروع بستگی دارد:

روش نخست. پرسش: نشان دهید دو زاویه متقابل به رأس با هم برابرند. دانش‌آموزان: بعد از اعلام انواع مشوق‌ها برای اولین پاسخ و اصرار برای انجام کار و راهنمایی‌های مکرر معلم بالاخره بعد از ۱۰ دقیقه کار تمام می‌شود و یکی از دانش‌آموزان پای تخته آن را می‌نویسد. دیگر دانش‌آموزان با غرغر، زیرلب می‌گویند: این که معلوم بود!!! و پاسخ را در دفتر خود بازنویسی می‌کنند. (در مجموع نزدیک به ۱۵ دقیقه صرف می‌شود تا کار به پایان برسد).

روش دوم. معلم وارد می‌شود و به دانش‌آموزان می‌گوید: ***تعدادی کارت دارم.*** سپس ۱۵ کارت قرمز و ۱۵ کارت آبی را بدون آنکه چیزی درباره تعداد کارت‌ها بگوید، به‌تصادف بین ۳۰ دانش‌آموزان کلاس پخش می‌کند و می‌گوید: ***اگر طرفدار رنگ کارت خودتان نیستید، می‌توانید کارت خود را با دوستتان عوض کنید.*** و تأکید می‌کند: ***رنگ کارت‌های خود را به من نشان ندهید!*** پس از توزیع کارت‌ها، روبه‌روی کلاس می‌ایستد و به‌ظاهر بر حسب تصادف جای دانش‌آموزان را عوض می‌کند. اما این کار را با هدف گروه‌بندی دانش‌آموزان در دو گروه ۱۵ نفری انجام می‌دهد. سپس می‌گوید: ***حالا تعداد طرفداران قرمز در این گروه با طرفداران آبی در آن گروه برابر شد!*** و از دانش‌آموزان می‌خواهد کارت‌های قرمز گروه اول و کارت‌های گروه دوم را نشان دهند. نتیجه موجب تعجب دانش‌آموزان است. (تا اینجا کمتر از ۵ دقیقه) بعد از چندبار تکرار این بازی، گروهی به شوخی کار را شعبده معرفی کردند! در نهایت دانش‌آموزان با کنجکاوی دست به‌کار شدند. در بحث عمومی، موفق شدند تعداد کارت‌های آبی و قرمز را تعیین کنند. سپس در حین بحث به جمله‌ای که معلم برای جواب می‌گفت توجه کردند: حرفی از تعداد کارت‌ها نیست بلکه معلم به برابری تعداد اشاره می‌کند. دانش‌آموزان پذیرفتند که شعبده‌ای در کار نیست! و موفق شدند دلیل آن را پیدا کنند. بعد از چند بار بازنویسی، نتیجه نهایی به‌اختصار در جدول روبه‌رو نشان داده شد. در این جدول، از عدد ۱۵ در دو نقش مختلف استفاده شده است. در سطر قرمز عدد ۱۵ معرف تعداد کارت‌های قرمز است، در حالی که در سطر آبی عدد ۱۵ به تعداد افراد گروه دوم اشاره دارد. کشف این نکته برای دانش‌آموزان هیجان‌انگیز بود. یکی پرسید اگر تعداد دانش‌آموزان فرد بود چه کار می‌کردید؟ معلم با خنده پاسخی نداد و پرسش بعد را بیان کرد. معلم طوری رفتار می‌کرد که نه تأکیدی بر ارتباط دو پرسش باشد و نه بر بی‌ربط بودن آن‌ها تأکیدی داشت! پرسش با یک جمله کوتاه آغاز شد، ***یک سؤال دیگه! می‌توانید نشان دهید چرا دو زاویه متقابل به رأس با هم برابرند؟*** با این همه، زمان زیادی طول نکشد که دانش‌آموزان ارتباط بین دو پرسش را بیابند و استدلال را در شکل نشان دهند! (مجموع کل کار، حدود ۲۵ دقیقه شد).

	گروه دوم	گروه اول
کارت‌های قرمز	R2	R1 = ۱۵ − R2
کارت‌های آبی	B2 = ۱۵ − R2	



هیجان ناشی از کشف دلیل در بازی کارت‌ها، موجب شد تا دانش‌آموزان نسبت به‌فعالیت‌های کلاس علاقه بیشتری نشان دهند. اجرای همین بازی برای دانشجویان کارشناسی ارشد نیز به همان اندازه هیجان‌انگیز بود. به‌ویژه زمانی که ارتباط آن با زاویه‌های متقابل به رأس آشکار شد.

مسئله حل نشده چوب‌کبریتی

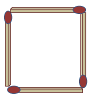
بیشتر دانش‌آموزان بر این باور هستند که ریاضیات توانایی پاسخ به هر پرسشی را دارد. به‌همین دلیل، چیزی به نام **مسئله حل نشده**، برایشان مفهوم ندارد، چه رسد به **مسئله حل نشدنی!** نمی‌توان به انتظار آن باقی‌ماند که در آینده این موضوع برای آن‌ها حل خواهد شد، چرا که در میان بزرگسالان (دانش‌آموزان سابق) هنوز این باور وجود دارد! خارج از مدرسه، آن‌ها فرصتی برای تغییر این باور ندارند. برای ایجاد زمینه مناسب برای تغییر این باور، در خود ریاضیات می‌توان مثال‌هایی یافت. **پرسشی** در کلاس مطرح شد: اگر قواعد یک الگو به کامل و سازگار تعریف شده باشند، آیا آن الگو را می‌توان یافت؟

قواعد یک الگو. برای ساختن یک شکل به هم متصل با چوب‌کبریت، قواعد زیر برقرار است:

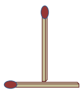
ق۱. هر چوب‌کبریت، به‌صورت افقی یا عمودی قرار می‌گیرد.

ق۲. تنها سر چوب‌کبریت‌ها با هم تماس دارند.

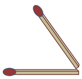
ق۳. چوب‌کبریت‌ها نباید هیچ ناحیه را از صفحه جدا کنند.



نقض ق۳

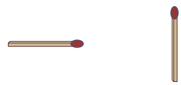


نقض ق۲

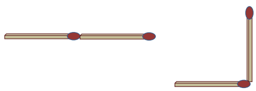


نقض ق۱

اگر با چرخاندن (یا قرینه آینه‌ای) دو شکل روی هم بیافتند، آن دو را **یکریخت** می‌خوانیم. در غیر این صورت آن‌ها را **متفاوت** می‌دانیم. بنابراین، با ۱ چوب‌کبریت، تنها ۱ شکل داریم و با ۲ چوب‌کبریت، ۲ شکل متفاوت به‌دست می‌آید.



دو شکل یکریخت با ۱ چوب‌کبریت



دو شکل متفاوت با ۲ چوب‌کبریت

هم‌چنین پنج شکل متفاوت با ۳ چوب‌کبریت به‌دست می‌آید.

مسئله ۱. پنج حالت ممکن برای ۳ چوب‌کبریت را پیدا کنید.

مسئله ۲. تعداد حالت‌های متفاوت را به‌ازای ۴ و ۵ چوب‌کبریت تعیین کنید.

مسئله ۳. آیا می‌توانید در حالت کلی، تعداد حالت‌های متفاوت را برای n چوب‌کبریت تعیین کنید؟

با حذف شکل‌های یکریخت، به‌سادگی می‌توان پاسخِ سؤال ۱ به‌دست می‌آید. برای سؤال ۲ کمی تلاش بیشتری لازم است، اما در این حالت نیز پاسخ به‌دست می‌آید. اما نه تنها برای سؤال ۳ نمی‌توان پاسخی پیدا کرد، بلکه برای $n = ۱۰$ تعداد ۴۶۵۵ شکل‌های متفاوت وجود دارد، و جالب است بدانید این تعداد را تنها تا $n = ۲۴$ می‌دانیم، که تعداد آن برابر با عدد ۱۲رقمی ۶۵۴۹۹۹۷۰۰۴۰۳ است!! به‌سخن دیگر، مسئله ۳ یک مسئله حل نشده است! بنابراین، پاسخ به پرسشِ کلاس منفی است! یعنی الزامی نیست که داشتن جزییات قوانین ساخت یک الگو، به پیدا کردن الگو کلی، یا شناسایی جمله عمومی آن، منجر شود.

در کلاس مذکور، تجربه دانش‌آموزان در مسئله ۳، فرصت مناسبی برای معلم ایجاد کرد تا برای دانش‌آموزان تفاوت بین **مسئله حل نشده** و **مسئله حل نشدنی** را توضیح دهد.

فصل سوم

بنیادهای نظری حل مسئله

مقدمه

بررسی فرایند حل مسئله، یکی از مباحثی است که مورد توجه آموزشگران ریاضی است. محتوای این فصل، به‌تنهایی می‌تواند کتابی حجیم باشد، اما به‌ضرورت ارائه راهکارهای عملی، به‌صورت مختصر ارائه شده است:

بخش نخست، به چارچوبی اختصاص دارد که شونفیلد (۱۹۸۵) آن را معرفی کرده است.

در بحث کنترل (به‌عنوان یکی از حوزه‌های مرتبط با دانش و رفتار حل مسئله)، استفاده از دانش فراشناختی و سه راهبرد اصلی آن توصیه می‌شود. در بخش دوم، این سه راهبرد و راهکارهای عملی آن معرفی شده‌اند.

در بخش سوم، ضمن معرفی چند ویژگی اصلی برای بررسی عملکرد دانش‌آموزان در حین حل مسئله، برای هر یک از این ویژگی‌ها، پرسش کلیدی برای کمک به ارزیابی معلم از این عملکرد بیان شده است.

در بخش چهارم، مدل پولیا (۱۹۴۵) برای حل مسئله‌های ریاضی به اختصار بیان شده است. این مدل به تجزیه و تحلیل کار یک مسئله‌حل‌کن خبره، حین حل مسئله ریاضی اختصاص دارد.

در پایان (بخش پنجم)، خلاصه‌ای از تمام توصیه‌های کتاب تکرار و البته تکمیل شده‌اند. این بخش می‌توانست به‌عنوان فصلی مستقل در کتاب قرار گیرد، و حاوی یک جمع‌بندی جامع باشد، لیکن اختصاص یک فصل به آن، برای این کتاب کوچک، اغراق‌آمیز بود. به همین سبب به این مختصر اکتفا شد.

لازم به ذکر است، مطالب چهار بخش نخست این فصل، برگرفته از کتاب **مبانی آموزش ریاضی** (رضائی، ۱۳۹۶) است. هر چند، کتاب مذکور برای دانشجومعلمان دوره ابتدایی و آموزگاران دبستان تدوین شده است، لیکن مبانی نظری آن، محدود به دوره ابتدایی نیست و با پیش‌نیازهای نظری برای دوره‌های بالاتر مشترک است.

انتظار می‌رود معلمان با استفاده از تجربیات خود و با توجه به امکان تبادل تجربه با دیگر همکاران، به ارتقای حرفه‌ای خود کمک کنند. هم‌چنین، مراجعه و مطالعه منابع معرفی شده در پایان کتاب، سودمند است. استفاده از مقاله‌های پرشمار **مجله رشد آموزش ریاضی**، با تأکید بر شماره‌های ۴۶ تا ۱۳۲ (پاییز ۱۳۷۵ تا بهار ۱۳۹۸) توصیه می‌شود که حاوی مقاله‌های ارزشمند نظری، بیان تجربه‌های عملی، آرای اندیشمندان حوزه آموزش ریاضی، و مباحث متنوع دیگر در این حوزه است.

۳-۱- چارچوب بررسی فرایند حل مسئله ریاضی

«آموزش حل مسئله» و «آموزش از طریق حل مسئله»، دو موضوع متفاوت اما مرتبط به هم، در آموزش ریاضی هستند. انتخاب روش یاد دادنِ یک مفهوم ریاضی به یادگیرنده، متأثر از چگونگی نگاه به انسان، تبیین چیستی ریاضی و بالاخره، تعیین هدف برای آموزش ریاضی است. آموزشگران ریاضی معتقدند که یکی از هدف‌های اصلی آموزش ریاضی، پرورش شهروندانی مستقل، آزاد، مسئولیت‌پذیر، خلاق و مسئله حل‌کن است، و «آموزش از طریق حل مسئله»، یکی از روش‌های دست‌یابی به چنین هدفی است (گویا، ۱۳۷۵). اما این که یک مسئله ریاضی «چگونه» حل می‌شود، مبحث دیگری است. پولیا در کتاب **چگونه حل کنیم؟** به مراحل حل یک مسئله ریاضی اشاره کرده و فهرستی از رهیافت‌های حل مسئله ریاضی را ارائه می‌کند.

بسیاری از پژوهشگرانِ آموزش ریاضی، به بررسی شیوه‌های آموزش حل مسئله پرداخته‌اند. به‌طور مثال، یکی از پرسش‌های پژوهشی چنین بوده است که آیا می‌توان ریاضی و ریاضی‌گونه فکر کردن را به دانش‌آموزان یاد داد؟ چه مشکلات و مسئله‌هایی در ارتباط با آموزش ریاضی وجود دارد که باید مورد بحث و بررسی بیشتر قرار گیرد؟ آیا حل مسئله ریاضی، یاد دادنی و یاد گرفتنی است یا هر کس که ریاضی بداند، به خودی خود مسئله حل‌کن هم می‌شود؟ برای پاسخ‌گویی به این نوع پرسش‌ها، شناخت ماهیت تفکر ریاضی و تجزیه و تحلیل فرایند حل مسئله ریاضی توسط مسئله حل‌کن‌های خبره توصیه شده است.

شونفیلد (۱۹۸۵) در کتاب **حل مسئله ریاضی**، به تفصیل به این موضوع پرداخته است و شیوه‌های عملی برای انجام این بررسی را نیز ارائه کرده است. شونفیلد در این کتاب، چهار حوزه مرتبط با دانش و رفتار حل مسئله (برای مسئله حل کن تازه‌کار یا خبره) را برای بررسی فرایند حل مسئله ریاضی، ضروری می‌داند، که به دلیل اهمیت آن، اشاره مختصری به آن‌ها می‌شود.

۱) منابع

برای تجزیه و تحلیل فرایند حل مسئله توسط یک مسئله حل‌کن، و برای فهم سیر تکامل راه حل مسئله، نخست لازم است بدانیم که آن مسئله حل‌کن در ابتدا، چه ابزارها یا اطلاعات اولیه‌ای در اختیار داشته است. این اطلاعات اولیه منابع نامیده می‌شوند. منابع در واقع، مجموعه‌ای از چیزهایی است که مسئله حل‌کن می‌داند، باور دارد، یا به آن‌ها بدگمان است. حتی لازم است بدانیم که مسئله حل‌کن این مطالب را چگونه سازمان‌دهی کرده و در مغز خود ذخیره کرده است، و سپس چگونه به آن‌ها دسترسی پیدا می‌کند. منابع را می‌توان در چهار دسته اصلی قرار داد:

- **اول،** حقایق مرتبط با موضوع مسئله، و درجه دانش فرد نسبت به آن‌ها است؛ مانند استفاده از رویه‌های (procedure) صوری یا شهودی حاصل از تجربه درباره اشیای ریاضی و موضوعِ مسئله.
- **دوم،** رویه‌های الگوریتمی که رویه‌هایی کاملاً مشخص هستند و در عین حال، دارای ماهیت سلسله مراتبی می‌باشند؛ مانند ترسیم‌های هندسی (ترسیم نیمساز) یا محاسبات جبری (حل معادله درجه دو).

- **سوم**، رویه‌های عادی که آن‌ها نیز رویه‌های مشخصی هستند، لیکن الگوریتم کلی ندارند و بنابر نوع مسئله، باید پارامترهای دخیل در رویه را مشخص کرده و پس از آن، طبق روشِ معلوم، مسئله را حل کرد. مانند روش حل یک معادله (دلخواه)؛ یا انتگرال‌گیری به روش جزبه‌جز.
- **چهارم**، قابلیت‌های مرتبط به موضوع، مانند توانایی استدلال هندسی و تجسم فضایی.

۲) رهیافت‌ها

رهیافت‌ها (heuristic) در حل مسئله انسانی در حوزه‌های مختلف ازجمله ریاضی و هوش مصنوعی، مورد استفاده قرار می‌گیرند. به گفته پولیا در **چگونه حل کنیم**، رهیافت‌ها «ابزارهای کشف» هستند.

ایده راهبردهای رهیافتی، قوانین سرانگشتی برای حل موفق مسئله، و شامل پیشنهادهای عمومی هستند که به درک و فهم بهتر مسئله یا پیشرفت در رسیدن به پاسخ کمک می‌کنند. مثال‌هایی از این رهیافت‌ها که در کتاب پولیا و در «واژه‌نامه کوچک راهبردها» به آن‌ها اشاره شده، عبارتند از:

- استفاده از عناصر کمکی در مسئله
- جست‌وجو برای مسئله مرتبط
- کار روی مسئله‌های کمکی
- رسم شکل
- حدس و آزمون
- تعمیم (جست‌وجو برای پیدا کردن یک الگو)
- تهیه فهرست نظام‌دار
- تخصیص (حل مسئله ساده‌تر)
- تهیه یک جدول
- استفاده از اثبات غیرمستقیم
- حذف حالت‌های نامطلوب
- تغییر مسئله
- مسئله را حل شده فرض کردن (به‌ویژه در مسئله‌هایی که در آن به‌دنبال وجود یا یافتن یک شئ هستیم)

۳) کنترل

این مقوله، به چگونگی استفاده از اطلاعات بالقوه‌ای که شخص در اختیار دارد، مربوط می‌شود، به‌خصوص، تصمیمات کلیدی و مهمی که ضمن فرایند حل مسئله و درباره آنچه باید در مسئله انجام داد، گرفته می‌شود. این تصمیمات ممکن است موجب موفقیت در حل مسئله یا شکست در تلاش برای رسیدن به پاسخ مسئله شوند. فعالیت‌هایی که در این سطح مورد نظر هستند، عبارتند از:

- کشیدن طرح
- بازبینی و وارسی راه حل در تمام مدتِ حل مسئله
- انتخاب هدف‌ها و زیرهدف‌ها
- ارزیابی پاسخ‌ها در همه مراحل تکامل آن‌ها
- زمانی که ارزیابی نشان می‌دهد پاسخی باید اصلاح شود یا کنار گذاشته شود **و بالاخره**
- شکار فرصت‌ها و فرصت‌طلبی (نه به‌معنای منفی، آن بلکه به‌معنی استفاده از فرصت‌ها و ایده‌های مناسبی که طی فرایند حل مسئله به ذهن می‌رسد).

۴) نظام باورها

باورهای اشخاص عمدتاً ناشی از تجرید تجربه‌های به دست آمده از محیط واقعی آن‌ها است و این باورها، ازجمله عوامل مهم و تأثیرگذار در حل مسئله ریاضی هستند. به‌طور مثال، باور افراد نسبت به تفکر ریاضی در چگونگی اقدام آن‌ها به حل مسئله و نوع فعالیت‌های آن‌ها، نقش اساسی دارد. مثلاً بعضی از دانش‌آموزان که به خوبی از عهده اثبات قضیه‌های هندسه برمی‌آیند، در حل مسئله‌های هندسی، تبدیل به تجربه‌گرایانِ محض می‌شوند که استدلال هندسی را به‌عنوان ابزاری برای کشف و حل مسئله‌های هندسی، باور ندارند.

بنابراین، منابع و رهیافت‌ها و کنترل، به تنهایی نمی‌توانند در رده‌بندی و مشخص کردن ویژگی‌های مسئله حل‌کن‌ها، کافی باشند و نظام باورها نیز به‌عنوان مقوله‌ای از دانش در این امر، مؤثر است. باورهای ما در اثر عوامل متعددی مانند تدریس مدرسه‌ای، تجربه از محیط اطراف، شهود و نوع تفکر ریاضی، شکل می‌گیرند و از آن جا که به تدریج و به مرور زمان شکل گرفته‌اند، تغییر آن‌ها کار چندان ساده‌ای نیست!

زمانی که شخص با مسئله‌ای مواجه می‌شود، در ابتدا، دانش بالقوه‌ای مرتبط با موضوع مسئله در اختیار دارد. البته ممکن است این دانسته‌ها یا باورها، غلط باشند. مثلاً ممکن است فرد بداند که مساحت‌های دو شکل متشابه دارای نسبت ثابتی است ولی این نسبت را اشتباهاً برابر با نسبت تشابه (به‌جای مجذور آن) بگیرد. این دانسته‌ها و رهیافت‌ها که در ابتدا، به فهم و درک شخص از مسئله کمک می‌کنند، در ادامه نیز در طرح راه حلی برای مسئله و چگونگی اجرای آن نیز مؤثرند. در تمام این مراحل، تصمیم‌گیری‌هایی لازم است که این تصمیمات نیز ممکن است درست یا غلط باشند و موجب موفقیت یا شکست در حل مسئله شوند.

باید توجه داشت که وجود بالقوه دانسته‌ها و راهبردها، در واقع در مقوله منابع و رهیافت‌ها می‌گنجد، اما زمانی که صحبت از تصمیم‌گیری برای انتخاب راهبرد مناسب یا حقیقتی متناسب با مسئله برای فهم آن است، در واقع در سطح کنترل هستیم. بنابراین، مقوله کنترل به چگونگی استفاده از دانسته‌های فرد توسط خودش می‌پردازد و دانسته‌های فرد را مورد بررسی قرار نمی‌دهد. برای مثال، زمانی که مسئله حل‌کن با وجود داشتن منابع دانشی کافی، در حل مسئله‌ای شکست می‌خورد، توانایی استفاده از منابع دانشی خود را ندارد، این عدم‌توانایی یا عدم‌دسترسی به موقع به منابع، در مقوله کنترل مورد بررسی قرار می‌گیرد. با این حال تفکیک مقوله منابع و کنترل، از لحاظ کیفی و در فرایند حل مسئله، واقعاً دشوار است.

در بحث کنترل، برای انواع تصمیم‌گیری‌ها از دانش فراشناختی استفاده می‌شود و برای ارتقای دانش فراشناختی دانش‌آموزان، استفاده از **سه راهبرد فراشناختی** زیر، در حین حل مسئله ریاضی، مفید است:

- **کار در گروه‌های کوچک،**
- **بحث همگانی در کلاس،**
- **نوشتن بازتابی (ژورنال‌نویسی).**

در عمل، چگونگی اجرای هر یک از این سه راهبرد، به باورهای معلم نیز بستگی دارد. دادن فرصت کافی به دانش‌آموزان، می‌تواند به ارتقای توانایی آنان در حل مسئله بیانجامد. معلم باید بدون نگرانی از زمان صرف شده، تلاش کند تا اعتماد دانش‌آموزان جلب شود و با ارائه تمرین‌های غنی و مسئله‌های چالش‌برانگیز، آنان را به کار بیشتر تشویق کند تا زمان صرف شده نیز جبران شود. در ادامه، به اختصار این سه راهبرد را مرور می‌کنیم.

۳-۲- سه راهبرد فراشناختی

کار در گروه‌های کوچک

پژوهش‌های متعددی در زمینه نقش گروه‌های کوچک در یادگیری ریاضی وجود دارد. این پژوهش‌ها، همگی به نوعی از گروه‌های کوچک در کارهای خود استفاده کرده‌اند. اما نوع و ماهیت گروه‌ها دارای تنوع زیادی است. با این حال، ایده‌های ویگوتسکی (۱۹۷۶) توجیهی قوی برای نقش گروه‌های کوچک در توسعه ذهنی دانش‌آموزان است. ویگوتسکی معتقد بود که مشارکت با دیگران به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا به «دامنه توسعه تقریبی» برسند. وی توضیح داد که دانش‌آموز ممکن است تا سطح مشخصی کارکرد داشته باشد. اما همکاری مشارکتی با دیگرانی که از او تواناتر هستند، ممکن است به او کمک کند تا در سطح بالاتری کارکرد پیدا کند. در واقع، توانایی بالقوه‌ای که کودک دارد می‌تواند با کمک و همکاری دیگران (و نه در خلأ) بارور شود که همان «دامنه توسعه تقریبی» است. کار در گروه‌های کوچک، اگر با مداخله برنامه‌ریزی‌شده معلم و راهنمایی و نظارت او انجام شود، توانایی‌های فراشناختی یادگیرندگان را بالا می‌برد (گویا، ۱۳۷۷).

کار در گروه‌های کوچک، یکی از مؤلفه‌های اصلی آموزش و حل مسئله است. دانش‌آموزان حین کار گروهی یاد می‌گیرند تا بر کارهای خود نظارت داشته باشند و ارزیابی درستی از آن‌ها داشته باشند. زمانی که دانش‌آموزان در گروه‌های کوچک مشغول فعالیت حل مسئله هستند، معلم باید اطمینان حاصل کند که تک تک آن‌ها، درگیر فعالیت ریاضی شده‌اند و هر کس، مسئولیت خود را می‌شناسد و به آن عمل می‌کند. قرار دادن کودکان در گروه‌های سه یا چهار نفره برای کار روی یک مسئله، راهبردی بسیار مفید برای تشویق و حمایت از بحث‌ها و تعامل پیش‌بینی شده در یک جمع ریاضی است. کلاسی که به‌صورت گروه‌های کوچک تنظیم شده است، زمان خیلی بیشتری برای تعامل و بحث صرف می‌کند تا کلاسی که در آن همه دانش‌آموزان به‌طور منفرد یک کل را تشکیل می‌دهند. کار گروهی، به کودکان اجازه و قدرت بیشتری برای صحبت کردن، کشف ایده‌ها، توضیح چیزهایی به گروه خود، پرسیدن و یاد گرفتن از همدیگر، استدلال کردن و داشتن ایده‌های شخصی خواهد داد.

اما بیش از همه (و حتی پیش از همه) باید تأکید شود که باور خود معلم به کارآمدی این روش و ابتکار عمل وی در اجرای کار گروهی حائز اهمیت است. حتی در بهترین شرایط اجرایی، نقش معلم در اثربخش بودن کار گروهی انکارناپذیر است. شاید انجام ندادن فعالیت گروهی، به‌مراتب بهتر از اجرای ناقص و بی‌انگیزه آن باشد.

تعداد دانش‌آموزان کلاس، زمان مورد نظر برای فعالیت‌های گروهی؛ ماهیت وظیفه‌ای که به گروه محول می‌شود؛ و حتی ویژگی‌های فیزیکی کلاس؛ و مانند آن‌ها، هر یک می‌تواند عاملی مؤثر در گروه‌بندی و انتخاب اعضای گروه باشد. برای انجام فعالیت‌های گروهی، سه رویکرد مختلف وجود دارد:

- یادگیری تشریک مساعی (Cooperative Learning)
- یادگیری مشارکتی (Collaborating Learning)
- یادگیری مسئله محور (Problem-Based Learning)

یادگیری تشریک مساعی

در مقایسه با سایر رویکردها، یادگیری تشریک مساعی یکی از قدیمی‌ترین انواع یادگیری گروهی است (دیویدسن، ۲۰۱۴). در این نوع یادگیری، دانش‌آموزان در گروه‌های کوچک با یکدیگر کار می‌کنند. کوچک بودن گروه برای آن است که هر فرد فرصت شرکت در کار دسته‌جمعی داشته باشد. به‌علاوه از دانش‌آموزان انتظار می‌رود بدون نظارت مستقیم معلم به وظایف خود عمل کنند. یادگیری تشریک مساعی شامل طیف وسیعی از راهبردها برای ارتقای یادگیری مدرسه‌ای از طریق مشارکت و ارتباط با هم‌سالان است.

همان‌طور که از اصطلاح «یادگیری تشریک مساعی» برمی‌آید، در این نوع یادگیری، دانش‌آموزان به یکدیگر کمک می‌کنند، ایده‌ها و منابع را به اشتراک می‌گذارند، و به‌طور مشترک تصمیم می‌گیرند که چگونه و چه چیزی را مطالعه کنند. در این موقعیت، معلم به‌جای ارائه رویه‌ها و دستورهای خاصی به دانش‌آموزان، آن‌ها را در فرایند کسب دانش راهنمایی می‌کند. در یادگیری تشریک مساعی، یادگیری فعال و یادگیری اجتماعی از طریق تعامل در گروه‌های کوچک با هم ترکیب شده است. به گفته دیویدسون و ورشام (۱۹۹۲) فرایند یادگیری تشریک مساعی برای درگیر کردن فعالانه دانش‌آموز از طریق پرسش و بحث با هم‌سالان در گروه‌های کوچک در فرایند یادگیری، طراحی شده است. یادگیری تشریک مساعی فراتر از این است که فقط دانش‌آموزان در گروه‌هایی باشند و به آن‌ها بگوییم که با یکدیگر گفت‌وگو کنند.

برای شروع، معلم می‌تواند نمایی از کار را برای دانش‌آموزان توضیح دهد و مسئله‌هایی برای کار گروهی طرح کند. کلاس به گروه‌های کوچکی تقسیم شود که به‌طور معمول می‌تواند هر گروه چهار عضو داشته باشد. انتظار می‌رود معلم همه دانش‌آموزان را به بحث درباره ایده‌ها در گروه‌های خودشان دعوت کند و دانش‌آموزان با مشارکت فعال در گروه، برای روشن ساختن درک خود، تفکر و استدلال کردن، حل مسئله‌ها، حدس زدن و آزمایش آن، فعالیت کنند. در این حالت، آن‌ها به‌طور فعال ایده‌های خود را تبادل می‌کنند و به یکدیگر در یادگیری کمک می‌کنند. معلم نقش فعالی دارد. وی بین گروه‌ها حرکت می‌کند و آن‌ها را راهنمایی و تشویق می‌کند و در صورت لزوم، پرسش‌های تأمل‌برانگیزی مطرح می‌کند. در هر گروه، وظایف اعضا تعیین می‌شود. تمام تمرکز این رویکرد بر آن است که همه دانش‌آموزان به‌جای این که مسئله‌ها را به تنهایی حل کنند، **در تعامل با یکدیگر** به فعالیت بپردازند.

به گفته دیویدسون پنج ویژگی زیر، اهمیت تعامل با یکدیگر را نشان می‌دهند که در تمام روش‌های یادگیری تشریک مساعی مشترک هستند:

۱- یک فعالیت یادگیری مناسب برای کار گروهی،

۲- تعامل یک به یک دانش‌آموزان در گروه،

۳- مسئولیت‌پذیری فردی،

۴- وابستگی متقابل برای تقویت همکاری در بین گروه‌ها،

۵- همکاری و رفتار متقابل سودمند بین دانش‌آموزان.

به نقل از جانسون، جانسون و اسمیت (۱۹۹۸) یادگیری تشریک مساعی پنج عنصر کلیدی دارد: وابستگی متقابل مثبت؛ تعامل رو در روی افراد؛ مسئولیت‌پذیری فردی و گروهی؛ توسعه مهارت‌های گروهی؛ و پردازش گروهی. فعالیت‌های یادگیری تشریک مساعی را می‌توان در تمام سطوح طبقه‌بندی بلوم یعنی دانش؛ فهم؛ کاربرد؛ تجزیه و تحلیل؛ ترکیب، و ارزشیابی طراحی کرد. به‌طور خاص، ارتباط بسیار قوی بین یادگیری تشریک مساعی و توسعه مهارت‌های تفکر مرتبه بالاتر وجود دارد. هدف اصلی یادگیری تشریک مساعی، کمک به دانش‌آموزان در یادگیری محتوای علمی است.

راهکارهایی برای یادگیری تشریک مساعی

❖ **تفکر، کار دو به دو، تبادل (Think-Pair-Share)** (لیمان، ۱۹۹۲)

این راهکار غنی، بر اساس چگونگی فکر کردن، کار دو به دو و به اشتراک گذاشتن پاسخ‌ها تغییر می‌کند.

۱. مدرس به طرح یک سؤال بحث‌برانگیز می‌پردازد و به دانش‌آموزان زمان می‌دهد تا به پاسخ سؤال به‌صورت انفرادی فکر کنند. این زمان برای فکر کردن ممکن است صرف نوشتن نیز شود.

۲. دانش‌آموزان به‌صورت دو نفره درباره پاسخ‌هایشان گفت‌وگو می‌کنند.

۳. سپس دانش‌آموزان در گروه‌های بزرگ‌تر یا کل کلاس به بحث می‌پردازند.

❖ **تبادل متقابل ایده‌ها (Timed Pair Share)** (کاگان و کاگان، ۲۰۰۹)

هدف اصلی، تبادل نظر و تمرینی برای گوش کردن، نقد (مثبت) نظر دیگران، طرح ایده‌های جدید است.

۱. معلم موضوعی را در کلاس مطرح می‌کند و مدت زمان لازم برای فکر کردن و به اشتراک گذاشتن ایده‌ها را تعیین می‌کند.

۲. در گروه‌های دوتایی، نفر اول ایده‌هایش را بیان می‌کند و نفر دوم گوش می‌دهد.

۳. نفر دوم با بیانی مثبت، درباره ایده او نظر می‌دهد.

۴. اعضای گروه، نقش خود را جابه‌جا می‌کنند.

❖ **مصاحبه در سه گام (Three-Step Interview)** (کاگان و کاگان، ۲۰۰۹)

راهکار مصاحبه برای ارتقای توانایی‌های گوش دادن، تبادل نظر، و استدلال کردن به‌کار می‌رود.

۱. دانش‌آموزان گروه‌های دو نفره تشکیل می‌دهند و یکی از دانش‌آموزان در یک محدوده زمانی معین با دیگری به مصاحبه می‌پردازد.

۲. دانش‌آموزان نقش‌های خود را جابه‌جا می‌کنند.

۳. گروه‌های دو نفره با هم ترکیب می‌شوند و گروه‌های ۴ نفره تشکیل می‌دهند و اعضای گروه به بحث و تبادل اطلاعات یا ایده‌های به‌دست آمده از مصاحبه اولیه می‌پردازند.

یادگیری مشارکتی

واژه مشارکتی به معنی تلاش کردن برای هدفی یکسان است ولی لزومی ندارد مشارکت در فعالیت‌های یکسان باشد. تعریف‌هایی که برای یادگیری مشارکتی ارائه شده، نه تنها به توصیف اهمیتِ فعالیت جمعی دانش‌آموزان در گروه می‌پردازد، بلکه بیانگر نوعی کار گروهی است که معلم نیز در تلاش برای توسعه دانش است.

یادگیری مشارکتی زمانی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان و معلمان با هم برای تولید دانش فعالیت می‌کنند. یادگیری مشارکتی زمینه اجتماعی را فراهم می‌کند که دانش‌آموزان بتوانند در آن گفت‌وگوهایی تجربه و تمرین کنند که توسط معلمان مورد سنجش قرار می‌گیرند. بنابراین، برخلاف یادگیری تشریک مساعی که بر کار کردن وابسته به همدیگر تمرکز دارد، در یادگیری مشارکتی تمرکز بر کار کردن در کنار یکدیگر است که لزومی ندارد وابسته به هم برای رسیدن به هدفی یکسان به سوی کشف، فهم و تولید دانش باشد. اجرای گروه موسیقی زنده، مثالی شناخته شده از یک برنامه مشارکتی در دنیای واقعی است. هر کسی به نواختن ساز خود مشغول است اما هر چند جداگانه، اما با مشارکت هم نوای موسیقی به گوش می‌رسد.

در رویکرد یادگیری مشارکتی، در گروه‌های دو نفره یا بیشتر، به‌دنبال درک، راه حل‌ها، مفاهیم و تولید دانش هستند. تنوع بسیار گسترده‌ای در فعالیت‌های یادگیری مشارکتی وجود دارد و در این رویکرد تمرکز بر کشف دانش‌آموزان است، و نه سخنرانی معلم و انتقال دانش او. همه دانش‌آموزان کلاس در فعالیت‌ها شرکت دارند. هدف رویکرد یادگیری مشارکتی، ساخت دانش توسط دانش‌آموزان از طریق تعامل با یکدیگر است.

راهکارهایی برای یادگیری مشارکتی

فارستال (به نقل از بروباچر و همکاران، ۱۹۹۰) پنج مرحله زیر را برای فرایند یادگیری مشارکتی ارائه می‌کند:

درگیر شدن: در این مرحله از فرایند یادگیری مشارکتی، دانش‌آموزان اطلاعات را دریافت می‌کنند و با آن درگیر می‌شوند. می‌تواند از طریق سخنرانی، متن، ویدئو و چیزهایی شبیه این‌ها به دانش‌آموزان عرضه شوند.

کشف: دانش‌آموزان فرصتی پیدا می‌کنند تا به کنکاش اطلاعات بپردازند. در این مرحله، دانش‌آموزان می‌توانند خطا کنند، ایده‌پردازی کنند و شاید به‌طور کامل نیز موضوع را درک نکنند.

تبدیل: از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا روی اطلاعات کار کنند تا نسبت به آن درک بهتری پیدا کنند. نقش معلم در این مرحله کنترل یادگیری دانش‌آموزان به‌منظور بررسی بدفهمی‌ها یا ارائه اطلاعات بیشتر است.

ارائه: از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا به ارائه یافته‌های خود در حضور مخاطبان علاقه‌مند و نقاد بپردازند. ارائه‌های گروهی نیز در حضور کلاس یا گروه‌هایی از دانش‌آموزان قابل انجام هستند.

بازتاب: با بازنگری به آن‌چه که یاد گرفته‌اند و فرایندی که طی کرده‌اند، دانش‌آموزان درک عمیق‌تری از محتوا و فرایند یادگیری توسط خودشان به‌دست می‌آورند.

یادگیری مسئله محور

کلاسی که یادگیری در آن بر پایه حل مسئله است، دانش‌آموزان قبل از این که تمام اطلاعات ضروری و مرتبط با مسئله را برای پاسخ دادن به آن دریافت کنند، با مسئله روبه‌رو می‌شوند. دانش‌آموزان به‌صورت گروهی شروع به‌کار می‌کنند تا ماهیت مسئله را تعریف کنند و به شناسایی منابع اضافی مورد نیاز و یافتن پاسخ‌های مناسب بپردازند. معلم نقش تسهیل‌کننده را ایفا می‌کند، دانش‌آموزان را راهنمایی و فرایندهای گروه را کنترل می‌کند.

در رویکرد یادگیری مسئله محور، از مسئله‌های پیچیده دنیای واقعی به‌منظور ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان برای شناسایی مفاهیم و اصولی استفاده می‌شود که برای کار کردن روی مسئله‌های ارائه شده و یافتن پاسخ آن‌ها مورد نیاز است. یادگیری مسئله محور، توانایی شناخت اطلاعاتی را پرورش می‌دهد که برای یک مسئله خاص مورد نیاز است، و چگونگی دستیابی به آن اطلاعات، چگونگی سازماندهی آن اطلاعات در یک چارچوب مفهومی معنادار و نحوه برقراری ارتباط با سایر موضوعات مورد توجه است (داچ، گرو و آلن، ۲۰۰۱).

باروز (۱۹۸۶) ویژگی‌های رویکرد یادگیری مسئله محور را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

- **مبتنی بر حل مسئله:** یک مسئله دنیای واقعی به‌عنوان یک کاتالیزور در یادگیری است.
- **بین‌رشته‌ای:** از آن‌جایی که مسئله دنیای واقعی است، رشته‌ها و نظام‌های مختلفی را پوشش می‌دهد.
- **قابل اعتماد:** مسئله موقعیتی را ایجاد می‌کند که شبیه آن چیزی است که دانش‌آموزان در دنیای واقعی می‌بینند. به این ترتیب، یادگیری قابل اعتماد است، و دانش‌آموزان به‌راحتی ارتباط و اهمیت آن را درمی‌یابند.
- **انگیزشی:** یکی از اهداف این یادگیری، ایجاد موقعیتی است که انگیزه یادگیری در دانش‌آموزان به‌وجود آورد.
- **دانش‌آموز محور:** دانش‌آموزان مسئول یادگیری خود و دوستان خود هستند.
- **خود راهبر:** دانش‌آموزان خود مسیر فرایند حل مسئله را تعیین می‌کنند.
- **مهارت‌افزایی:** علاوه بر توسعه دانش، این رویکرد به‌طور خاص تلاش دارد تا در توسعه مهارت‌های حل مسئله، تفکر انتقادی و مهارت‌های تیمی، دانش‌آموزان را یاری کند.
- **مشارکتی:** گروه‌ها، برای به‌دست آوردن پاسخ مسئله کار می‌کنند.
- **بازتابی:** گروه‌های دانش‌آموزی بر یادگیری صورت گرفته، بازتاب می‌دهند و به یکپارچگی آن کمک می‌کنند.

هدف از این رویکرد، علاوه بر تقویت مهارت‌های حل مسئله و مشارکتی، امکان توسعه دانش محتوایی توسط دانش‌آموز و نگهداری طولانی مدت از آن است. یادگیری مسئله‌محور، ازجمله رویکردهایی است که کاربرد زیادی در آموزش مدسه‌ای دارد. بسیاری از معلمان با بهره‌گیری از این روبکرد کلاس خود را فعال نگه می‌دارند و برای این منظور از مسئله‌های غنی استفاده می‌کنند.

روش‌هایی برای کار گروهی

❖ گروه‌های همهمه (Buzz groups)

هدف: تولید ایده‌ها، ایجاد انگیزه و برانگیختن علاقه دانش‌آموزان، سنجش درک دانش‌آموزان.

این گروه شامل دانش‌آموزانی است که در پاسخ به یک پرسش در بحث‌های غیررسمی و کوتاه درگیر می‌شوند. در لحظه‌ای کوتاه، دانش‌آموزان به‌طرف یک تا سه نفر از کنار دستی‌های‌شان می‌چرخند و به بحث درباره هر مشکلی در فهم و درک موضوع، پاسخ به یک پرسش طرح شده، تعریف مفاهیم کلیدی، یا بیان مثالی در مورد آن‌ها و حدس زدن درباره آن‌چه که در ادامه، در کلاس اتفاق خواهد افتاد، می‌پردازند. در بهترین بحث و گفت‌وگوها، دانش‌آموزان راجع به محاسن، ارتباط و سودمندی جنبه‌ای از سخنرانی به قضاوت می‌پردازند. برای مثال، پرسشی مانند: «چه ادعای دور از ذهن و غیرقابل پیش‌بینی در سخنرانی امروز شنیدید؟» شروعی است که به‌دنبال آن همه گروه‌ها در بحثی کلی، ایده‌ها و پرسش‌هایی که در گروه‌شان به‌وجود آمده، در کلاس به اشتراک می‌گذارند.

- این روش بسیار انعطاف‌پذیر است. به‌راحتی در هر اندازه‌ای از کلاس و حتی در یک سالن قابل پیاده‌سازی است. می‌توانید با خاموش و روشن کردن چراغ‌ها، همه را به شرکت در بحث همگانی در کلاس دعوت کنید!

❖ تفکر ـ کار دو به دو ـ تبادل (Think-pair-share)

هدف: تولید ایده‌ها، افزایش اعتمادبه‌نفس دانش‌آموز برای پاسخ به پرسش‌ها، ترغیب دانش‌آموز به مشارکت وسیع.

این روش دارای سه مرحله است: در آغاز، دانش‌آموزان به‌طور جداگانه در مورد یک سؤال مشخص فکر می‌کنند. سپس به‌صورت دو نفره درباره ایده‌های خود به بحث و مقایسه می‌پردازند. در آخر، فرصت به اشتراک گذاشتن ایده‌ها در بحث کلی در کلاس را خواهند داشت.

- این روش کار گروهی، همه دانش‌آموزان را به تلاش برای دادن پاسخی مقدماتی به یک پرسش وادار می‌کند که در جریان همکاری با یکدیگر شرح و بسط داده می‌شود. هم‌چنین این فرصت را به آن‌ها می‌دهد که پیش از آن که ایده‌هایشان را در یک گروه بزرگ مطرح کنند، در گروه‌های کوچک به بررسی اعتبار ایده‌هایشان بپردازند. این امر به دانش‌آموزانی که خجالتی هستند، برای شرکت در بحث‌ها اعتمادبه‌نفس بیشتری می‌دهد.

❖ محفل گفت‌وگو (Circle of voices)

هدف: تولید ایده‌ها، توسعه مهارت‌های شنیداری، مشارکت همه دانش‌آموزان، فراهم کردن محیط یادگیری برابر.

فرصت صحبت کردن برای همه دانش‌آموزان فراهم است. دانش‌آموزان در گروه‌های چهار یا پنج نفره و به شکل دایره کنار هم می‌نشینند. به دانش‌آموزان موضوعی داده می‌شود و چند دقیقه به آن‌ها اجازه می‌دهند تا افکار خود را پیرامون آن سازماندهی کنند. سپس بحث آغاز می‌شود. هر دانش‌آموز به مدت مشخصی (برای مثال ۳ دقیقه) زمان دارد تا در مورد ایده‌هایش صحبت کند و در این مدت هیچ دانش‌آموز دیگری اجازه صحبت ندارد. بعد از این که همه یک بار صحبت کردند، فرصت بحث در گروه خود را دارند. لازم به ذکر است در این زمان دانش‌آموزان باید به توسعه و بررسی ایده‌های مطرح شده بپردازند، نه معرفی ایده‌های جدید.

- در این روش ممکن است دانش‌آموزان خجالتی هنگام صحبت کردن احساس راحتی نکنند. می‌توانید به هر فرد یک نظر خاص یا نقل قولی را پیشنهاد دهید تا راجع به آن صحبت کند یا موضوع را خاص‌تر و مرتبط‌تر نماید. این‌کار موجب می‌شود تا ترس آن‌ها کمتر شود. در این روش، دانش‌آموزان ترغیب می‌شوند به صحبت‌های یکدیگر با دقت بیشتری گوش کنند. تنوع نظر ممکن است در بیان دوباره نظر دانش‌آموز قبلی یا توضیح درباره ارتباط نظر وی با صحبت‌های دانش‌آموز قبلی باشد.

❖ چرخش سه‌تایی (Rotating trios)

هدف: تولید ایده‌ها، معرفی دانش‌آموزان به بسیاری از هم‌سالان.

در این روش، تعداد زیادی از دانش‌آموزان با یکدیگر بحث می‌کنند. برای این‌کار، از قبل سؤال‌های این گفت‌وگو آماده می‌شوند. در کلاس دانش‌آموزان گروه‌های سه نفره تشکیل می‌دهند و در یک گروه دایره‌ای یا مربع شکل بزرگ قرار می‌گیرند. سؤالی را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و برای هر فرد فرصتی برای پاسخگویی در نظر بگیرید. بعد از یک زمان مناسب، از گروه‌های سه نفره بخواهید اعداد ۰، ۱ و ۲ را به اعضای گروه خود نسبت دهند. از همه افرادی که شماره یک دارند، بخواهید که به‌صورت ساعتگرد به گروه سه نفره دیگر بروند، افرادی که شماره ۲ را دارند نیز به دو گروه بعد به‌صورت ساعتگرد بروند و افرادی که شماره ۰ دارند مکان خود را تغییر ندهند. در نتیجه گروه‌های سه نفره جدیدی خواهید داشت. حال سؤال جدید و دشوارتری مطرح کنید. می‌توانید تا هر زمان که دوست داشتید چرخش در گروه‌ها را ادامه دهید و سؤال‌های بیشتری را به بحث بگذارید.

- این نوع گروه را می‌توان با زیرگروه‌های دو یا چهار نفره نیز تشکیل داد و موضوعات مختلفی حتی سؤال‌های محاسباتی انتخاب کرد. اجرای این روش در کلاس‌های بسیار پُرجمعیت دشوار خواهد بود.

❖ گروه‌های گلوله برفی یا هرمی (Snow ball groups - pyramids)

هدف: تولید ایده‌ها، توسعه مهارت‌های تصمیم‌گیری.

در این روش، به‌طور تدریجی تعداد دانش‌آموزان در گروه دو برابر می‌شود: ابتدا به‌صورت تک نفره، سپس گروه‌های دو نفره، چهار نفره و به همین صورت ادامه پیدا خواهد کرد. اما در بیشتر موارد، بعد از کار در گروه‌های چهار نفره، دانش‌آموزان یک جلسه جامع به‌منظور جمع‌بندی تمام نتیجه‌گیری‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل می‌دهند. ارائه دنباله‌ای از تکالیف پیچیده در مرحله‌های بعد، موجب می‌شود تا بحث برای دانش‌آموزان کسل‌کننده نباشد. به‌عنوان مثال ابتدا اجازه دهید دانش‌آموزان تعدادی سؤال مرتبط با موضوع کلاس را حل کنند. سپس در گروه‌های دو نفره افراد درگیر سؤال‌های بیشتر شوند. در گروه‌های چهار نفره به شناسایی و پاسخ به پرسش‌هایی که هنوز جوابی به آن‌ها داده نشده، ادعاهای جنجال‌برانگیز یا اصول مرتبط بر پایه بحث‌های قبلی بروند و در بحث کلی کلاس، نماینده‌ای از هر گروه نتایج را گزارش کند.

- این روش برای به نتیجه رسیدن زمان زیادی را می‌طلبد. بنابراین باید در زمانی که مفاهیم به‌گونه‌ای است که متناسب با زمان موجود است، از این نوع کار گروهی استفاده کرد.

بحث همگانی در کلاس

به گفته گویا (۱۳۷۷) بحث همگانی به‌معنای جمع‌آوری نظر همه گروه‌های کوچک و ارائه آن‌ها به تمام کلاس است. این عمل به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا با تنوع روش‌های حل مسئله و با انواع فهمیدن‌ها و بدفهمی‌های دیگر دانش‌آموزان آشنا شوند، آن‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهند و با مقایسه نقاط قوت و ضعفِ هر کدام از راه‌های پیشنهاد شده، بهترین راه را انتخاب کنند. توانایی تصمیم‌گیری یکی از واجبات حل مسئله است که مستلزم توانایی‌های فراشناختی است.

بحث همگانی و کار در گروه‌های کوچک لازم و ملزوم یکدیگر هستند و کارآیی یکی در خلأ وجود دیگری، کاهش می‌یابد. کار در گروه‌های کوچک و بحث همگانی تأثیر عمیقی بر باورهای دانش‌آموزان دارد. آن‌ها با دیدن راه‌های مختلف برای حل یک مسئله متوجه می‌شوند که ریاضی تنها «حساب دو دوتا چهارتا» نیست و آن جزمیت افراطی را زیر سؤال می‌برد که آموزش سنتی نسبت به حل مسئله در ذهن‌های‌شان به‌وجود آورده است. آن‌ها زمانی که با تنوع راه حل‌های مختلف مواجه می‌شوند و با وجود تفاوت آن‌ها، متوجه می‌شوند که هر کدام در نوع خود صحیح و بر مبنای اصول محکمی است، وقتی که با فرایندهای استقرایی و استدلال‌های محتمل برای حل مسئله‌های ریاضی آشنا می‌شوند، نسبت به باورهای سنتی خود با دیده شک می‌نگرند. آن‌ها یاد می‌گیرند که نظرات مخالف و موافق را بشنوند، با اعتمادبه‌نفس از راه حل پیشنهادی خود دفاع کنند و بالاخره فرصت تصمیم‌گیری را به دیگران بدهند و برای تصمیم اخذ شده، احترام قایل باشند. بحث همگانی هم‌چنان که بر باورهای دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد، خودآگاهی و خودنظمی آن‌ها را نیز افزایش می‌دهد.

بحث همگانی در کلاس موجب می‌شود تا دانش‌آموزان با معلم و همکلاسی‌های خود بحث و گفت‌وگو کنند، که خود عامل مهمی برای تقویت یادگیری معنادار مفاهیم ریاضی و حل مسئله ریاضی، توسط آن‌ها خواهد بود. هم‌چنین بحث همگانی باعث می‌شود دانش‌آموزان تشویق شوند تا فقط به قدرت بیرونی، یعنی معلم، اتکا نکنند و منتظر نباشند تا همیشه او به آن‌ها بگوید چه بکنند و چه نکنند، بلکه خود به خلق و انجام فعالیت‌های ریاضی، حل مسئله‌ها و ... بپردازند. ملزم کردن دانش‌آموزان به این که توضیح دهند «چرا» بگویند «چگونه» و جزییات ایده‌های خود را «شرح دهند»، باعث می‌شود تا بدانند که ریاضی، اسرارآمیز یا غیرقابل فهم نیست. دیگر نیازی نیست که معلم، منبع حقایق ریاضی باشد.

چند الزام برای بحث همگانی در کلاس

- موضوع انتخاب شده غنی باشد؛
- زمان مناسب برای بحث پیش‌بینی کنید؛
- به همه فرصت مشارکت در بحث بدهید؛
- همه موظف باشند برای ادعای خود دلیل بیاورند؛
- در ابتدا بر درستی پاسخ تمرکز نکنید؛
- حاشیه‌ها را کم کنید و به موضوع اصلی بپردازید؛
- با پرسش‌های کوتاه بحث را هدایت کنید؛
- از جزییات (حتی نادرست) صرف نظر نکنید؛
- در بحث همگانی درباره درستی یا نادرستی قضاوت کنید و معلم از ارائه نظر فوری خودداری کند.

نوشتن بازتابی (ژورنال‌نویسی)

نوشتن به‌عنوان ابزار یادگیری ریاضی توجه مجامع پژوهشی آموزش ریاضی را به خود جلب کرده است. با این حال، برداشت‌های مختلفی از نوشتن و به‌کارگیری آن به‌عنوان یک راهبرد یادگیری وجود دارد. در نوشتن بازتابی یا ژورنال‌نویسی، از دانش‌آموزان می‌خواهیم با بازتاب بر جریان حل مسئله در گروه‌های کوچک یا فعالیت‌های کلاس، چگونگی فهمیدن خویش؛ احساس‌شان؛ خوب فهمیدن‌ها و بدفهمی‌های خود را بررسی کنند.

نوشتن بازتابی با توجه به شرایط تدریس، می‌تواند دارای ساختار یا بدون ساختار باشد. نکته مهم آن است که به اندازه کافی اعتماد دانش‌آموزان به معلم جلب شده باشد تا آن‌ها بدون ترسِ از دست دادن موقعیت خود به بیان احساس و مشکلات خود بپردازند. نوشتن بازتابی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا بازتابی بیشتری بر عمل داشته باشند و نسبت به فرایند تدریس مسئولیت بیشتری احساس کنند. نوشتن بازتابی به معلم کمک می‌کند تا با مشکلات و احساسات دانش‌آموزان بهتر آشنا شود. و در نهایت روش تدریس خود را متناسب با نیازهای آن‌ها جرح و تعدیل کند. با این حال، باید بر این نکته واقف بود که نوشتن بازتابی به شرطی توانایی‌های دانش‌آموزان را بالا می‌برد که دو طرفه باشد. به این معنا که معلم باید در اسرع وقت با مطالعه دقیق آن‌ها و ارائه پیشنهاد به دانش‌آموزان، راه گفت‌وگو را باز کند و دانش‌آموزان را به تأمل در نوشته‌های خود و دادن پاسخ به معلم وادار کند.

گروه‌ها می‌توانند هنگام حل مسئله ریاضی، بر نتایج اطلاعات به‌دست آمده بازتاب داشته و آن‌ها را بنویسند. معلم می‌تواند در زمان انتخاب یا طراحی مسئله، به‌گونه‌ای برنامه‌ریزی کند که نوشتن بخشی از هر مسئله طرح شده باشد. نه تنها نوشتن به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا فکرهای خود را منسجم کنند، بلکه نوشتن موجب می‌شود که هر دانش‌آموز متعهد شود ایده‌ای برای بحث‌های کلاسی، توضیح دهد یا از آن دفاع کند. برای مثال، دانش‌آموزان گروه می‌توانند درباره این که چگونه کشیدن شکل در ارائه راه حل آن‌ها، مفید واقع شد، یا این که چگونه راهبرد حدس و آزمایش را مورد استفاده قرار دادند، با دیگر دوستان خود در گروه‌های دیگر صحبت کنند و از نظرات آن‌ها نیز آگاه شوند. و معلم می‌تواند از آن‌ها بخواهد نتیجه کار را بنویسند. این نوشته می‌تواند شامل مسیری باشد که آن‌ها را به نتیجه رسانده است. توانایی‌های نگارشی و کلامی دانش‌آموزان می‌تواند نقش مهمی در نوشته‌های آن‌ها داشته باشد. تعامل نوشتاری بین معلم و دانش‌آموزان حائز اهمیت است و دانش‌آموز با دریافت پاسخ از معلم، می‌تواند در شرایط بهتری برای ارتقای خود قرار بگیرد.

چه انتظاری می‌توانیم از نوشته‌ها داشته باشیم؟

- از دانش‌آموزان بخواهید احساس خود بنویسند:
- به اختصار درباره چیزی که فهمیدند بنویسند ...
- چه مشکلی دارند و دلیل آن را چه می‌دانند ...
- برای ادعاهای خود دلیل بیاورند ...
- در پاسخ به نوشته‌ها، جنبه‌های مثبت را ببینید:
- برای جلب اعتماد، حریم خصوصی را حفظ کنید ...
- با طرح سؤال، بخواهید موارد مبهم رفع شود ...
- پاسخ خود را به زبان ساده، اما دقیق بنویسید ...
- زمان تحویل نوشته‌های دانش‌آموزان را اعلام کنید و در کوتاه‌ترین زمان به همه نوشته‌ها پاسخ دهید.

۳-۳- حل مسئله به مثابه رویکرد آموزش

بعضی ویژگی‌های اصلی وجود دارد که نشان‌دهنده عملکرد سطح بالای دانش‌آموزان در حل مسئله هستند. برای نمونه، یک مدل حل مسئله بر اساس ویژگی‌های زیر است: **درک مفهومی**، **راهبردها و استدلال کردن**، **ارتباطات**، **محاسبه و اجرا**، و **بصیرت‌های ریاضی**. هر یک از این ویژگی‌ها با جزییات بیشتری شرح داده می‌شود و به‌دنبال هر کدام، پرسشی کلیدی مطرح می‌شود. هنگام ارزیابی توانایی‌های حل مسئله دانش‌آموزان، یا هنگامی که معلم، دانش‌آموزان را هدایت می‌کند تا حامی تلاش‌های حل مسئله آنان باشد، می‌تواند بر این پرسش بازتاب داشته باشد

درک مفهومی. دانش‌آموزان درک مفهومی را از طریق تفسیر اصول ریاضی در یک مسئله و ترجمه این ایده‌ها به یک بازنمایی منسجم ریاضی با استفاده از حقایق مهم مسئله به نمایش می‌گذارند. دانش‌آموزان زمانی درک مفهومی خوبی از ریاضی را در یک مسئله نشان می‌دهند که بازنمایی مناسب را انتخاب کرده و از اطلاعات مرتبط استفاده کنند، اصطلاحات ریاضی را با دقت به‌کار برند و رویه‌های ریاضی قابل کاربرد را انتخاب کنند.

پرسش کلیدی: آیا تفسیر دانش‌آموز از مسئله با استفاده از رویه‌ها و بازنمایی‌های ریاضی، به‌طور صحیح مفاهیم مهم را منعکس می‌کند؟

راهنمایی‌های ممکن که معلم می‌تواند به دانش‌آموزان برای کمک به تفسیر اطلاعات مسئله ارائه دهد، می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- مسئله درباره چیست؟ مسئله را به زبان خودتان دوباره‌نویسی کنید.
- درباره مسئله، چه می‌دانید؟
- مسئله از شما می‌خواهد که چیزی را پیدا کنید؟
- حقایق و عددهای مهم در مسئله کدام‌اند؟ آیا برخی اطلاعات برای حل کردن مسئله غیرضروری هستند؟
- آیا اصطلاحات ریاضی در درک و حل مسئله به شما کمک می‌کند؟
- پاسخ مسئله شبیه چیست؟ واحدهای اندازه‌گیری، میزان دقت مورد نیاز، شکل پاسخ و مانند آن؟

توصیه‌هایی به دانش‌آموزان برای کمک به درک مفاهیم ریاضی مربوط به مسئله می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- چه نوع محاسبه‌هایی برای حل مسئله مورد نیاز خواهد بود؟
- چگونه می‌توان مسئله را نمایش داد تا درک آن ساده‌تر شود؟
- کدام ایده‌ها و مهارت‌های ریاضی می‌توانند در نمایش و حل مسئله به شما کمک کنند؟ رسم نمودار، افزودن کسرها، شناسایی الگو، و مانند آن؟

راهبردها و استدلال کردن. دانش‌آموزان توانایی خود را در استفاده از راهبردها و استدلال کردن از طریق جست‌وجو و انتخاب راهبردهای مناسب حل مسئله و اجرای یک فرایند منطقی «خوب طراحی شده» و «خوب حمایت شده» نشان می‌دهند که آن‌ها را به راه حلی منطقی برساند. تمام انواع بازنمایی‌ها با راه حل دانش‌آموزان تلفیق شده، آن‌ها بر پیشرفت خود نظارت داشته و در صورت نیاز، جرح و تعدیل‌های لازم را انجام داده، کار را تأیید کرده یا درستی آن را ارائه می‌دهند.

پرسش کلیدی: آیا شواهدی وجود دارد که دانش‌آموز بر اساس یک طرح، حل مسئله را شروع کرده، راهبردهای متناسب را به‌کار برده و یک فرایند منطقی و قابل تأیید برای دست‌یابی به یک راه حل را دنبال کرده باشد؟

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش‌آموزان، برای شروع حل مسئله، می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- آیا رسم یک شکل یا یک نمودار یا ساخت یک مدل می‌تواند به حل این مسئله کمک کند؟
- آیا سازمان‌دهی اطلاعات در یک نمودار، یا جدول، یا فهرستِ سازمان‌دهی‌شده به شما کمک می‌کند؟
- آیا حدس زدن، بررسی و تعدیل انجام شده، به حل این نوع مسئله کمک می‌کند؟
- آیا باید دنبال الگوهایی در اطلاعات‌تان باشید؟
- آیا این‌کار کمک می‌کند که ابتدا مسئله را با استفاده از عددهای ساده‌تر حل کنید؟
- آیا می‌توانید با حرکت رو به عقب، از جایی که می‌خواهید به آن برسید کار را شروع کنید و به‌جایی برسید که می‌خواهید از آن‌جا آغاز کنید؟

توصیه‌هایی به دانش‌آموزان برای تفکر درباره راه حل آن‌ها می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- آیا راهبرد مورد استفاده شما، کارآمد است؟ اگر نه، آیا می‌توانید روش کارآمدتری برای حل مسئله پیدا کنید؟
- آیا می‌توانید مثال‌هایی برای حمایت از راه حل خودتان ارائه دهید؟
- آیا طرح و راهبردتان را آن‌قدر خوب درک کرده‌اید که آن را برای فرد دیگری شرح دهید؟
- آیا روش‌های دیگری برای نزدیک شدن به این مسئله وجود دارد؟
- آیا این مسئله شبیه مسئله‌های دیگری است که شما حل کرده‌اید؟
- آیا می‌توانید از آموخته‌های خود برای حل مسئله‌های دیگر نیز استفاده کنید؟

ارتباطات. اگر بدانیم که چگونه مطلبی با سایر مطالبی که آن‌ها را می‌دانیم رابطه یا پیوند برقرار می‌کند، آن را درک می‌کنیم. ارتباطات همراه با بازتاب، روابط و پیوندهای جدید تولید می‌کنند. دانش‌آموزانی که بر آن‌چه انجام می‌دهند، بازتاب می‌کنند و درباره آن، با سایرین ارتباط برقرار می‌کنند، در بهترین موقعیت برای ایجاد ارتباط و اتصال در ریاضی قرار دارند. دانش‌آموزان زمانی ارتباطات خوب را نشان می‌دهند که به‌وضوح، آن‌چه را که انجام

داده‌اند و علت آن‌کار را شرح دهند و این توضیح در یک توالی منطقی و روان انجام شود. ارتباطات خوب، مستقیم، هدفمند و خوب‌سازمان‌یافته است و مخاطب ناچار به استنباط نیست، زیرا توضیح‌ها شفاف بوده و فاقد هر گونه خلأ است.

پرسش کلیدی: آیا فرد دیگری می‌تواند به آسانی تفکرات دانش‌آموز را درک کند یا این که به استنباط و حدس زدن درباره آن‌چه که دانش‌آموز درصدد انجام آن هست، نیاز دارد؟

ارتباطات خوب، بستگی به داشتن یک راهبرد و طرح مسئله خوب‌سازمان‌یافته، واضح و روشن دارد. واداشتن دانش‌آموزان به توضیح کلامیِ راهبردهای خود پیش از نوشتن آن‌ها، می‌تواند در توسعه مهارت در برقراری ارتباطات مفید باشد.

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش‌آموزان در تبادل ارتباط با تفکر خودشان می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- آیا از جدول‌ها، نمودارها، کلمه‌ها یا ترکیبی از این‌ها، در توضیح و گسترش تفکرتان استفاده می‌کنید؟
- نخستین کاری که کردید چه بود؟ چرا؟ بعد از آن چه کردید؟ این کار به شما برای رسیدن به هدف شما چه کمکی کرد؟
- چگونه به این نتیجه رسیدید که ... ؟ از حل کردن این مسئله چه چیزی یاد گرفتید؟
- آیا نشان دادید که چگونه پاسخ‌تان را تصدیق می‌کنید؟
- توضیح خود را برای فرد دیگری بخوانید تا مطمئن شوید که این توضیح‌ها، فرایند حل شما را به‌طور شفاف بیان کرده و درک آن ساده است.

محاسبه و اجرا. مهارت‌های پایه‌ای و درک مفهومی باید به همراه هم پیشرفت کنند. برای یادگیری مهارت‌ها، به‌نحوی که فرد بتواند آن‌ها را به‌خاطر بسپارد، هنگام لزوم آن‌ها را به‌کار ببرد و بتواند آن‌ها را برای حل مسئله‌های جدید تعدیل کند، باید آن‌ها را همراه با فهم و درک، یاد بگیرد. اگر دانش‌آموزان خواسته شود تا از رویه‌های خود برای پاسخ دادن به مسئله‌های حسابی استفاده کنند و برای نمونه، رویه‌های خود را با دیگران در میان بگذارند، درک ریاضی آن‌ها از طریق اجرا، بحث و بازتاب بر ایده‌های دیگران تقویت خواهد شد.

دانش‌آموزان خبرگی خود را در محاسبه‌ها از طریق اجرای صحیح تمام رویه‌ها، کاربرد صحیح تمام بازنمایی‌های بصری مسئله و مشخص کردن هر یک (نمودارها، جدول‌ها، شکل‌ها و مانند آن) و نشان دادن استفاده صحیح از فناوری یا دست‌ورزی‌های قابل دسترسی، به نمایش می‌گذارند.

پرسش کلیدی: با در نظر گرفتن رویکردی که دانش‌آموز برای حل مسئله اتخاذ کرده است، آیا راه حل (شامل تمام گام‌های فرایند) به شیوه‌ای صحیح و کامل اجرا شده است؟

راهنمایی‌هایی برای کمک به دانش‌آموزان برای بهبود مهارت‌های محاسباتی می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- آیا به موازات پیشرفت خود، محاسبه‌های خود را دوباره کنترل کرده‌اید؟ (به‌خاطر داشته باشید همیشه هنگام استفاده از ماشین‌حساب، پاسخ خود را تخمین بزنید).
- آیا قاعده یا فرمول استفاده شده را نشان داده‌اید؟
- آیا از طریق حل مسئله به روشی متفاوت یا از طریق گذاشتن پاسخ داخل مسئله برای این که ببینید، آیا این پاسخ معنادار است یا خیر، پاسخ خود را تصدیق کرده‌اید؟
- آیا شکل‌ها یا نمودارهای‌تان را کنترل کرده‌اید تا مطمئن شوید توضیح‌های آن‌ها صحیح است؟ (در صورتی که از شکل‌ها یا نمودارها استفاده کرده‌اید).
- آیا در محاسبه‌ها و رویه‌های مورد نیاز مسئله، مهارت دارید؟ اگر نه، پیش از تلاش برای حل مسئله آن‌ها را مرور و تمرین کنید.
- آیا کنترل کرده‌اید تا مطمئن شوید که پاسخ شما با آن‌چه که مسئله می‌خواهد، منطبق است؟

بصیرت‌های ریاضی. دانش‌آموزان زمانی نسبت به یک مسئله بصیرت نشان می‌دهند که بتوانند اهمیت مسئله را در ارتباط با سایر مسئله‌ها یا در ارتباط با سایر علوم یا کاربردهای آن در زندگی روزمره تشخیص دهند. با تشخیص الگوهای مستتر در مسئله، کشف رویکردها یا راه حل‌های چندگانه یا ابداع یک قاعده یا فرمول کلی، دانش‌آموزان بصیرت خود را از طریق ساختار زیربنایی مسئله به نمایش می‌گذارند.

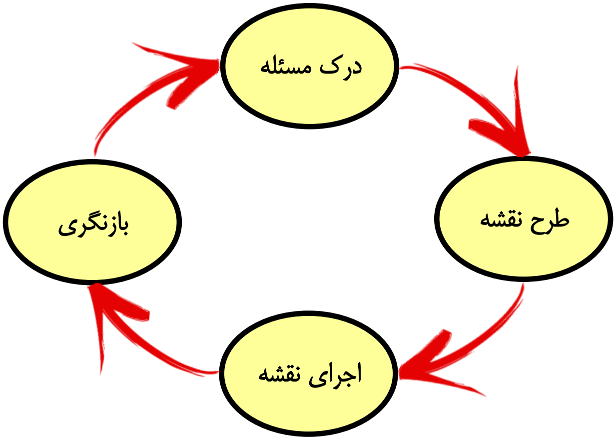
پرسش کلیدی: آیا دانش‌آموز ساختار اصلی مسئله را می‌یابد و می‌بیند چگونه فرایند مورد استفاده برای حل این مسئله، آن را به سایر مسئله‌ها و کاربردهای جهان واقعی پیوند می‌دهد؟

کلید توسعه بصیرت دانش‌آموزان، رفتن به فراسوی راه حل مسئله و تفکر درباره کاربردهای مسئله در سایر موقعیت‌ها است. راهنمایی‌هایی برای بصیرت می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- آیا این مسئله شبیه هیچ‌یک از مسئله‌هایی است که پیش از این دیده‌اید؟ اگر بلی، شباهت‌ها کدام‌ها هستند؟
- آیا در حین حل مسئله، الگویی پیدا کرده‌اید؟
- برای حل کردن مسئله از چه فرض‌هایی استفاده کرده‌اید؟
- آیا می‌توانید مسئله‌ای بسازید که از جهاتی با این مسئله مشابه باشد و از جهات دیگری متفاوت باشد؟
- آیا راه حل شما، تنها راه حلی است که برای این مسئله وجود دارد؟
- آیا می‌توانید فرایند یا فرمولی بیابید که بتواند برای حل شکل‌های مختلف این مسئله مورد استفاده قرار گیرد؟
- چگونه این مسئله با سایر مسئله‌هایی که پیش از این دیده‌اید یا با موقعیت‌های زندگی واقعی، شباهت دارد؟

۳-۴- حل مسئله به مثابه مسئله حل کردن

جورج پولیا در سال ۱۹۴۵، در کتاب **چگونه حل کنیم؟** توجه تمامی دست‌اندرکاران آموزش و یادگیری ریاضی را به چارچوبی که برای حل مسئله ریاضی ارائه داده بود، جلب کرد. این مدل یا چارچوب، می‌تواند برای حل مسئله‌های ریاضی به‌کار گرفته شود. مدل پولیا، شامل چهار مرحله زیر است:



مدل چهار مرحله‌ای پولیا برای حل مسئله ریاضی

کسانی که مشغول حل مسئله هستند، می‌توانند مهارت‌های فردی و راهبردهای مناسب را در قالب این چارچوب، فرا بگیرند و دانش خود را توسعه دهند. البته باید توجه داشت که تمام اجزای این چارچوب در حال تعامل دائم با هم هستند؛ مثلاً ممکن است، کسی در مرحله سوم (اجرای نقشه) متوجه شود نقشه‌ای که طرح کرده، به نتیجه نخواهد رسید، یا موانعی در راه اجرای آن است. در نتیجه، دوباره به مرحله اول (درک مسئله) و دوم (طرح نقشه) بازگشته و با درک جدیدی که از مسئله پیدا می‌کند، طرحی نو بریزد و آن را به اجرا بگذارد. مهم این است که در هر کدام از مراحل چهارگانه، امکان این بازنگری وجود دارد.

به‌طور خاص، در مرحله چهارم (بازنگری) علاوه بر آن که هر یک از مراحل پیشین مورد بازنگری قرار می‌گیرد، تمام فرایند حل مسئله می‌تواند بازنگری شود. در این مرحله، ممکن است مسئله حل‌کن به درک متفاوتی از مسئله دست پیدا کند. به همین دلیل، نمودار این مدل چهار مرحله‌ای به‌صورت یک حلقه بسته ترسیم می‌شود. بدین ترتیب، هر چند به‌ظاهر فرایند حل مسئله، در یک چرخه بسته است، لیکن این بازگشت، را می‌توان به‌عنوان ارتقا به مرحله‌ای متفاوت و در سطحی بالاتر از درک مسئله تلقی کرد.

پولیا برای موفقیت در هر یک از این مراحل چهارگانه، مواردی را ذکر کرده است که در ادامه به مختصری از آن‌ها اشاره خواهد شد.

۱) درک مسئله

در این مرحله، برای کسی که قصد حل مسئله‌ای را دارد، باید پیش از هر چیز روشن شود که مسئله از نوع «ثابت کردنی» است یا «پیدا کردنی». سپس فرد تشخیص دهد که اجزای مسئله ازجمله *داده‌ها* و *مجهولات*، کدام‌ها هستند. برای دستیابی به این مهم، نکات زیر را می‌توان در نظر گرفت:

- خواندن مسئله به‌طور پی‌درپی؛
- بیان دوباره مسئله با استفاده از عبارت‌های آشناتر؛
- ارزشیابی داده‌های مسئله برای تعیین کافی بودن اطلاعات موجود برای حل مسئله؛
- آیا داده‌های اضافی در مسئله وجود دارند؛
- تعیین فرضیه‌های مستتر در مسئله که ممکن است حاوی اطلاعات مفید برای حل مسئله باشد؛
- مدل‌سازی مناسب با موقعیت مسئله؛
- در نظر گرفتن تفسیرهای بدیل.

۲) طرح نقشه

هنگامی که مسئله خوب فهمیده و درک شد، می‌توان برای حل آن طرحی مناسب تهیه کرد. با توجه به این که هر مسئله ممکن است از راه‌های مختلفی قابل حل باشد، باید درباره راهبردهایی که می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند، تعمق بیشتری کرده و سعی نمود از راهبرد یا راهبردهایی که مناسب‌تر به نظر می‌رسند، کمک گرفت. به هر حال، کسی که می‌خواهد *مسئله حل‌کن* خوبی باشد، باید توانایی تجدیدنظر در طرح را ــ در صورت عدم‌کارآیی راهبرد اولیه خود ــ داشته باشد. چند نمونه از راهبردهایی که ممکن است در جریان حل مسئله مورد استفاده واقع شوند، از این قرارند:

- تهیه مدل، یعنی رسم الگوی مشابه یا رسم منحنی متناسب با موقعیت مسئله؛
- تهیه فهرست‌ها، جدول‌ها، و منحنی‌های منظم و سازمان‌یافته؛
- جست‌وجو برای الگو؛
- کار کردن برعکس؛
- انتخاب نمادهای مناسب؛
- مشخص کردن اطلاعات داده شده، مورد احتیاج و خواسته شده؛
- حل یک مسئله ساده‌تر و مرتبط با مسئله داده شده؛
- تقسیم مسئله به زیرمسئله‌های مختلف و حل هر کدام از آن‌ها؛
- حدس یک پاسخ و آزمایش آن؛
- تغییر دیدگاه.

۳) اجرای نقشه

بعد از آن که نقشه و طرح مناسب برای حل مسئله تهیه شد، باید آن را به مورد اجرا گذاشت. نکته اساسی این است که شخص نظارت کامل بر پیشرفت اجرای نقشه داشته باشد تا اگر زمانی احساس کرد که نقشه ممکن است او را به حل مسئله رهنمون نکند، بتواند طرح جدیدی را تهیه و به اجرا بگذارد. شخصِ درگیرِ حلِ مسئله، در حالی که ناظر بر پیشرفت کار است، می‌تواند پرسش‌هایی مانند زیر را از خود بپرسد:

- آیا طرحی که تهیه کرده‌ام، مرا به حل مسئله هدایت می‌کند؟
- آیا به طرحی بدیل نیاز دارم؟
- آیا لازم است که طرح فعلی را کنار گذاشته و طرح جدیدی تهیه نمایم؟
- آیا برای اجرای طرح خود، به اطلاعات اضافه‌تر یا کمک دیگران نیاز دارم؟
- آیا دقت و تلاشم را برای ردیابی مراحل پیشرفت خود در حل مسئله، مستند کرده‌ام؟

۴) بازنگری

پس از اتمام مرحله اجرا، حل‌کننده مسئله باید یک بازنگری بر تمامی مراحل اجرای طرح تهیه شده، داشته باشد و یک بررسی کلی درباره مسئله انجام دهد. ازجمله موردهای مهمی که در این مرحله باید در نظر گرفت، یکی معنی‌دار بودن پاسخ مسئله با توجه به پرسش‌های طرح شده، و دیگری تعمیم‌پذیری مسئله است. هم‌چنین، شخص با بازنگری کلی می‌تواند کاربرد وسیع‌تر راهبردهای به کار گرفته شده را شناسایی کرده و راه حل‌های متفاوت حل مسئله را مطالعه کند.

مراحل حل مسئله باید به نحوی تدوین شوند تا هم حل مسئله برای دیگران مشخص شود، و هم این که شخصِ حل‌کننده مسئله بتواند از طریق حل مسئله با دیگران ارتباط برقرار کرده و از فرایند و نتیجه‌های حل مسئله خود دفاع نماید. در این مرحله، شخصِ حل‌کننده مسئله می‌تواند پرسش‌هایی مشابه نمونه‌های زیر از خود بپرسد و سعی در یافتن پاسخ برای آن‌ها داشته باشد:

- آیا پاسخ من به اندازه کافی مستدل است؟
- در جریان حل مسئله، چه چیزی یاد گرفتم که قبلاً نمی‌دانستم؟
- چه نکاتی در این مسئله هست که من می‌توانم در مسئله‌های دیگر نیز، آن‌ها را تشخیص دهم؟
- آیا می‌توانم مسئله‌های مرتبط با این مسئله حل شده را مطرح کرده و حل کنم؟
- آیا می‌توانم حل مسئله را برای دیگران توضیح داده، مستند نموده یا تعمیم دهم؟
- آیا تمام راه حل‌های ممکن را یافته‌ام؟ آیا مسئله راه حل دیگری دارد؟
- آیا بجز راهبردهایی که از ابتدا به حل مسئله راهبر شدند، من راهبردهای دیگری را نیز امتحان کرده‌ام؟

۳-۵- چند توصیه و یک جمع‌بندی

تا اینجا، توصیه‌های مختلفی برای کار در کلاس ارائه شده است. این بخش به تکرار آن توصیه‌ها و افزودن بعضی جزییات، و جمع‌بندی آن‌ها اختصاص دارد. پیشنهاد می‌شود این توصیه‌های عمومی را با دیگر معلمان علاقه‌مند، در میان بگذارید و درباره آن‌ها بحث کنید. بدیهی است، تجربه حرفه‌ای معلمان و شناختی که از تنوع توانایی‌های دانش‌آموزان دارند، هم‌چنین توجه به شرایط محیط آموزشی، می‌تواند تکمیل‌کننده این بحث‌ها باشد.

پیش هر چیز توجه کنید که آموزش حل مسئله مشکل است زیرا معلم باید ...

- پیامدهای انتخاب رویکردهای گوناگون توسط دانش‌آموزان را درک کند.
- بدانند چه موقع مداخله کند و چه پیشنهادهایی به دانش‌آموزان کمک می‌کنند و چگونه این کار را انجام دهد.
- گاهی باید در موقعیتی قرار گیرند که گویی حل مسئله را از قبل نمی‌دانند.

انجام درست این‌کار، بدون دانستن همه پاسخ‌ها، مستلزم تجربه، اعتمادبه‌نفس و خودآگاهی است.

خودتان را برای کلاس آماده کنید

مسئله‌ای انتخاب کنید که ...

- به مفاهیم مهم ریاضی اشاره کند.
- با یادگیری قبلی دانش‌آموز مرتبط باشد.
- دانش‌آموزان را جذب کند و به چالش بکشد.
- باز-پاسخ باشد، یعنی شیوه‌های متنوع حل و پاسخ‌های چندگانه را ارائه کند.
- علاوه بر مسئله‌های خوب تعریف‌شده، گاهی مسئله‌ای بد تعریف‌شده مطرح کنید.
- مثال‌های گوناگونی از موقعیت‌های واقعی برای استفاده در کلاس درس و تکلیف منزل باشد.
- متنوع باشد و هم برای بحث در کلاس و هم به‌عنوان تکلیف منزل به دانش‌آموزان ارائه کنید.
- فرایند آن‌ها، تسهیل‌کننده یادگیری ریاضی و مراحل برتر تفکر حل مسئله باشند.
- پاسخ به آن‌ها، مستلزم مرور راه حل‌های دانش‌آموزان و تعمیم دادن به آن راه حل‌ها باشد.
- دانش‌آموز به‌جای یک متغیر خاص، مجبور باشد تمام متغیرهای ممکن را پیدا کنند.

متناسب با زمان، برنامه‌ریزی کنید

- حل مسئله باید بخشی از کار روزانه دانش‌آموزان باشد.
- در هر جلسه کلاسی، یک زمان کوتاه را به بحث و حل مسئله‌ها به صورت گروهی، اختصاص دهید.
- در هر جلسه، دانش‌آموزان را با پرسش یا مسئله‌ای مواجه کنید که نتوانند آن را به‌راحتی از ذهن دور کنند!
- الزامی ندارد که مسئله به‌طور کامل حل شود، فرصت بدهید دانش‌آموزان مسئله‌ها را هضم کنند، درباره آن‌ها فکر کنند، فکرشان را رها کنند و دفعه بعد، با ایده‌های تازه و جدید به آن‌ها بپردازند.

در کلاس درس فعال باشید

- به دانش‌آموزان نشان دهید که چگونه یک مسئله را تبیین کنند.
- از بعضی دانش‌آموزان بخواهید تا صورت مسئله را به زبان خود بیان کنند و وقت بیشتری بدهید.
- به دانش‌آموزان فرصت دهید تا تغییر صورت مسئله را در کلاس تمرین کنند.
- استدلال کردن را بر اساس اصول زیربنایی مسئله تشویق کنید (نه آن‌که تنها استفاده از فرمول).
- تنها یک مسئله برای تکلیف بدهید، اما از دانش‌آموزان بخواهید تمام فرایند حل و جزییات آن را ثبت کنند.
- یکبار نقش یک مسئله‌حل‌کن خبره را بازی کنید، اما در این کار زیاده‌روی نکنید.
- گاهی اوقات به‌جای یک حل «شسته و رفته»، تمام مراحل انجام یک مسئله را به دانش‌آموزان نشان دهید.
- دانش‌آموزان را با چگونگی تفکر و جست‌وجوی خودتان برای یافتن حل مسئله آشنا کنید.
- مسئله‌ای را که تا به‌حال حل نکرده‌اید، در مقابل کلاس حل کنید و برای دانش‌آموزان به نمایش بگذارید.

مراقب باشید: اگر برای حل مسئله مشکل داشته باشید، استفاده از این روش، پر مخاطره است!

کلاس را ارزیابی کنید

- مراحل حل هر مسئله را به‌طور ضمنی ارزشیابی کنید تا دانش‌آموزان مهارت‌های کنترلی خود را توسعه دهند.
- فرصت‌هایی را برای تمرین عملی در کلاس ایجاد کنید تا دانش‌آموزان بتوانند از شما، بازخورد فوری بگیرند.
- به دانش‌آموزان بازخورد مکتوب بدهید تا بدانند که نوشته‌ها را با حوصله می‌خوانید و آن نوشته‌ها باارزش‌اند.
- در نمره‌گذاری راه‌حل دانش‌آموزان ـ چه به‌صورت انفرادی و چه گروهی، تنها بر پاسخ صحیح تأکید نکنید.
- برای تمام مراحل حل ازجمله راهبردهای انتخاب شده و چگونگی انتخاب آن‌ها نیز، نمره‌ای اختصاص دهید.
- در موقع بررسی راه حل‌های مکتوب دانش‌آموزان، به اشتباه‌های تکرارپذیر توجه کنید
- اشتباه‌های ناشی از بدفهمی را شناسایی کنید و ضمن نوشتن علت آن‌ها، در کلاس آن‌ها را به بحث بگذارید.

در ارزیابی، معلم می‌تواند بررسی کند که آیا دانش‌آموزان قادر هستند ...

- مسئله را توصیف و تعریف کنند؟
- یک رویه ریاضی را از اطلاعات تشخیص دهند؟
- داده‌های لازم یا اطلاعات دیگری را جمع‌آوری و سازمان‌دهی کنند؟
- با توجه به الگوهای داده‌ها، حدسیه‌های منطقی را فرمول‌بندی کنند؟
- حدس‌ها را محک بزنند؟
- با ایجاد تغییر لازم، اطلاعات ضروری دیگری کسب کنند؟
- از تحقیق خود گزارشی مختصر و مفید تهیه کنند؟

ویژگی‌های فردی دانش‌آموزان را مورد بررسی قرار دهید، ویژگی‌هایی از قبیل ...

- خلاقیت و ابتکار؛
- تشریک مساعی گروهی؛
- انعطاف‌پذیری و تحمل نظر دیگران؛
- پشتکار و دقت؛
- رهبری و مشارکت؛
- اشتیاق رفتن به فراتر از مسئله.

با پرسش کردن، به دانش‌آموزان کمک کنید

برای کمک به تفسیر اطلاعات مسئله و درک مفاهیم ریاضی مربوط به مسئله ...

- مسئله درباره چیست؟ مسئله را به زبان خودتان دوباره‌نویسی کنید.
- درباره مسئله، چه می‌دانید؟
- مسئله از شما می‌خواهد که چیزی را پیدا کنید؟
- حقایق و عددهای مهم در مسئله کدام‌اند؟ آیا برخی اطلاعات برای حل کردن مسئله غیرضروری هستند؟
- آیا اصطلاحات ریاضی در درک و حل مسئله به شما کمک می‌کند؟
- پاسخ مسئله شبیه چیست؟ واحدهای اندازه‌گیری، میزان دقت مورد نیاز، شکل پاسخ و مانند آن؟
- چه نوع محاسبه‌هایی برای حل مسئله مورد نیاز خواهد بود؟
- چگونه می‌توان مسئله را نمایش داد تا درک آن ساده‌تر شود؟
- کدام ایده‌ها و مهارت‌های ریاضی می‌توانند در نمایش و حل مسئله به شما کمک کنند؟

برای شروع حل مسئله و تفکر درباره راه حل آن‌ها ...

- آیا رسم یک شکل یا یک نمودار یا ساخت یک مدل می‌تواند به حل این مسئله کمک کند؟
- آیا سازمان‌دهی اطلاعات در یک نمودار، یا جدول، یا فهرستِ سازمان‌دهی‌شده به شما کمک می‌کند؟
- آیا حدس زدن، بررسی و تعدیل انجام شده، به حل این نوع مسئله کمک می‌کند؟
- آیا باید دنبال الگوهایی در اطلاعات‌تان باشید؟
- آیا این‌کار کمک می‌کند که ابتدا مسئله را با استفاده از عددهای ساده‌تر حل کنید؟
- آیا می‌توانید رو به عقب حرکت کنید؟ از جایی که می‌خواهید به آن برسید شروع کنید تا به آغاز راه برسید.
- آیا راهبرد مورد استفاده شما، کارآمد است؟ اگر نه، آیا می‌توانید روش کارآمدتری برای حل مسئله پیدا کنید؟
- آیا می‌توانید مثال‌هایی برای حمایت از راه حل خودتان ارائه دهید؟
- آیا طرح و راهبردتان را آن‌قدر خوب درک کرده‌اید که آن را برای فرد دیگری شرح دهید؟
- آیا روش‌های دیگری برای نزدیک شدن به این مسئله وجود دارد؟
- آیا این مسئله شبیه مسئله‌های دیگری است که شما حل کرده‌اید؟
- آیا می‌توانید از آموخته‌های خود برای حل مسئله‌های دیگر نیز استفاده کنید؟

برای کمک به دانش‌آموزان در تبادل ارتباط با تفکر خودشان ...

- آیا از جدول‌ها، نمودارها، کلمه‌ها یا ترکیبی از این‌ها، در توضیح و گسترش تفکرتان استفاده می‌کنید؟
- نخستین کاری که کردید چه بود؟ چرا؟ بعد از آن چه کردید؟ این کار برای رسیدن به هدف چه کمکی کرد؟
- چگونه به این نتیجه رسیدید که ... ؟ از حل کردن این مسئله چه چیزی یاد گرفتید؟
- آیا نشان دادید که چگونه درستی پاسخ‌تان را بررسی کردید؟
- توضیح خود را برای دیگری بگویید تا مطمئن شوید درک آن ساده است و فرایند حل شفاف بیان شده است.

برای کمک به دانش‌آموزان برای بهبود مهارت‌های محاسباتی ...

- آیا به موازات پیشرفت خود، محاسبه‌های خود را دوباره کنترل کرده‌اید؟
- آیا قاعده یا فرمول استفاده شده را نشان داده‌اید؟
- آیا با روشی متفاوت یا گذاشتن پاسخ داخل مسئله، معنادار بودن پاسخ را بررسی کرده‌اید؟
- آیا شکل‌ها یا نمودارهای‌تان را کنترل کرده‌اید تا مطمئن شوید توضیح‌های آن‌ها صحیح است؟
- آیا در محاسبه‌ها و رویه‌های مورد نیاز مسئله، مهارت دارید؟ اگر نه، پیش از حل مسئله آن‌ها را مرور کنید.
- آیا کنترل کرده‌اید تا مطمئن شوید که پاسخ شما با آن‌چه که مسئله می‌خواهد، منطبق است؟

برای توسعه بصیرت دانش‌آموزان و رفتن به فراسوی راه حل مسئله و تفکر درباره کاربردهای مسئله ...

- آیا این مسئله شبیه هیچ‌یک از مسئله‌هایی است که پیش از این دیده‌اید؟ اگر بلی، شباهت‌ها کدام‌ها هستند؟
- آیا در حین حل مسئله، الگویی پیدا کرده‌اید؟
- برای حل کردن مسئله از چه فرض‌هایی استفاده کرده‌اید؟
- آیا می‌توانید مسئله‌ای بسازید که از جهاتی با این مسئله مشابه باشد و از جهات دیگری متفاوت باشد؟
- آیا راه حل شما، تنها راه حلی است که برای این مسئله وجود دارد؟
- آیا می‌توانید فرایند یا فرمولی بیابید که بتواند برای حل شکل‌های مختلف این مسئله مورد استفاده قرار گیرد؟
- چگونه این مسئله با سایر مسئله‌هایی که پیش از این دیده‌اید یا با موقعیت‌های زندگی واقعی، شباهت دارد؟

جمع‌بندی: باورهای خود را مرور کنید!

چند چالش جدی برای رویکرد حل مسئله ...

- انتقال از آموزش حقایق و رویه‌های ریاضی به
آموزش همراه با تأکید بر فهم و درک ریاضی و مهارت‌های تفکر، کند و پُر فراز و نشیب است.
- بسیاری از معلمان مجاب نشده‌اند که شیوه‌های سنتی باید کنار گذاشته شوند.
- بیشتر آن‌هایی که مایل به تغییر هستند، اطمینان ندارند که چگونه باید این‌کار را انجام دهند.
- اجماعی وجود ندارد که منظور از حل مسئله چیست، و بهترین راه تدریس و ارزشیابی آن چگونه است.
- معلمان نسبت به تمام کردن محتوای درس، دغدغه دارند.
- توانایی «همه» معلمان به‌عنوان «مسئله‌حل‌کن خبره» با تردید روبه‌رو است.
- مسئله‌های غیرمعمول برای دانش‌آموزان مشکل هستند.
- کتاب‌های درسی، مسئله‌های غیرمعمول بسیار کمی عرضه می‌کنند.

در پایان، به پرسش‌های کوتاه زیر، پاسخ‌های مفصل بدهید ...

- آیا مایل به تغییر رویه خود در تدریس هستید؟
- چه اهدافی برای تدریس حل مسئله در نظر دارید؟
- بهترین راه تدریس برای اجرای اهداف چیست؟
- چه برنامه‌ای برای ارزشیابی دانش‌آموزان دارید؟

بعد از یک سال تحصیلی، دوباره پاسخ‌ها را بخوانید:

- آیا هم‌چنان پاسخ‌ها برای شما معتبر هستند؟

منابع

اشتن‌مارک، جین کِر NCTM (۱۹۹۱). *ارزیابی ریاضی*. مترجمان: زهرا گویا، مانی رضائی (۱۳۸۷). انتشارات فاطمی، تهران.

پولیا، جورج (۱۹۶۵). *خلاقیت ریاضی*. مترجم: پرویز شهریاری (چاپ هفتم، ۱۳۸۲). انتشارات فاطمی. تهران.

پولیا، جورج (۱۹۴۵). *چگونه حل کنیم؟* مترجم: مسعود بهرامی‌بیدکلمه (زیرچاپ). انتشارات دانشگاه صنعتی شریف. تهران.

رضائی، مانی (۱۳۹۶). *مبانی آموزش ریاضی*. انتشارات دانشگاه فرهنگیان. تهران.

رضائی، مانی (۱۳۹۰). یک دنباله چوب‌کبریتی و سه پاسخ. *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۱۰۳، صص ۲۱ـ۲۲.

رضائی، مانی (۱۳۸۹). ۰/۹̅=۱: یک واقعیت یا حقیقتی باور نکردنی. *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۱۰۰، صص ۱۹ـ۲۳.

رضائی، مانی (۱۳۸۵a). تحلیل محتوای حل مسئله در کتاب‌های درسی ریاضی. *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۸۶، صص ۴۵ـ۵۱.

رضائی، مانی (۱۳۸۵b). گام برداشتن در مسیر حدس، کشف و اثبات. *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۸۳، صص ۲۵ـ۲۹.

رضائی، مانی (۱۳۸۲a). دنباله‌های تفاضلی. *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۷۳، ص ۴۱ـ۴۷.

رضائی، مانی (۱۳۸۲b). باز هم یک استدلال لجوجانه! *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۷۳، ص ۵۹.

رضائی، مانی (۱۳۸۱). یک استدلال لجوجانه! *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۷۰، صص ۶۳.

رضائی، مانی؛ گویا، زهرا (۱۳۸۲). *کارگاه حل مسئله ریاضی*. بنیاد علمی حریری، بابل.

روزدار، علی (۱۳۸۵). آنچه لازم است درباره حل مسئله بدانیم. *رشد آموزش ریاضی*، شماره۸۶. صص۲۳ـ۳۹.

سند (۱۳۹۱). *برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران*. شورای عالی آموزش‌وپرورش، وزارت آموزش‌وپرورش.

شونفیلد، آلن (۱۹۸۷). پولیا، حل مسئله و آموزش. مترجم: سعید ذاکری (۱۳۶۸). *نشر ریاضی*، مرکز نشر دانشگاهی، سال ۲، شماره ۲، صص۱۴۳ـ۱۵۰.

گویا، زهرا (۱۳۷۹). واقعاً این همه هیاهو در مورد فراشناخت چیست؟ *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۵۹ـ۶۰. ص ۱۶.

گویا، زهرا (۱۳۷۷). نقش فراشناخت در یادگیری حل مسئله ریاضی. *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۵۳. صص۱۳ـ۱۸.

گویا، زهرا (۱۳۷۵). ضرورت تغییر در محتوای درسی ریاضیات مدرسه‌ای. *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۴۶، صص۸ـ۱۲.

مکینتاش، رابرت؛ دنیس، جَرِت. (۲۰۰۰). آموزش حل مسئله ریاضی: تحقق یک چشم‌انداز، مروری بر ادبیات تحقیق. مترجمان: زهرا گیلک، زهرا گویا (۱۳۸۵). *رشد آموزش ریاضی*، شماره ۸۶، صص۴ـ۲۱.

منشور (۱۳۹۰). *مبانی نظری تحول بنیادین در نظام تعلیم و تربیت رسمی عمومی جمهوری اسلامی ایران*. شورای عالی انقلاب فرهنگی و شورای عالی آموزش‌وپرورش، وزارت آموزش‌وپرورش.

Barrows, H.S. (1986). A Taxonomy of Problem-based Learning Methods. *Medical Education*, *20*, 481-486.

Brubacher, M.; Payne, R.; Rickett, K. (Eds). (1990). *Perspectives on Small Group Learning: Theory and practice.* Oakvale, Ontario: Rubicon.

Clements, M.A.; Ellerton, N.F. (1996). *Mathematics Education Research: Past, Present and Future*. UNESCO, Principal Regional Office for Asia and the Pacific, Bangkok.

Crozier, R.; Ranyard, R.; Svenson O. (Eds). (2002). *Decision Making: Cognitive Models and Explanations*. London & New York, NY: Routledge.

Davidson, N.; Worsham, T. (1992). *Enhancing Thinking Through Cooperative Learning.* New York, NY: Teachers College Press.

Davidson, N.; Major, C.H. (2014). Boundary Crossings: Collaborative Learning, Cooperative Learning, and Problem-Based Learning. *Journal on Excellence in College Teaching*, Vol. 25, No. 4, pp. 7-55.

Duch B.J.; Groh S.E.; Allen D.E. (Eds.). (2001). *The Power of Problem-based Learning: A Practical "How to" for Teaching Undergraduate Courses in any Discipline*. Sterling, VA: Stylus.

Johnson, D.W.; Johnson, R.T.; Smith, K.A. (1998; 3rd ed. 2006). *Active Learning: Cooperation in the College Classroom*. Edina, MN: Interaction.

Kagan, S.; Kagan, M. (2009). *Kagan Cooperative Learning*. San Clemente, CA: Kagan Publishing.

Lyman, F. (1992). Think-pair-share, Thinktrix, Thinklinks, and Weird Facts: An Interactive System for Cooperative Thinking. In N. Davidson, T. Worsham (Eds.), *Enhancing Thinking Through Cooperative Learning*, pp.169-181. New York, NY: Teachers College Press.

MacKall, D.D. (1998). *Problem Solving.* New York, NY: Ferguson.

Mathematical Sciences Education Board. (1990). *Everybody Counts.* Washington D.C.; Author.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.

Schoenfeld, H. Alan (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

روند کلی کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه را می‌توان چنین خلاصه کرد: معرفی یک روش، الگوریتم، یا یک مفهوم؛ سپس ارائه یکی دو مثال، و در پایان، محول کردن چند تمرین به دانش‌آموزان. در بعضی موارد، مؤلفان برای تنوع، ابتدا ارائه مثال و سپس معرفی را انجام می‌دهند، اما هدف این اقدام، ایجاد فرصتی مناسب، برای کشف آن روش یا مفهوم توسط دانش‌آموزان نیست، چرا که بی‌درنگ معرفی انجام می‌شود. بیشتر مؤلفان، با ابراز نگرانی از کم بودن زمان و زیاد بودن مطالب، این نگرانی را در میان معلمان نیز دامن می‌زنند ... با وجود تمام این محدودها، معلمانی هستند که در جستجوی مسئله‌ای مناسب برای کلاس درس هستند، تا بتوانند پیش از آغاز تدریس خود، دانش‌آموزان را با آن مسئله درگیر کنند. کتاب آموزش حل مسئله ریاضی برای این گروه معلمان است.