فصل اول

اهداف آموزش ریاضیات در دبیرستان

Scanned by CamScanner

اهداف آموزش ریاضیات در دبیرستان

معلمینی که می‌خواهند تدریس و آموزش ریاضیات را پیشه خود کنند باید به سودمندی و هدف‌های تربیتی این شاخه از معارف بشری آگاهی داشته باشند. تدریس و آموزش هر معرفتی، چیزی نیست که فقط با اجرای یک بخشنامه یا دستورالعمل سازمان یابد، وظیفه‌ای نیست که تنها با رفتن به کلاس درس و بیان مطالبی به‌صورت صوری انجام شود. وقتی هدف غایی ما از تعلیم و تربیت نوجوانان و جوانان، ارتقاء معرفتی آنان و رشد استعدادهای بالقوه خدادادی آنان باشد، به‌نحوی که بتوانند با ماهیت دانش ریاضی آشنا شده، از یادگیری آن لذت ببرند و از آن در مسائل روزمره زندگی و در مسائلی که بعداً با آن مواجه می‌شوند استفاده کنند، مأموریت واقعی معلمان، دبیران و برنامه‌ریزان بیشتر آشکار می‌شود.

آموزش و یادگیری ریاضیات، یا بهتر بگوییم تعلیم و تربیت ریاضیات، مقوله‌ای است که همه ابعاد تربیتی از اهداف آموزش ریاضیات را دربرمی‌گیرد. از جزئی‌ترین تا کلی‌ترین مباحث، از طبیعت و محتوای دانش ریاضی، فرایندهای یاددهی و یادگیری ریاضیات در کودکان، جوانان و حتی بزرگسالان و سبک‌های یادگیری انسان‌ها و تدوین و تصویب برنامه‌های عملیاتی خرد و کلان آموزشی جزء مباحث آموزش ریاضیات یا تعلیم و تربیت ریاضیات هستند. پس از صدور بیانیه ۷۵ نفر از ریاضیدانان معروف دنیا در سال ۱۹۶۲، حرکت و توجهی جدی نسبت به آموزش ریاضیات، به‌عنوان یک حوزه معرفتی مستقل و در عین حال مرتبط با آمار، علوم تربیتی، روانشناسی، جامعه‌شناسی و فرهنگ به‌وجود آمد. در واقع بعد از صدور این بیانیه تلاش بر این است که ریاضیات، به‌ویژه ریاضیات مدرسه، از علمی برای نخبگان به علمی برای همگان مبدل شود و ریاضیات مردمی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار باشد.

بیانیه

بیانیه زیر یکی از سندهای معتبر تاریخی در زمینه آموزش و یادگیری ریاضیات است. تحولات عمده در تدوین و تکوین برنامه‌های درسی ریاضی متعاقب پرواز قمر مصنوعی شوروی سابق در سال ۱۹۵۷ انجام گرفته است. در این دوره عده‌ای از ریاضیدان‌ها شروع به برنامه‌ریزی برای آموزش دوره عمومی کرده و به‌دنبال آن به تدوین کتاب‌های درسی همت گماشتند. بعضی از این افراد متأثر از مکتب‌های جدید ریاضی به‌ویژه فلسفه صورت‌گرایی با پشتکار و وسواس خاصی مسئولیت تهیه برنامه درسی را به‌عهده گرفتند. با این حال افراط در اشاعه این نگرش، سایر ریاضیدان‌های برجسته را دچار نگرانی فزاینده‌ای کرد. آنها احساس می‌کردند که برنامه‌ریزان گروه اول دایه‌های دلسوزتر از مادر برای ریاضی شده‌اند. این دسته از ریاضیدان‌ها در بیانیه‌ای که به امضای ۷۵ نفر از آنها رسید دلایل خود را ابراز کردند. ذیلاً، اهمّ عنوان‌های این بیانیه را ارج می‌نهیم.

چگونه ریاضیاتی باید آموزش دهیم

معمولاً آموزش ریاضیات در مدارس ابتدایی و متوسطه بسیاربسیار عقب‌تر از نیازمندی‌ها و ضرورت‌های امروزه است. تحولات اجتماعی، صنعتی و تکنولوژی در قرن حاضر بسیار سریع‌تر از آن است که تصور کنیم؛ در حالی‌که تدوین کتاب‌های درسی و محتوای درسی که باید آموخته شود در بستری بوروکراتیک و اداری اتفاق می‌افتد و با نگاهی محافظه‌کارانه مستلزم گذشت زمان بسیار است. بنابراین این اصل پذیرفته‌شده از سوی همگان را توصیه می‌کنیم:

این ادعا که موارد موضوع‌هایی که در مدارس متوسط تدریس می‌شود کهنه و منسوخ است. باید به‌دقت توسط معلمین، دبیران و بالاخص برنامه‌ریزان نقد و بررسی گردد.

با این‌حال باید اذعان کرد که جبر مقدماتی، هندسه مسطحه و شکل‌های فضایی، مثلثات و حسابان هنوز هم پایه و هسته آموزش دبیرستانی‌اند. کاربران ریاضیات و دانش‌آموزان باید همه این موضوعات را فراگیرند چه بخواهند زمینه ریاضیدان شدن را کسب کنند، چه بخواهند فیزیکدان، یا شیمی‌دان گردند، متخصص علوم اجتماعی و یا مهندس شوند و یا حتی یک شهروند متمدن شده و در بخشی از جامعه کاردان و یا کارشناس بوده باشند.

برنامه درسی ریاضیات سنتی دربردارنده همه این موضوعات است. حذف هر یک از اینها خطرناک و مصیبت‌بار است.

چیزی که در برنامه درسی کنونی بد است به بدی و یا نامناسب بودن موضوعات ارائه شده مربوط نیست، بلکه به جدایی ریاضیات از حیطه‌های دیگر دانش و پژوهش به‌ویژه علوم فیزیکی و همچنین به مرتبط نبودن موضوع‌های دیگر مربوط می‌باشد. حتی روش‌ها و قضیه‌های درون موضوعات مختلف ریاضیات منفرد به‌نظر می‌رسند و در واقع برای دانش‌آموزان رموز نامرتبط به یکدیگر جلوه می‌کنند. نتیجه این فرآیند، آن است که یادگیری موارد ارائه‌شده برای دانش‌آموزان بی‌فایده و خسته‌کننده جلوه کند. وجه دیگر آموزش و یادگیری ریاضیات روش یادگیری آن است که آن‌هم بر مشکلات دانش‌آموزان افزوده می‌گردد، چرا که روش صحیح یادگیری درگیر کردن دانش‌آموزان با موضوع ارائه‌شده از راه ارائه فعالیت‌های طراحی شده است که معمولاً در کلاس‌های درس بدان پرداخته نمی‌شود. البته باید توجه داشت که تعداد کمی از دانش‌آموزان از این گذرگاه عبور خواهند کرد و آن‌هم دانش‌آموزان بسیار مستعد هستند که علیرغم محتوا و روش (برنامه درسی) آموزش ریاضیات، ریاضیدانان آینده خواهند شد؛ اما اکثر دانش‌آموزانی که بدنه جامعه شغلی آینده را می‌سازند چه بسا خاطره خوبی از فراگیری ریاضیات نداشته باشند جدا کردن محتوای درسی از سایر موضوعات علمی را صوری کردن، مجرد کردن و یا انتزاعی کردن ریاضیات می‌نامیم. اما باید توجه داشت که صورت‌گرایی زودرس ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منجر شود. معرفی زودرس مفاهیم و پدیده‌های ریاضی، به شکل مجرد با مقاومت ذهن‌های نقاد و کنجکاو روبرو می‌شود، ذهن‌هایی که قبل از پذیرش، تجرید و انتزاع

دوست دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی استوار است و چگونه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به‌کارگیری معقول مجموعه‌ها، زبان و مفاهیم مجرد جبر می‌تواند پیوستگی و ارتباط بیشتر و وحدت مطالب برنامه درسی ریاضیات را به‌همراه داشته باشد. معهذا باید پیش از معرفی اصطلاح‌ها و مفاهیم ریاضیات نوین، به‌وسیله ملموسات و محسوسات کافی، تمهیدات و مقدمات لازم انجام گرفته باشد نه آنکه با تکرار صرف واژه‌های تخصصی به آموزش آن پرداخته شود. در هر درس نیز به‌وسیله کاربردهای دربرگیرنده و واقعی و اصیل چنین مطالبی آموزش داده شود. ریاضیات دارای وجوه گوناگون بسیاری است. ریاضیات می‌تواند به‌عنوان ابزاری برای درک و فهم دنیای اطراف ما مورد توجه و استفاده قرار گیرد کما اینکه به احتمال قوی برای ارشمیدس و نیوتن از همین وجه دارای ارزش بوده است. همچنین ریاضیات می‌تواند به‌عنوان یک بازی منطقی با قوانینی از پیش‌تعیین‌شده درنظر گرفته شود که در آن‌صورت اصل اساسی همانا احترام به قوانینی از پیش‌تعیین‌شده آن است. چند سیما و منظر دیگر از ریاضیات وجود دارد. یک ریاضیدان حرف‌های ممکن است عنایت و لطف بیشتری نسبت به یکی از این وجوه داشته باشد. گستردگی وجوه مختلف ریاضیات کار تدوین و انتخاب برنامه درسی را برای متخصصین آموزش ریاضی دشوار می‌سازد. برنامه درسی می‌بایست قابلیت انعطاف بیشتری به‌لحاظ انتخاب موضوع و نیز به‌جهت ارتباط بین ریاضی و علوم دیگر داشته باشد. همچنین برنامه محتوایی باید به‌گونه‌ای سامان یابد که توجه دقیق به تشخیص، تفکیک و تفاوت بین مواردی که به‌طور منطقی باید از پیش ارائه شوند و مواردی که در آموزش تقدم و ترجیح دارند داشته باشد. تنها از این راه می‌توان امیدوار بود که ارزش‌های اساسی، بنیادی، معنا و روح ریاضیات، هدف‌ها و کاربردهای آن قابل دسترسی برای همه دانش‌آموزان باشد و صدالبته برای آنهایی که ریاضیدان آینده خواهند شد.

به چه کسانی آموزش دهیم؟

برنامه درسی ریاضیات دبیرستان بایستی نیازمندی‌های همه دانش‌آموزان را درنظر بگیرد. چنین برنامه‌ای می‌بایست زمینه فرهنگی آنان را نیز در آموزش دخیل بداند. در اینجا این پرسش پیش می‌آید که آیا ریاضیاتی که به دانش‌آموزان یک منطقه شهری و صنعتی آموزش داده می‌شود با ریاضیاتی که می‌بایست به دانش‌آموزان در یک روستای دورافتاده تدریس گردد متفاوت است؟ در بخش قبل گفته شد که برنامه تحصیلی ریاضیات باید از انعطاف بیشتری برخوردار باشد. **انعطافی که به دبیران مدرسه اجازه دهد تا درصدی از موارد محتوای برنامه را تغییر داده و یا تعویض نمایند.**

چگونه ریاضیات را آموزش دهیم؟

برخی از ریاضیدانان و متخصصین آموزش ریاضی برآنند که یادگیری و آموزش هر موضوع می‌بایست به‌همراه تاریخچه آن موضوع اتفاق افتد، زیرا علم هنگامی به‌طور کامل درونی و ادراک می‌شود که از تاریخ پیدایش آن الهام گرفته شـود. بر این اســاس باید در توضیح و تشریح یک ایده از پیدایش و تکوین آن و روند شکل‌گیری تاریخی آن شروع کرد. این روش ممکن است یک اصل کلی را پیش‌رو نهد و آن اینکه:

بهترین روش هدایت و توسـعه ذهنی افراد این اسـت که فرآیند رفت و برگشــت و چرخشی از توسعه ذهنی فراهم کنیم و راهبردهای مهم این رفت و بازگشت‌ها را ارائه دهیم.

برای مثال، مقایسه مجموعه‌های نامتناهی را درنظر می‌گیریم. در وهله اول با راهنمایی دانش‌آموزان و براساس اصل تناظر یک‌به‌یک به‌آسانی می‌توانیم نتیجه بگیریم که N مجموعه‌ای طبیعی، با Z مجموعه اعداد صحیح هم‌عدد است.

در ادامه می‌توانیم نشـان دهیم که مجموعه اعداد طبیعی N با Q مجموعه اعداد گویا، هم‌عدد اسـت. حال ممکن است این باور تقویت گردد که همه مجموعه‌های عددی نامتناهی هم‌عددند. در صورتی‌که دانش‌آموزی به چنین حدسی نایل شود نباید بلافاصله به وی گفت که حدس او صحت ندارد بلکه با ارائه مثالی دیگر باید به او کمک کنیم که با چرخشی ذهنی به نادرستی حدس خود پی ببرد. مثلاً مجموعه N را با مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و ۱ یعنی بازه $(۰,۱)$ مقایسه کند.

برخــی این روش را روش تکوینی (Generic Method) می‌نامند. ما در فصل دوم روشــی عملیاتی‌تر ارائه می‌دهیـم که هم براســاس روش تکوینی بوده و هم به‌گونه‌ای ســاده‌تر قابل طراحی بــرای معلمان و دبیران ریاضی باشد تا ضمن آن بتوانند از طریق ارائهٔ فعالیت‌های طراحی‌شده به دانش‌آموزان کمک کنند تا مفاهیم و موضوعات علمی را به‌درستی ادراک کرده و به‌طرز فعالانه‌ای یاد بگیرند.

جالب است که به‌لحاظ تاریخی نیز ریاضیات به شاخه‌ای از معرفت‌های بشری گفته شده است که دانستن آن برای همه الزامی بوده است. در واقع امر، واژه Mathematics که ریشه‌ای یونانی دارد به‌معنی دانستنی‌های عمومی اسـت. در آن روزگاران یونان باســتان، هر کسی که می‌خواســت مهندس یا معمار شود، سیاستمدار یا حقوقدان گردد و یا هر رشته تخصصی دیگر را درپیش گیرد، می‌بایست با دانش ریاضی روز خود آشنایی کافی داشته باشد.

متأسفانه کلمه «ریاضیات»، در زبان و ادب پارسی، به هیچ‌وجه مترادف واژه Mathematics نمی‌باشد.

به‌هر حال آموزش ریاضیات، هم‌اکنون به‌عنوان یکی از شــاخه‌های اصلی ریاضیات تلقی شــده و در این حوزه معرفتــی، پژوهش‌هــای مهمی در ســطح ملی، منطقه‌ای یا حتــی بین‌المللی در جریان می‌باشــد. هدف این

پژوهش‌ها ارتقاء روش‌های یاددهی، یادگیری، بهینه کردن محتوای ریاضیاتی که باید تدریس گردد، کاربردی کردن ریاضیات و توسعه توانایی‌های بالقوه شهروندان به‌عنوان انسان‌هایی منطقی، خلاق، مبتکر و بالنده می‌باشد. امروزه نقش زیربنایی تعلیم و تربیت به‌طور عام و آموزش ریاضیات به‌طور خاص در توسعه و تعالی منابع انسانی بر هیچ‌کس پوشیده نیست.

۱-۱ پرسش‌های اساسی آموزش ریاضی

پروفسور گریفیت[۱] یکی از متخصصین آموزش ریاضی در کتابی تحت عنوان «ریاضیات، برنامه درسی و جامعه» سه پرسش را پیش‌روی برنامه‌ریزان آموزش ریاضی و کسانی که در صدد توسعه برنامه درسی هستند قرار می‌دهد. این سه پرسش از این قرارند:

۱. چرا باید ریاضیات را آموزش دهیم؟

۲. چه ریاضیاتی را باید آموزش دهیم؟

۳. به چه کسانی باید ریاضی تدریس کنیم؟

در ادامه و تکمیل این پرسش‌ها، پرسش چهارمی را نیز مطرح می‌کنیم:

۴. چگونه و به چه طریقی باید ریاضی را تدریس کنیم؟

دو پرسش اول که در واقع یک پرسش است مرتبط با ماهیت و چرایی ریاضیات است. در خصوص این پرسش باید گفت که ریاضیات محصول کوشش‌های فکر خلاق بشری است. ریاضیات یکی از نتایج تاریخی و فرهنگی انسان است. ریاضیات منعکس‌کننده بافت و زمینه اجتماعی است که در آن رشد و توسعه می‌یابد. از این جهت یک وجه آموزش ریاضی را جامعه‌شناسی دانسته‌اند.

هینگسون [۳] در مدلی برای تحولات و تکامل آموزش ریاضی یک وجه آن‌را جامعه‌شناسی دانسته است. کاوش‌های باستان‌شناسی نشانگر آن است که از وقتی بشر به اولین شکل تمدن خود رسیده است، با ریاضیات عدد آشنایی داشته است. همو از مفهوم تناظر یک‌به‌یک برای شمارش تعداد گوسفندانی که به چرا رفته‌اند در مواقع ترک محل خود و به‌هنگام بازگشت شبانه استفاده می‌کرده است. در دوره‌های بعدی تحول تمدن بشری، از دوره انسان شکارچی به انسان کشاورزی و دامداری، و سپس به دوره صنعتی و پسامدرنیسم در راستای نیازهای جوامع مربوطه، ریاضیات نیز نه تنها توسعه یافته، بلکه زمینه‌ساز توسعه جوامع انسانی بوده است. برای

۱. H.B. Griffith استاد ریاضیات و یکی از بنیانگذاران آموزش ریاضیات در انگلستان

آشنایی بیشتر در خصوص این پرسش می‌توان به مرجع [۸] و منابع دیگر تاریخ ریاضی رجوع کرد.

پرسش دوم در خصوص محتوای ریاضیاتی است که می‌بایست در هر مقطع تحصیلی به شاگردان آموزش داد. پاسخ به این پرسش متضمن بحث و تبادل نظر متخصصین برنامه‌ریزی درسی ریاضی است که معمولاً طی نشست‌هایی رسمی و غیررسمی انجام می‌گیرد. شوراهای برنامه‌ریزی درسی ریاضی، در اغلب کشورها مسئول تهیه و تصویب محتوای ریاضیاتی هستند که می‌بایست در مقطع تحصیلی و در هر سال تحصیلی تدریس گردد. این فرآیند، خود یکی از جنبه‌های تخصصی آموزش ریاضی است و بهینه کردن محتوای ریاضیات یکی از ظریف‌ترین و پیچیده‌ترین فرآیندهایی است که طی بحث و بررسی‌های تخصصی، انجام پژوهش‌های بنیادی و تعامل با معلمین و حتی مدیران بخش‌های مختلف اجتماعی صورت می‌گیرد.

پرسش سوم در خصوص وضعیت اجتماعی و روانشناختی یادگیرندگان است. شناخت وضعیت خانوادگی، اجتماعی شاگردان و توجه به تفاوت‌های آنان یکی از مؤلفه‌های مهم فعالیت یاددهی- یادگیری مؤثر و معنادار می‌باشد. آموزش معنادار نمی‌تواند ابتدا به ساکن اتفاق افتد، آموزش واقعی بر پایه دانش قبلی شاگردان استوار است. به‌لحاظ روانشناسی آموزش هر معرفتی می‌بایست در ارتباط با دانسته‌های قبلی شاگردان و استمرار آن باشد. آموزشی که بدون توجه به زمینه دانش قبلی شاگردان اعمال شود و یا در تضاد با دانش قبلی آنان باشد نمی‌تواند پایدار و مفید واقع شود.

هر یک از این چهار پرسش اساسی، به پرسش‌های جزئی‌تر دیگر منقسم می‌گردد. برای نمونه در ارتباط با پرسش سوم، به‌عنوان یک ریاضیدان و یا یک معلم ریاضیات می‌توانیم این پرسش را از خود مطرح کنیم که چرا برخی یا بسیاری از فراگیران با ریاضیات و درس ریاضیات مشکل دارند و آن‌را به‌درستی درک نمی‌کنند؟ به‌عبارت دیگر یادگیری معنادار برای آنان اتفاق نمی‌افتد، آیا عامل‌هایی موجبات ناتوانی در فهم درست مفاهیم و موضوعات ریاضی می‌شوند؟ چرا بعضی از شاگردان در خصوص یادگیری ریاضیات یا آزمون‌های آن دچار اضطراب می‌شوند؟ این در حالی است که بسیاری از دانش‌آموزان در درس‌هایی همانند علوم اجتماعی، تاریخ، جغرافیا و یا ادبیات ترس از عدم موفقیت خویش ندارند. چه تفاوت‌هایی آموزش و یادگیری ریاضیات با آموزش سایر علوم دارد؟ برخی از معلمین و حتی اساتید ریاضی بر این باورند که ماهیت ریاضیات باعث این اختلاف و تفاوت‌ها می‌شود. لیکن به‌نظر متخصصین آموزش ریاضی، روش‌های تدریس و ارائه ریاضیات و عدم توجه به وضعیت دانش‌آموزان و تفاوت‌های یادگیری آنان نقش اساسی در ناتوانی و عدم موفقیت دانش‌آموزان دارد.

پاسخ به پرسش شماره چهار مستلزم ارائه روش‌های یادگیری معنادار است که از آن به‌عنوان روش‌های فعال یادگیری یاد می‌شود. این مقوله موضوع فصل دوم این کتاب درسی می‌باشد.

پاسخ به دو پرسش شماره یک و دو منجر به تبیین اهداف آموزش و یادگیری ریاضیات می‌شود. پس از تعیین هدف‌های آموزش ریاضیات و براساس این هدف‌ها، محتوای ریاضیاتی که می‌بایست در هر مقطع تدریس گردد مشخص و تعیین می‌گردد و لذا پاسخگویی به پرسش دوم مستلزم پاسخ‌گویی به پرسش اول است که موضوع بحث این فصل است.

پاسخ به پرسش شماره دو از وظایف شوراهای برنامه‌ریزی درسی ریاضی است. در این‌گونه شوراها، ضمن مطالعات و پژوهش‌های مستمر، محتوای ریاضیاتی که می‌بایست در مقاطع مختلف تدریس گردد برنامه‌ریزی شده و ریزمواد آن به‌دقت تبیین می‌گردد. در واقع اهداف کلی ریاضیات که در راستای پاسخگویی به پرسش اول قبلاً تعیین شده است، به شکل جزئی‌تر و در قالب مواد درسی مشخص در رابطه با پرسش دوم ارائه می‌گردد. این‌گونه مواد درسی مشخص‌شده را اصطلاحاً اهداف خاص یا اهداف مشخص[1] می‌نامند.

در بسیاری از کشورهای پیشرفته علمی، پس از تهیه و تدوین ریزمواد درسی که همان اهداف خاص آموزش و یادگیری ریاضیات است، آنها را در اختیار مدارس قرار می‌دهند تا معلمین و دبیران ریاضی براساس آن محتوای درسی موردنظرشان را تدوین و تدریس کنند. در این رابطه اهداف خاص به‌گونه‌ای تدوین می‌گردد که چارچوب محتوای برنامه‌ریزی درسی را به شکل دقیقی مشخص می‌کند. به‌عبارت دیگر، تنها به ذکر عناوین موضوعات درسی اکتفا نمی‌شود، بلکه حدود کار و مثال‌هایی که نقش محدودکننده و مشخص‌کننده برنامه درسی است کاملاً ارائه می‌گردد. این‌گونه اهداف خاص یا ریزمواد درسی را ریزمواد تفصیلی می‌نامند. یک معلم یا یک دبیر حرفه‌ای با داشتن ریزمواد تفصیلی، می‌تواند به‌راحتی محتوای هر درس و مطالبی را که در یک ساعت درسی باید تدریس کند تهیه و تدوین کرده و اجرا نماید. ما در پایان این فصل نمونه‌ای از ریزمواد درسی ریاضی دوره ابتدایی را برای آشنایی بیشتر ارائه خواهیم کرد.

۱. Specific aims

۲-۱ هدف‌های کلی آموزش ریاضی در دبیرستان

هدف‌های کلی آموزش و یادگیری ریاضیات دبیرستانی را می‌توانیم در چهار حوزه به‌شرح ذیل طبقه‌بندی کنیم.

- نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان
- نقش ریاضیات در تربیت فکر
- نقش ریاضیات در تأمین آینده فرد و جامعه
- نقش ریاضیات در تربیت فرهنگی و ارتقاء آن

مراد از فرهنگ، مجموعه باورها، اعتقادات و رفتارهای فردی و اجتماعی یک قوم می‌باشد.

لازم بـه یادآوری اسـت که منظـور از پدیده‌های جهان، تنهـا پدیده‌ها و حوادث طبیعی، نظیر شـکل‌بندی منظومه‌ها، کهکشـان‌ها، سـیاره‌ها و پیدایش مواد مختلف نیسـت، بلکه خود انسـان، جامعه انسانی، ترافیک و... همه و همه پدیده‌های طبیعی انگاشـته شـده و به‌طور کلی هر چیزی که مشـمول مطالعه انسـان بوده و دستخوش تغییر و تبدیل گردد، یک پدیده طبیعی یا اجتماعی قلمداد می‌گردد.

البته در عالم هستی، به‌جز ذات باری‌تعالی همه چیز در حال تغییر و تکوین است.

بخش اعظم ریاضیات در شـناخت این‌گونه پدیده‌ها حتی در شـاخه‌هایی از علوم نظیر زیست‌شناسی، شیمی، مهندسـی ژنتیک، باستان‌شناسـی و ترافیک به‌کار گرفته می‌شود. همچنین تحولات اجتماعی جوامع مختلف بشـری، رفتارهای سـازمانی، مالی و اقتصادی را نیز باید جزء پدیده‌های جهان به‌شمار آورد که امروزه مطالعه این‌گونه پدیده‌ها بدون یاری جستن از تفکر ریاضی و مدل‌سازی ریاضی ممکن نمی‌باشد.

اکنون هر یک از اهداف کلی فوق‌الذکر را به اهداف جزئی‌تر و مشخص‌تر تقسیم‌بندی می کنیم.

بخش ۱: نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان

- ۱-۱: آشنایی با ساختارهایی از جهان که در تجربیات دانش‌آموز ظاهر می‌شود و دسته‌بندی آنها
- ۱-۲: آموزش تکنیک‌های لازم برای مدل‌سازی ریاضی، مسائل روزمره زندگی و تجزیه و تحلیل این مدل‌ها
- ۱-۳: آموزش ریاضی مورد نیاز برای مطالعه سایر موضوعات علمی
- ۱-۴: آشنایی با نقش ریاضیات در صنعت، تکنولوژی و کشاورزی

بخش ۲: نقش ریاضیات در تربیت فکر

- ۲-۱: پرورش قوه تفکر ریاضی (اندیشه استدلال، استنتاج)
- ۲-۲: پرورش دقت و عادت به نظم فکری و پرورش قوه نقد و انتقاد
- ۲-۳: پرورش قوه ارائه یک فکر به‌طور دقیق
- ۲-۴: پرورش اعتماد به نفس در به‌کار بردن دانسته‌های ریاضی برای حل مسائل
- ۲-۵: پرورش قوه خلاقیت و درک شهودی
- ۲-۶: پرورش قوه تعمیم و تجرید[1]

در اینجا باید متذکر شد که قوه خلاقیت را خداوند عزوجل به همه انسان‌ها عرضه کرده است و انسان را خلیفه و جانشین خویش در زمین کرده است. برخی از دست‌اندرکاران به‌جای فعل «پرورش» از فعل «ایجاد کردن» در این موارد استفاده کرده‌اند، مانند آنکه: ایجاد قوه خلاقیت، ایجاد تفکر و نظایر اینها. در حالی‌که قوای تفکر، خلاقیت و کشف از قبل در انسان‌ها به‌طور فطری نهادینه شده است، نظام آموزش و پرورش می‌بایست زمینه رشد و پرورش آنها را فراهم کند.

بخش ۳: نقش ریاضیات در تأمین فرد و جامعه

- ۳-۱: آماده‌سازی دانش‌آموز برای تحصیلات بعدی
- ۳-۲: آماده‌سازی دانش‌آموز برای ورود به بازار کار

بخش ۴: نقش ریاضیات در ارتقاء سطح فرهنگی

- ۴-۱: آشنایی مقدماتی با تاریخ ریاضیات و شناخت‌شناسی
- ۴-۲: آشنایی مقدماتی با زیباشناختی ریاضی
- ۴-۳: آشنایی مقدماتی با زبان و نمادهای ریاضی

دانش‌آموز باید در طول تحصیل خود به‌تدریج با زیبایی‌های ریاضیات آشـــنا شوند تا از فراگیری این علم لذت بیشتری ببرند. زیبایی‌های ریاضیات جنبه‌های ایده‌آلیستی دارند.[2] (زیبایی معنوی یا ایده‌آلیستی)

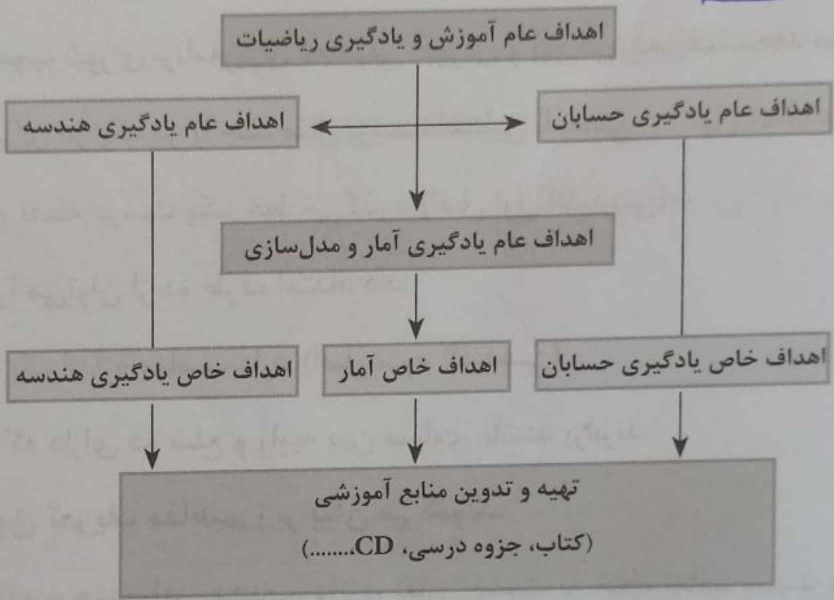
اکنون به‌شـــرح برخی از اهداف خاص آموزش و یادگیری ریاضیات می‌پردازیم. این اهداف در خصوص هندسه دبیرستانی بوده و از ریزمواد مصوب شورای برنامه‌ریزی تحصیلی وزارت آموزش و پرورش (سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی) استخراج شده است.

۱. Generalization & abstraction

۲. Aesthetic

مشابهاً، اهداف خاص موضوعاتی نظیر جبر مقدماتی دبیرستان، حسابان، آمار و احتمال، و ریاضیات گسسته را می‌توان فهرست‌بندی و تبیین کرد.

قبل از اینکه اهداف خاص هندسه را به تفصیل بیان کنیم، اهداف عام آموزش و یادگیری هندسه را ذکر می‌کنیم. این اهداف عمومی در واقع ارتباطی بین اهداف عام یادگیری ریاضیات و اهداف خاص آموزش و یادگیری هندسه برقرار می‌کند. در نمودار ذیل این‌گونه ارتباط‌ها را نشان داده‌ایم.



۱-۳ اهداف خاص آموزش ریاضی:

قبلاً گفتیم که یک هدف خاص، آموزش و یادگیری ریاضی یک موضوع خاص و یا یک مطلب مشخص را در راستای تأمین اهداف عام آموزشی معین می‌کند؛ از آنجایی که ریاضیات به شاخه‌های مختلف تقسیم می‌شوند اهداف خاص، نیز به اهداف خاص موضوعی تقسیم‌بندی می‌گردد.

۱-۳-۱ اهداف عام آموزش هندسه:

۱. ارائه آشناترین و قدیمی‌ترین نمونه از یک علم قیاسی- استنتاجی

۲. ارائه هندسه به نوعی که باعث بالا بردن درک شهودی، دانش‌آموزان باشد و در عین حال استعداد و توانایی ذهنی آنها را محدود ننماید.

۳. ارائه یک الگوی صحیح از استدلال (در بیان مطالب علمی) به‌وسیله درج مطالب به‌صورت منطقی و مستدل. همچنین روش‌هایی (با حدالامکان مفاهیم لازم منطقی) نظیر برهان خلف، مثال نقض و... مورد استفاده و بحث واقع می‌شود.

۴. بالا بردن اطلاعات علمی دانش‌آموزان در یکی از قدیمی‌ترین، جالب‌ترین و شیرین‌ترین شاخه‌های علم (هندسه) به‌صورتی که او را جلب و جذب به فراگیری علوم ریاضی نماید.

۵. ارائـــه هندســـه به‌عنوان یک علم زیباشناســـی در قالب مطالبی نظیر، تشـــابه، تقـــارن و.....و بالا بردن دقت دانش‌آموزان در ترسیمات هندسی

۶. پرورش فکر، پرورش ذهن خلاق و بالا بردن درک فضایی دانش‌آموزان

۷. رفع نیاز سایر دروس ریاضی و غیرریاضی در ارتباط با کاربردهای ریاضی نظیر روابط هندسی و محاسبات سطح و حجم.

۱-۳-۲ اهداف خاص آموزش هندسه در دبیرستان:

(مسترج از ریزمواد مصوب شورای برنامه‌ریزی تحصیلی آموزش و پرورش) تعریف‌شده‌ها، مفهوم نخستین، برهان، قضیه، اصل موضوع (برای هر یک دو یا چند مثال بزنید.) آشنایی با بعضی از اصول موضوعی هندسه به‌شرح زیر:

- الف) از هر دو نقطه درست یک خط می‌گذرد (اصل اول اقلیدسی)
- ب) هر خط را می‌توان از دو طرف امتداد داد.
- پ) هر زاویه یک اندازه مناسب دارد (اصل سوم اقلیدسی)
- ج) دو مثلث که دارای دو ضلع و زاویه بین مساوی باشند برابرند.

با توجه به اصول فوق تعریف مفاهیم زیر بیان می‌شوند.

نیم‌خط، مجموعه محدب، چندضلعی محدب، دایره، تقارن نسبت به خط، تعامد نسبت به خط، انواع زاویه‌ها، جمع زاویه در صفحه، داخل و خارج زاویه در صفحه، نیمســـاز زاویه، نیمســـازهای داخلی و خارجی و براساس اصول موضوعه، ضمن استدلال منطقی، احکامی ثابت می‌شود مانند:

۱. بررسی حالت تساوی دو مثلث

۲. مجموع زاویه‌های یک مثلث

۳. نامساوی‌های دو مثلث (نسبت به زاویه‌ها و اضلاع)

۴. نیمسازهای داخلی و خارجی یک مثلث و تعامد آنها

۵. دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند.

۶. فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه تا دو ضلع زاویه برابر است.

۷. دایره (تقاطع دو دایره، تقاطع خط و دایره)

۸. چگونگی رسم نیمساز، عمودمنصف، رسم خط عمود بر یک نقطه

۹. چگونگی رسم مثلث در چهار حالت مختلف (با خط‌کش و پرگار)

تعریف مکان هندســـی و ارائه مثال‌هایی در حدود مطالب گفته‌شـــده قبلی (چند مثال ارائه دهید.) نقاطی از صفحه که با دو ضلع زاویه فاصله‌اش یکی است.

۱۰. حالت‌های خاص مثلث (قائم‌الزاویه، متساوی‌الساقین و....) و خواص آنها

۱۱. بیـــان اصـــل ۵ اقلیدس (قضیه بدون اثبات) قضیـــه اول از نقطه خارج از یک خط و تنها یک خط به موازی آن خط می‌توان رسم کرد.

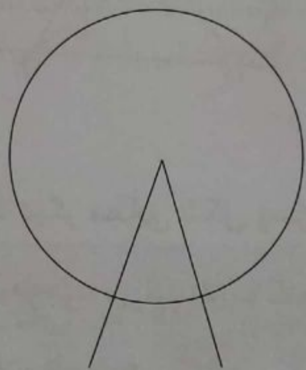
۱۲. هرگاه خطی یکی از خط‌های موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند.

۱۳. هرگاه خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.

۱۴. اثبات تساوی زاویه‌های متقابل و متبادل

۱۵. مجموع زاویه‌های داخل مثلث برابر دو قائمه است.

۱۶. زاویه‌های داخلی، خارجی، محاطی و ظلی در دایره



باید حس درک زیبایی و زیباشناختی را در دانش‌آموزان تقویت کرد. این امر می‌تواند به کشف حقایق ریاضی بیانجامد. در واقع بیشتر ریاضیدان‌ها با تقویت زیباشناختی و لذت، از درک نظم و الگوهای موجود در طبیعت به کشف ریاضیات نائل می‌شوند. برای نمونه گلدباخ[1] با مشاهده اینکه هر عدد زوج را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت، حدس مشهور خود را ارائه داد.

$$۴=۲+۲ \qquad ۶=۳+۳ \qquad ۸=۵+۳ \qquad ۲۰=۱۷+۳$$

$$۲۸=۲۳+۵ \quad ۱۰۰=۹۷+۳ \quad ۵۰=۴۳+۷ \quad ۱۲۰=۹۷+۲۳$$

الگو و نظم در سرتاســر ریاضیات وجود دارد، در هندســه، تئوری اعداد، آنالیز، توپولوژی و ســایر شــاخه‌های ریاضی، به مثال‌های ساده زیر توجه می‌کنیم. مثال‌های دیگری در سطح ریاضیات متوسطه بیابید.

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳=(۱+۲+۳)^۲ \quad ۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳=(۱+۲+۳+۴)^۲$$

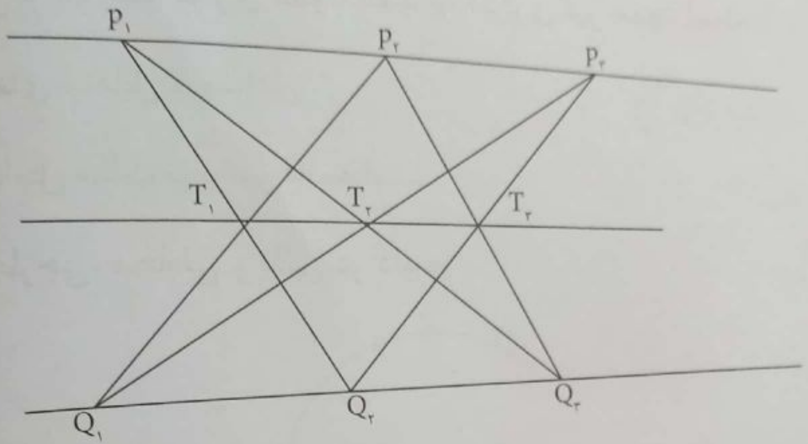
$$\frac{۴}{۹}=۰/۴۴۴۴, \quad \frac{۵}{۳۷}=۰/۱۳۵۱۳۵۱۳۵\cdots$$

۱. Goldback

فاقد نظم $\sqrt{2} = 1/41$

قضیه پاپوس:

بر دو خط دلخواه l_2, l_1 ، ۶ نقطه را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کنیم (بر هر خط ۳ نقطه)



هر نقطه، در یک خط را به دو نقطه از خط دیگر مطابق شکل وصل می‌کنیم. بدین‌ترتیب شش پاره‌خط رسم می‌شود. از تقاطع این پاره‌خط‌ها سه نقطه به‌وجود می‌آید. ثابت کنید T_3, T_2, T_1 بر یک خط راست قرار دارند. مرجع [۹] هندسه تألیف آقای رستمی ملاحظه شود.

۴-۱ اهداف آموزش ریاضی از دیدگاه معرفت‌شناسی:

اهداف خاص آموزش ریاضی را به‌لحاظ وجوه مختلف حوزه‌های معرفت‌شناســی نیز می‌توانیم مورد توجه قرار دهیم و دسته‌بندی کنیم. به‌عبارت دقیق‌تر هر موضوع ریاضی را می‌توان جداگانه و یا همزمان از سه بعد مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. سه بعد مختلف معرفت‌شناسی شامل حوزه‌های دانشی، مهارتی و نگرشی می‌باشند. برای مثال، ذیلاً بعضی از موضوعات مختلف (اهداف خاص) ریاضی را از این منظر ذکر می‌کنیم.

۱-۴-۱ اهداف دانشی (knowledge):

جبر و نمایش نمادی	آمار و احتمال	هندسه مسطحه و فضاها	تابع و مفاهیم آن
مفهوم تساوی، بزرگتری یا کوچکتری	قطعیت و عدم قطعیت	اشکال هندسی مسطحه	ماشین ورودی و خروجی
مفهوم جبری جمع و تفریق	احتمال	اشکال هندسی فضایی	اعمال اصلی جمع و ضرب و...
مفهوم جبری ضرب و تقسیم	داده‌ها	قضایای هندسه مسطحه	به‌عنوان تابع عملگر
عبارت‌های جبری و مقادیر عددی آنها	پیشامد	تشابه	(در فضا و در صفحه)
نماد علمی	میانگین و میانه و مد	سطح و مساحت	توابع خطی
مختصات دکارتی	نمودار داده‌ها	حجم‌ها و گنجایش	تغییر (رشد) متغیر
تجزیه به عوامل اول			
اتحادها و نمایش نمادی آنها			
معادله			

در جدول بعدی به‌عنوان نمونه بعضی از اهداف مهارتی را ذکر می‌کنیم[1].

۱-۴-۲ اهداف مهارتی:

تخمین و تقریب	اندازه‌گیری	استفاده از ابزارها و تکنولوژی	مدل‌سازی و الگویابی، پیش‌بینی	استفاده از نمودارها و شهود هندسی	کشف استدلال
تخمین محاسبات عددی تخمین کمیات هندسی آزمون درستی تخمین تخمین اندازه‌های دما با جرم، زمان، طول و... تصمیم‌گیری برای لزوم تخمین کاربرد تخمین در حل مسئله بیان روش‌های تخمین بیان استراتژی‌های تقریب نمونه‌ای برای تخمین	اندازه‌گیری کمیت‌های هندسی اندازه‌گیری زمان با جرم دما اندازه‌گیری واحد اندازه انتخاب واحد اندازه‌گیری استاندارد کردن واحد اندازه‌گیری تبدیل واحد خطای اندازه‌گیری تجسم شهودی از واحدهای اندازه‌گیری تعیین ابزار مقایسه اندازه‌ها محاسبات پولی	درک محدودیت‌های ابزار اندازه‌گیری دقت ابزار اندازه‌گیری مهارت در استفاده از ابزارهای رسم هندسی (خط‌کش، پرگار و...) استفاده از ماشین‌های محاسباتی چرتکه، ماشین‌حساب و کامپیوتر کار با ابزارهای اندازه‌گیری زمان، جرم و دما و... ساختن ابزار مقایسه‌توانایی‌های ابزارها ابزارها	کشف الگوهای عددی و بیان آن کشف الگوهای هندسی و بیان آن تشخیص الگوهای مشترک طبقه‌بندی (رنگ و اندازه و شکل و...) جمع‌آوری و سازمان‌دهی تحلیل داده‌ها پیش‌بینی پیش‌آمدهای احتمال مدلسازی جبری طراحی الگوهای عددی و هندسی مرتب کردن داده‌ها رسم نمودار	توصیف و تحلیل نمودار حل معماهای تصویری (تفکر دیداری) طبقه‌بندی و دسته‌بندی اشکال هندسی اشکال سه‌بعدی و تصاویر دوبعدی به چند روش و عکس ارزیابی انطباق نتیجه نهایی با زندگی واقعی	استدلال استنتاجی شناسایی و تعلیم الگوها ارزیابی اطلاعات و استخراج اطلاعات مورد نیاز ارزیابی روند کشف قابل مشاهده کردن نتایج بیان استدلال به دیگران انتخاب از بین چند راه مختلف بررسی حالت‌های خاص تجربه، استقراء، استدلال برهان خلف توضیح مستدل

۱. skills

مهارت فرضیه‌سازی و نظریه‌پردازی

اهم این مهارت‌ها در جدول زیر ذکر شده‌اند.

فرضیه‌سازی و نظریه‌پردازی	راهبردهای حل مسئله	شمارش	محاسبات عددی و عملیات ذهنی
بنای فرضیه‌سازی بر تجربه آزمودن فرضیه‌ها و نظریه‌ها تشخیص ارتباط بین فرضیه‌ها جرح و اصلاح تئوری‌ها براساس نتایج تجربی	حل مسأله کمکی تعمیم مسأله، تخصیص مسأله به‌کارگیری برهان خلف کار با استقراء ریاضی	شمارش خطی استفاده از فرمول دسته‌بندی با تعداد مساوی برقراری ارتباط تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه، استفاده از تقارن درشمارش	ضرب و جمع ذهنی اعداد گرد کردن، تقسیم ذهنی تخمین کمیت‌های هندسی (طول، سطح، حجم) تخمین فاصله‌ها

۱-۴-۳ اهداف نگرشی:

متأســفانه اکثر معلمین و دبیران ریاضی توجه چندانی به اهداف نگرشی[1] آموزش و یادگیری ریاضیات ندارند. عمده فعالیت یاددهی و یادگیری آنان متوجه تأمین اهداف دانشــی و مهارتی می‌باشد. در بررسی‌های به‌عمل آمده از آزمون‌های رســمی، سراسری و حتی آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها مشخص شده است که بیش از نود درصد پرســش‌های طرح‌شده درباره حیطه‌های مهارتی و دانشی می‌باشــد. این واقعیت منجربه برداشت‌های نادرســت و نارســا از علوم ریاضی نزد دانش‌آموزان و والدین آنها شده و بعضاً موجبات نگرشی منفی را در باب ریاضیات در ذهنیت آنان فراهم می‌کند. هرگاه در صدد آن باشیم که ریاضیات جایگاه واقعی خود را در ذهنیت دانش‌آموزان، معلمان و مردمان پیدا کند، می‌بایست محتوای ریاضیاتی که تدریس می‌شود، نحوه تدریس آن و اعمال آن در برنامه درســی و نگرش به ریاضیات را متحول نماییم. رشــد تفکر ریاضی و تفکر علمی بدون توجه کافی به اهداف نگرشــی ممکن و میســر نمی‌باشد. برخی از برنامه‌ریزان از اهداف نگرشی به‌عنوان اهداف بینشی نیز یاد کرده‌اند.

در جداول بعدی اهم اهداف نگرشی آموزش و یادگیری ریاضیات در حوزه‌های تخصصی‌تر به تفکیک ذکر شده‌اند.

۱. ریاضیات در پرورش توانایی‌های ذهنی نقش مؤثری دارد.	**۲. ریاضیات ابزار مؤثری در نشر فرهنگ جست‌وجوگری علمی و ایجاد روحیه تحقیق است.**	**۳. در حل مشکلات و مسائل زندگی روزمره می‌توان از ریاضیات استفاده کرد.**
- ریاضیات توانمندی فرد را در مهارت‌های برقراری ارتباط پرورش می‌دهد. - استراتژی‌های تفکر در زندگی روزمره کاربرد دارند. - ریاضی از عوامل مؤثر در پرورش و رشد توسعه تفکر انتقادی است. - ریاضیات می‌تواند تفکر استنتاجی و منطقی را توسعه دهد. - ریاضیات روند تفکر را منظم می‌نماید. - ریاضیات می‌تواند تفکر خلاق را پرورش دهد. - ریاضیات قوه تخیل را تقویت می‌نماید. - آموزش ریاضی ذهن را برای تفکر مجرد آماده می‌سازد. - ریاضیات می‌تواند تفکر همگرا و تفکر واگرا را تقویت کند.	- آموزش ریاضیات موجب تقویت روحیه نقد و بررسی و روحیه انتقادپذیری می‌شود. - در جست‌وجوگری علمی دانسته‌های خود را بررسی و بین دانسته‌های خود و مسئله ارتباط برقرار می‌کنیم. - توصیف چیزها با دقت ممکن این امکان را به‌وجود می‌آورد که پژوهشگران مشاهداتشان را با هم مقایسه کنند. - یک پژوهشگر در مورد محیط اطراف خود کنجکاوی می‌کند و سؤالات و مسائل جدیدی طرح می‌کند. -شنیدن و تحمل آراء مخالف به پژوهشگر کمک می‌کند، علمی‌تر تحقیق کند. - یک محقق در مراجعه به یک مسئله از اطلاعات سایرین و سایر اطلاعات در دسترس برای رسیدن به حقیقت استفاده می‌کند.	- ریاضیات به قانونمند شدن زندگی روزمره کمک می‌کند. - انسان‌ها در زندگی روزمره از الگوهای ریاضی مشترکی پیروی می‌کنند. - بدون دانش ریاضی زندگی روزمره مختل می‌شود. - قضاوت کردن در مسائل زندگی روزمره باید مبتنی‌بر بررسی علمی باشد. - برای حل مسائل زندگی روزمره ناچار به توسعه ریاضیات هستیم. - تغییرات شرایط زندگی موجب پیدایش مشکلات و مسائل جدید می‌شود و ریاضیات می‌تواند به حل این مسائل جدید کمک کند. - پرورش مهارت‌های تفکر کمک به حل مسائل زندگی روزمره می‌کند. - مدل‌سازی ریاضی یک روش اساسی برای حل مسائل زندگی روزمره است.
۴. بین طبیعت و دانش ریاضی تعامل وجود دارد.	**۵. در یادگیری و توسعه ریاضیات تجربه‌گرایی نقش مهمی ایفا می‌کند.**	**۶. ابزارها و تکنولوژی با دانش و آموزش ریاضی تعامل دارند.**
- بسیاری از ایده‌های ریاضی از طبیعت گرفته شده‌اند. - نیاز به اعداد از نیازهای طبیعی بشر است. - ریاضیات کمک می‌کند طبیعت اطراف خود را بشناسیم و برای شناخت بهتر طبیعت ناچار به توسعه ریاضیات هستیم.	- فرضیه‌سازی عمدتاً باید بر تجربه استوار شده باشد. - ایده‌های ریاضی بر فرآیند کسب تجربه ما تأثیر می‌گذارند و برعکس. - تجربه به درونی شدن آموخته‌ها کمک می‌کند.	- تکنولوژی در برابر فراهم کردن امکاناتی که به ما می‌دهد محدودیت‌هایی نیز دارد. - مدل‌های ریاضی بر ساختار تکنولوژی تأثیر می‌گذارند. - ساختن ابزارهای تکنولوژی و توسعه ایده‌های ریاضی بر هم تأثیر متقابل دارند.

باید توجه و اعتقاد داشت که:

- با استفاده از ریاضیات می‌توان در جهت کنترل طبیعت قدم برداشت. - طبیعت همیشه ساده‌ترین راه را انتخاب می‌کند.	- برای یقین تجربه کافی نیست. - تجربه‌های تکرارپذیر نقش مهمی در توسعه ریاضیات دارند. - وقتی تحلیل دو پژوهشگر از یک پدیده متفاوت است، باید تجربه نشان بدهد که کدام نظر معتبرتر است.	- تکنولوژی بدون انسان پیشرفت نمی‌کند. - استفاده از تکنولوژی در آموزش بر تفکر آموزشی و چگونگی یادگیری آن مؤثر است.
۷. در شناخت، طراحی و ارزیابی سیستم‌ها می‌توان از ریاضیات کمک گرفت.	**۸. از مدل‌های ریاضی برای حل مسائل زندگی روزمره استفاده می‌کنیم**	
- ریاضیات پدیده‌های طبیعی و اجتماعی را به‌عنوان یک سیستم بررسی می‌کند. - معمولا با تقسیم یک سیستم به چند سیستم کوچک‌تر و بررسی ارتباط آنها می‌توان آسان‌تر آن سیستم را بررسی کرد. - یک سیستم را می‌توان با یک سیستم ساده‌تر شبیه‌سازی کرد و آن‌را به‌طور تقریبی بررسی کرد. - با اثرگذاری روی سیستم و بررسی عکس‌العمل آن می‌توان سیستم را بهتر شناخت. - گاهی یک سیستم را می‌توان تحلیل کرد، به‌گونه‌ای که همان وظایف را ساده‌تر انجام دهد. - از مدل‌سازی ریاضی در شناخت سیستم‌ها استفاده می‌کنیم.	- مدل‌هایی که برای حل یک مسئله ساخته می‌شود برای مسائل مشابه قابل کارکرد است. - مدل‌سازی ریاضی یک روش اساسی برای حل کردن مسائل زندگی روزمره است. - در مدل‌سازی ممکن است بعضی از محدودیت‌ها باعث شود بعضی ویژگی‌ها در حل مسئله نادیده گرفته شود. - مدل‌های ریاضی ساخته‌شده می‌توانند باعث پیدایش ایده‌های جدید یا توسعه و تعمیم ایده‌های قبل شوند. - در مدل‌سازی یک پدیده طبیعی از ساده‌ترین مدل‌ها که بتواند پدیده‌ها را توصیف کند، استفاده می‌کنیم.	
۹. همکاری و مشارکت باعث کارایی بیشتر، تفکر کامل‌تر و یادگیری بهتر می‌شود.	**۱۰. ریاضیات، شبکه‌ای به‌هم مرتبط از ایده‌ها، مفاهیم و مهارت‌ها است.**	
- در هنگام حل مسئله بحث جمعی به‌سهولت و صحت حل کمک می‌کند. - مقابله نظرات مختلف توسط جمع در موضوعات درسی و پرسش و پاسخ به درک بهتر و یادگیری مؤثرتر کمک می‌کند. - عضویت در یک گروه مطالعه در یادگیری کمک می‌کند. - کار گروهی می‌تواند باعث افزایش مجموع توانایی‌های فردی اعضاء گروه شود. - رعایت اخلاق و آداب بحث گروهی در نتیجه‌گیری بهتر مؤثر است.	- یک مسئله را می‌توان با ایده‌های متفاوت حل کرد. - شناسایی شبکه ارتباط مفاهیم و مهارت‌ها موجب عمیق‌تر شدن یادگیری می‌شود. - شبکه ارتباطی به کشف و رسیدن به حقایق که قبلاً نمی‌دانستیم و یا توجه نداشتیم، کمک می‌کند. - شبکه ریاضیات مانند درختی است که هم از ریشه رشد می‌کند و به عمق می‌رود و هم از شاخه و برگ.	

۱-۵- روانشناسی هدف‌های نگرشی

نگرش دانش‌آموزان نسبت به علوم ریاضیات و ماهیت آن نقشی اساسی در موفقیت یا عدم موفقیت آنان در یادگیری آن دارد. بسیاری از کسانی که از یادگیری ریاضیات سرخورده شده‌اند تحت‌تأثیر نگرش منفی معلمین و یا والدین خود نسبت به ریاضیات از ادامه کار بازمانده‌اند. تلقین اینکه «ریاضیات علمی مشکل است» توسط بسیاری از همکلاسی‌ها، معلمین و حتی برخی دبیران ریاضی متأسفانه مانعی جدی برای یادگیری و یاددهی ریاضیات است.

معمولاً نگرشی منفی نسبت به ریاضیات یک استراتژی دفاعی موفق برای خودپنداری مثبت فرد است. چنین فردی برای دفاع از خویشتن خویش، در مقابل ناتوانی در حل مسأله‌های ریاضی و احساس ناخوشایندی که در کلاس درس ریاضی دارد چنین نگرشی منفی از خود بروز می‌دهد. این تفسیر به او کمک می‌کند که احترام خودش را در موقعیتی که مورد تهدید است حفظ کند. در عمل نشان داده شده است که این‌گونه نگرش‌ها می‌توانند به‌طور آشکاری در یک زمان نسبتاً کوتاه تغییر کنند. معلمین و دبیران توانای ریاضی به‌خوبی می‌توانند با بالا بردن توانایی دانش‌آموز در حل مسأله‌های ریاضی و شرکت دادن آنان در فعالیت‌های ریاضی کلاسی، نگرش‌های مثبت آنان را تا حد چشمگیری رشد و ارتقاء دهند.

همان‌گونه که اشاره گردید یکی از شیوه‌های مؤثر برای افزایش نگرش‌های مثبت، مشارکت دانش‌آموزان در کلاس ریاضی برای کسب تجارب خوشایند در ریاضیات است. اگر دانش‌آموزان متوجه شوند که ریاضیات پیش‌دانشگاهی علمی است تا اندازه‌ای نیمه‌تجربی و علمی است که دارای وجوه زیبایی خاص خودش است، نگرش مثبت آنان نسبت به ریاضیات تقویت خواهد شد.

طرح مسأله‌های ساده سرگرم‌کننده و خلاقیت‌های ساده هندسی و عددی می‌تواند ابزار مناسبی برای تغییر یا تقویت نگرش دانش‌آموزان باشد.

به‌علاوه باید این نکته را نیز مورد توجه قرار داد که عواطف فرد نسبت به فعالیت ریاضی یکی از مؤلفه‌های نگرش است. وجود تجارب مثبت در فعالیت ریاضی سبب می‌شود، دانش‌آموز زمانی که به‌طور منفرد می‌خواهد به حل مسأله‌های ریاضی بپردازد، با تداعی این تجارب مثبت، انگیزه بیشتری برای پرداختن به مسأله‌های ریاضی داشته باشد.

برگزاری امتحانات دشوار می‌تواند اثر معکوس بر این فرآیند داشته باشد، زیرا تداعی‌کننده تجارب منفی است. به‌علاوه، افزایش ترس و اضطراب نسبت به ریاضی در دانش‌آموزان سبب می‌شود تجارب منفی بیشتری در دانش‌آموزان شکل بگیرد و بی‌تردید در فرآیند و رویه یادگیری آنها تأثیر منفی بگذارد. پژوهش‌های مختلف مؤید این گفتار می‌باشد.

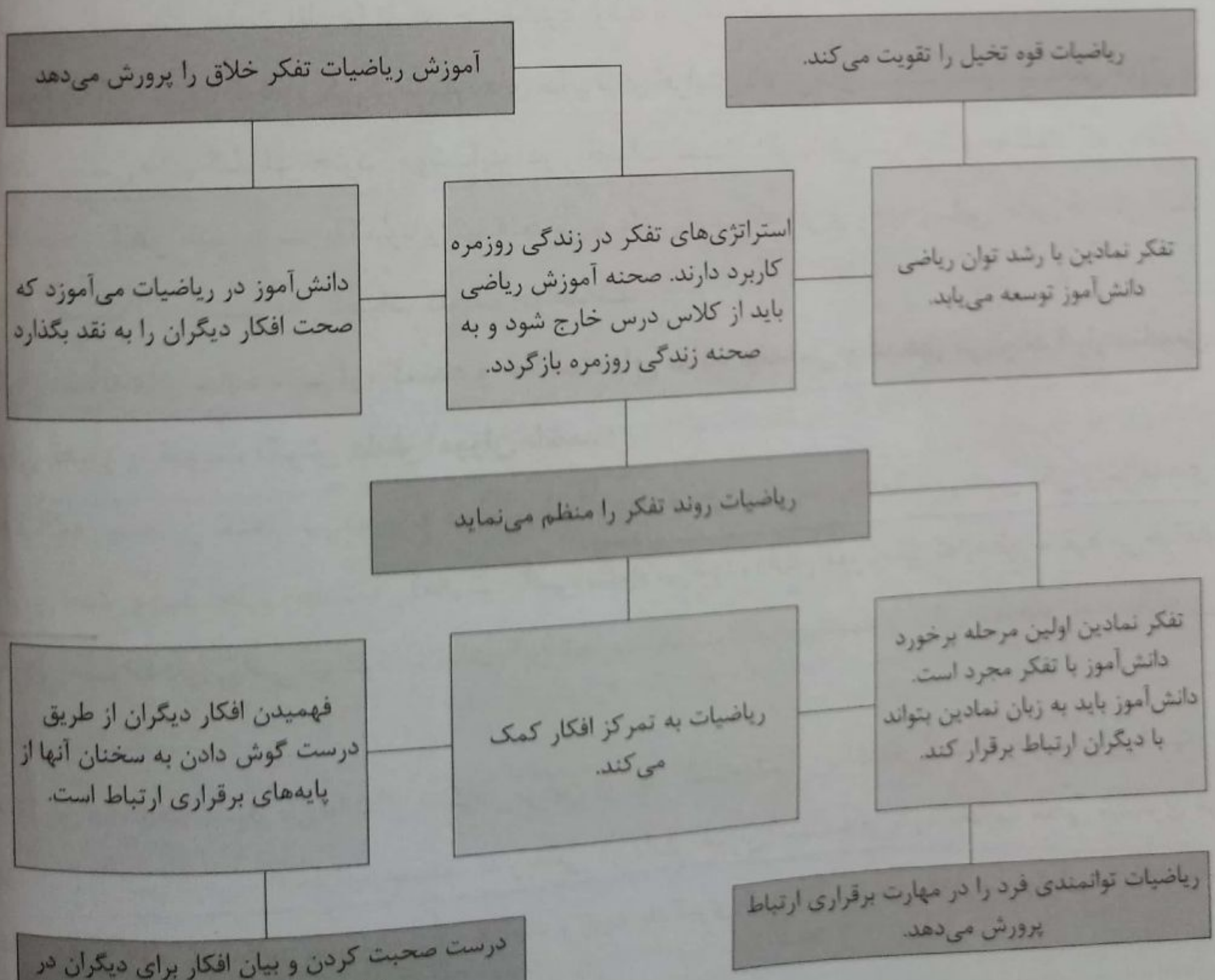
در فصل چهارم این کتاب به این بحث بیشتر خواهیم پرداخت که توجه بیش از اندازه به امتحانات رسمی و سراسری نظام آموزشی، یادگیری مستمر مدرسه را تحت‌تأثیر قرار داده و باعث ترس و اضطراب و افزایش نگرش‌های منفی دانش‌آموزان می‌شود. **نظام یادگیری نباید فرمانبردار نظام امتحانات باشد بلکه نظام امتحانات، بیش از تأمین هر هدف دیگر مبنایست در خدمت ارتقاء آموزش و یادگیری مدرسه باشد.**

پژوهش‌های متعددی درخصوص نقش اضطراب و تشویق در یادگیری ریاضیات و نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضیات توسط محققین مختلفی انجام گرفته است.

انجمن ریاضی لندن در سال ۲۰۰۰ به مناسبت گردش قرن، پژوهشی را در خصوص طرز تفکر و نگرش عامه مردم نسبت به ریاضیات انجام داده است. نگرش مردم کشورهای پیشرفته‌تر نسبت به ریاضیات و دیدگاه آنان در خصوص نقش ریاضیات در توسعه علمی و اجتماعی با نگرش مردم کشورهای در حال توسعه تفاوت چشمگیری دارد.

۱-۵-۱ شبکه هدف‌های نگرشی

۱. ریاضیات در پرورش توانایی‌های ذهنی نقش مؤثری دارد.



۶-۱ هدف‌های تفصیلی

در بیشتر کشورهای پیشرفته علمی هدف‌های خاص آموزش و یادگیری ریاضیات، که همان سرفصل‌ها یا ریزمواد درسی است، به‌صورتی مفصل‌تر تبیین می‌گردد. بر این اساس، معلمان و دبیران ریاضی می‌توانند خودشان و یا با همکاری همکارانشان محتوای درسی مربوطه را نوشته و جهت تدریس به طراحی درس بپردازند. ریزمواد درسی تفصیلی، تفاوت چندانی با ریزمواد درسی معمولی ندارد، الا اینکه در ازای ارائه هر موضوع درسی، مثال‌هایی استاندارد و مشخص نیز ارائه می‌گردد. این مثال‌ها، محدودیت و چارچوب موضوع مربوطه را مشخص می‌کند. بدین طریق، با داشتن ریزمواد تفصیلی همه معلمان یک درس، در سطحی مشابه و هم‌تراز هم عمل کرده به‌گونه‌ای که گویی از یک کتاب درسی مصوب تدریس می‌کنند.

اهم مزایای ریزمواد تفصیلی یا هدف‌های تفصیلی مشروح به‌شرح ذیل است:

۱. دانش‌آموزان الزامی به تهیه کتاب درسی مشخصی ندارند. معلم و دبیر هر درس با ارائه درس به‌گونه‌ای عملی و نوشتاری محتوای درس را ارائه داده و دانش‌آموزان به ناچار از یادداشت‌برداری و ثبت موارد مهم تدریس در دفتر یادداشت خود می‌کنند.

۲. دانش‌آموزان ناچارند ضمن توجه جدی به درس معلمین و دبیران خود، یادداشت‌برداری کرده و از این طریق به‌گونه‌ای فعال در امر یادگیری مشارکت کنند. در حالی‌که در کلاس‌های درسی که با کتاب درسی رسمی تدریس می‌شود، غالب دانش‌آموزان به‌صورتی غیرفعال و منفعل به سخنان معلمین گوش داده و فعالیت نوشتاری و یادداشت‌برداری نخواهند داشت.

۳. در نظام آموزشی که فاقد کتاب رسمی است، معلمین و دبیران نمی‌توانند کاستی‌های یادگیری و فراگیری دانش‌آموزان را به کتاب درسی نسبت دهند. در نظام آموزشی سنتی کتاب‌محور، اکثر معلمین و دبیران ریاضی از کتاب‌های درسی رسمی شکوه دارند. شکوه‌هایی از این قبیل که در گزارشات رسمی معلمین و گروه‌های درسی ارائه گردیده است: ذیلاً نقل شده است:

> «در ص ۱۲۷ کتاب..... مسأله‌های بیشتری ارائه گردد.»[1]
>
> «مسأله شماره ۱۲ کتاب... مشکل می‌باشد، پیشنهاد می‌شود این مسأله از کتاب حذف گردد.»
>
> «تعریف تابع در فصل دوم کتاب...... بهتر است به‌صورت زوج مرتب ارائه گردد.»
>
> «مسأله‌های ص..... ساده هستند، مسأله‌های مشکل‌تری به این مجموعه اضافه گردد.»

۱. این قسمت از یک گزارش که به گروه ریاضی دفتر تدوین و تألیف سازمان پژوهش رسیده است عیناً اقتباس شده است. برای احتراز از هر پیش‌داوری نام کتاب درج شده است و جای آن‌را خالی گذاشته‌ایم.

ظاهراً برخی معلمین و دبیران ریاضی غافل از این هستند که کتاب درسی وسیله‌ای است در اختیار معلمین که چارچوب محتوای درسی را به‌نحوی ارائه کرده است. یک معلم یا یک دبیر متخصص می‌تواند هرجا لازم باشد مسأله‌هایی ساده‌تر طراحی کند و به دانش‌آموزان ارائه دهد؛ برعکس هر کجا لازم باشد می‌توانند مسأله‌های بیشتری با درجه سختی بالاتر طراحی کند و به دانش‌آموزان عرضه کند.

در نظام آموزشی سنتی کتاب‌محور، معلمین و دبیران کاستی‌های آموزشی را متوجه کتاب‌های درسی می‌کنند، در حالی‌که برنامه‌ریزان و مؤلفین کاستی‌های آموزشی را به دبیران ریاضی نسبت می‌دهند و این سیکل ناقص همچنان ادامه دارد. در حالی‌که در نظام‌های آموزشی پیشرفته و پویا، دبیر هر درس مسئول یاددهی و یادگیری صحیح درس به دانش‌آموزان است؛ در واقع دبیر درس متولی آن درس است، همچنان که در دانشگاه هیچ مدرسی ملزم نیست که از کتاب خاصی تدریس کند، بلکه خود به طراحی درس خود همت می‌گمارد و مسئول درس است. در دوران‌های دبستان و دبیرستان نیز می‌بایست متولی درس اختیار بیشتری داشته باشد و در ازای آن پاسخگوی کاستی‌های فراگیری دانش‌آموزان خود باشد.

۴. در نظام‌های آموزشی سنتی و غیرپویا، مدیریت سازمانی آموزش و پرورش موظف است همه ساله کتاب‌های درسی متنوعی تهیه و تدوین کرده و با یارانه‌های بسیار بالایی در اختیار دانش‌آموزان قرار دهد. این امر سبب تحمیل بار مالی بسیار بالایی بر نظام آموزشی است. چنین بودجه‌ای می‌تواند صرف ارتقاء شغلی و تخصصی دبیران و معلمین شده و از روابط بوروکراسی طویل و عریضی که درگیر تهیه و انتشار کتاب‌های درسی است بکاهد.

۵. الزام دانش‌آموزان به استفاده از کتاب‌های درسی رسمی، آنها را از حق انتخاب کتاب درسی محروم می‌کند. در کشورهای پیشرفته علمی که دولت‌ها موظف به انتشار کتاب رسمی درسی نیستند، شرکت‌های انتشاراتی چند کتاب درسی تولید و منتشر می‌کنند. هر مدرسه می‌تواند کتاب‌های درسی خاصی را جهت استفاده به دانش‌آموزان معرفی کند و یا مقداری از آن‌را تهیه و جهت استفاده در کتابخانه مدرسه نگهداری کند. در این مقام، چنین کتاب‌هایی جنبه کتاب‌های کمک‌درسی داشته لکن در واقع کتاب درسی محسوب می‌شوند؛ در نتیجه اجباری به تهیه آن توسط دانش‌آموزان نمی‌باشد. این امر رقابت مناسبی را در بین شرکت‌های تهیه و انتشار کتاب‌های درسی برقرار کرده که به رقابتی شدن بیشتر مدارس به نوبه خود کمک خواهد کرد.

۶. بررسی‌ها و مطالعات نشانگر آن است که دانش‌آموزان مطالب فراگرفته خود را عمدتاً از معلمین و دبیران خود کسب می‌کنند. در یک نظرسنجی و مطالعه میدانی دانش‌آموزان گفته‌اند که تنها حدود ۲۳ درصد مطالب کسب‌شده را از کتاب‌های درسی فراگرفته‌اند. این مقدار با مسئولیت‌پذیری بیشتری از جانب معلمین و دبیران و ارتقاء شغلی آنان به آسانی قابل جبران می‌باشد.

۱-۶-۱ هدف‌های تفصیلی (ادامه)

در اینجا به‌عنوان نمونه مجموعه‌ای از هدف‌های خاص تفصیلی ریاضیات را ذکر می‌کنیم. هدفمان از ارائه این مجموعه صرفاً آشـنایی با فرم ارائه هدف‌های تفصیلی اسـت. در کشورهای توسعه‌یافته علمی، معمولاً اهداف آموزش ریاضیات به‌صورت هدف‌های تفصیلی ارائه می‌گردد. معلمین و دبیران براساس این‌گونه هدف‌ها، خود به طراحی و تدوین دروسـی که می‌بایسـت ارائه دهند همت می‌گمارند. در این‌گونه کشورها، چیزی به‌عنوان کتاب درسی رسمی وجود ندارد، بلکه با داشتن مجموعه هدف‌های تفصیلی که مشخص است در چه مقطعی باید تدریس گردد و با وجود معلمین و دبیران حرف‌های مجرب نیازی به کتاب درسـی رسـمی وجود ندارد، گرچه کتاب‌های کمک درسی چندی توسط ناشرین خصوصی تهیه و تولید می‌شود.

نمونه هدف‌های تفصیلی

در صفحات بعد، نمونه‌ای از هدف‌های تفصیلی را ارائه می‌کنیم. این هدف‌ها که منبع رسـمی درسـی کشـور انگلستان می‌باشد، عیناً به زبان اصلی آن عرضه شده است.

در ستون اول هدف‌های مشخص یا همان ریزمواد نقل شده است. در راستای هر یک از این هدف‌ها، در ستون دوم، نمونه محدودکننده تأمین آن هدف با ذکر مثال‌هایی مشـخص شده است. بنابراین ملاحظه می‌شود که هر هدف مشـخص به‌طور مفصل تبیین گردیده اسـت تا معلمین بهتر بتوانند براسـاس آن به تهیه و طراحی درسی خود بپردازند.

همچنان‌که گفته شد، این اهداف را عیناً از منابع خارجی نقل کرده‌ایم تا با فرمت و نحوه ارائه آن‌که به‌صورت سـندی‌ملی ارائه می‌گردد، بیشـتر آشنا شویم. معهذا ترجمه بخش‌هایی از این متن در صفحات بعدی آورده شده است.

در این بخش به‌عنوان نمونه به ترجمه مواد صفحه ۲۶ می‌پردازیم:

سطح آموزشی	بیان هدف‌های اکتسابی	مثال‌ها
۵	دانش‌آموزان باید بتوانند: • از نمـاد اندیس‌ها بـرای بیان قاعده ضـرب، توان اعداد صحیح استفاده کنند. • از کسرهای واحد استفاده کنند.	بدانند که $۲^۵ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ $۲^۳ \times ۲^۲ = ۲^۵$ از نسبت مقیاس $۱ : ۵۰$ برای رسم نقشه کلاس استفاده کنند.
۶	• کسـرهای اعشـاری را بخوانند، بنویسند و مرتب کنند. رابطه بین ارزش مکانی‌ها را درک کنند. • هم‌ارزی کسـرها و نسـبت‌ها را بفهمند و از آن استفاده کننـد؛ اینهـا را با کسـرهای اعشـاری و درصدها مرتبط سازند.	توضیح دهند که ۰/۲۳ برابر ۲ دهم و ۳ صدم و یا کلاً ۲۳ صدم است. بدانند که $\frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۱۰} = ۰/۴ = ۴۰٪$ بدانند که طول‌های ۱۲cm, ۸cm هر یک طرح و نقشه به نسبت $\frac{۲}{۳}$ اند.
۷	• یک عدد صحیح مثبت را به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول بیان کنند.	۱۴۷ را به‌صـورت $۳ \times ۷ \times ۷$ و یا ۳×۷^۲ بیان کنند. ک.م.م و ب.م.م دو عدد صحیح را پیدا کنند.
۸	• اعداد را به فرم استاندارد با استفاده از توان‌های مثبت و یا منفی ۱۰ بیان کنند. • از قاعده توان‌ها برای توان و ریشه استفاده کنند.	بدانند که $۱ = ۱۰^۶$ میلیون و $۲۲۷۳۱ = ۲/۲۷۳۱ \times ۱۰^۴$ از کلید x^y در یک ماشین‌حسـاب و یا رایانه اسـتفاده کنند.
۹	• بین گویا و گنگ تمایز قائل شوند.	بدانند که $\pi, \sqrt{۲}$ گنگ‌اند. در بسـط اعشاری بدانند که کدام اعداد بسـط اعشاری با ارقام مکرر و کدام‌ها بسط اعشاری با ارقام نامکرر دارند.
۱۰	از مهارت‌ها، دانش و درک کسب‌شـده در سـطح پایین‌تر استفاده کرده و آن‌را به طیف گسترده‌تری تعمیم دهند.	

هدف‌های اکتسابی آموزش استفاده و کاربرد ریاضیات:

سطح آموزشی	بیان هدف‌های اکتسابی	مثال‌ها
۱	دانش‌آموزان باید بتوانند: • از مواد (کاغذ و خط‌کش و...) برای یک کار ریاضی استفاده کنند. • در مورد کار خود صحبت کنند و پرسش نمایند. • براساس تجربیات خود پیش‌بینی کنند.	اشیاء را مقایسه کنند تا دریابند کدام بلندتر، یا طویل‌تر است. در خصوص مجموعه‌ای از اشیاء، سخن گفته و آنها را مقایسه کنند؛ به‌عنوان پرسش‌ها که طرح می‌کنند، کدام مداد بلندتر است؟ از یک تعادل و میزان برای مقایسه اشیاء استفاده کنند؛ پیش‌بینی کنند که کدامیک از اشیاء سنگین‌تر است.
۲	• مواد و ریاضی مناسب را برای یک کار مطرح‌شده به‌کار گیرند. • کاری که می‌کنند توصیف کنند، یافته‌های خود را بنویسند و نتیجه‌ها را چک کنند. • این پرسش را مطرح و یا بدان پاسخ دهند: چه اتفاقی می‌افتد هرگاه......؟	از شصت خود برای اندازه‌گیری طول یک میز استفاده کنند. قصه‌هایی در باب جمع و تفریق اعداد تا ۱۰ سرهم کرده و نتیجه را با استفاده از ماشین‌حساب و یا هر وسیله دیگر چک کنند. پیش‌بینی کنند که آیا اگر محتوای یک استوانه را درون استوانه دیگر با قطری متفاوت بریزیم آیا آن‌را پر می‌کند؟
۳	• ریاضی و مواد مرتبط با یک کار را انتخاب کنند؛ نتیجه را کنترل و چک کرده و بررسی کنند که آیا چنین نتیجه‌ای معقول است؟ • کار انجام‌یافته را توضیح داده و یافته‌های خود را به‌گونه‌ای منظم و سامان‌یافته ثبت کنند. • حدسیه‌سازی و پیش‌بینی کرده و حدس خود را بیازمایند.	فاصله پیرامونی هال (سالن) مدرسه را تخمین بزنند؛ روش مناسب برای اندازه‌گیری آن و واحد مناسب را انتخاب کنند؛ و نتیجه را مقایسه کنند. اتود ساده‌ای برای سالن مدرسه رسم کرده و اندازه‌های به‌دست‌آمده را برای آن وارد کنند.

۴	• ریاضی و مواد قابل استفاده برای یک کار را انتخاب کنند؛ کار مربوطه را به‌گونه‌ای روشمند طراحی کنند. • یافته‌های خود را به‌طور نوشتاری یادداشت کرده و آنها را به‌صورت شفاهی یا دیداری با مناسبت مربوطه ثبت کنند. • از مثال‌ها برای تست گزاره‌ها و احکام و تعاریف استفاده کنند.	سازکار لازم برای نشستن افراد در یک کنسرت مدرسه را با استفاده از دستگاه مختصات برای شماره‌گذاری صندلی‌ها سامان دهند. آخرین رقم حاصل‌ضرب اعداد مختلف را کاوش کرده مانند اعداد ۸,۱۶,۲۴,۳۲,۴۰,۴۸,... نتیجه را یادداشت و ارائه دهند. این گزاره را تست کنند: هرگاه شما شماره سه خانه مجاور متوالی را با هم جمع کنید همیشه مضربی از سه به‌دست می‌آورید؛ برای مثال‌های متنوع: $۳۴+۳۶+۳۸=۱۰۸=۳\times۳۶$ $۸۱+۸۳+۸۵=۲۴۹=۳\times۸۳$
۵	• ریاضی و مواد مرتبط با یک کار را انتخاب کند؛ چک کند که سه، یک اطلاع کافی است؛ به‌گونه‌ای روشمند کار کرده و پیشرفت خود را مرور نماید. • اطلاعات ریاضی را که به‌صورت شفاهی، کتبی و یا تصویری عرضه شده‌اند تفسیر کند. • احکام ساده‌ای بیان و آن‌را تست کند.	از جدول ساعات حرکت اتوبوس‌ها و قطارها استفاده کرده و صفر خود را طراحی کنند. حاصل‌ضرب‌های شماره‌های سه‌خانه مجاور متوالی را کاوش کنند. (برای مثال $۶\times۴=۲۴,\ ۷\times۹=۶۳,\ ۵\times۷=۳۵,\ ۸\times۱۰=۸۰$) احکامی در باب این نتیجه‌ها بیان داشته و نتیجه را با استفاده از یک ماشین‌حساب و یارانه چک کند.
۶	• یک کاری را با انتخاب ریاضی و منابع مناسب طراحی کند؛ چک کند که اطلاعات کافی در دست است و هر اطلاع پنهان را به‌دست آورد؛ از روش آزمون و خطا و پیشرفت استفاده کند. • برای ارائه و ثبت یافته‌ها بتواند به‌گونه شفاهی، کتبی و یا تصویری عمل کند. • به فرضیه‌سازی ساده بپردازد و تعمیم‌سازی کرده و آن‌را تست کند؛ در موقعیت‌های ساده به تعریف و استدلال، با درجه‌ای از دقت بپردازد.	وسیله و معیاری برای اندازه‌گیری دقیق یک پریود (دوره) زمانی طراحی کند؛ از قبیل آنکه چگونه بدون استفاده از ساعت می‌توان ۲ دقیقه زمان را اندازه اندازه‌گیری کرد. در دستگاه مختصات دکارتی (شطرنجی) بتواند نقش توابع ساده همانند $x \to ۲x+۳$ (یا $y=۲x+۳$) را نقطه‌یابی کند. این الگو را بررسی کند: $۱\times۲\times۳\times۵+۱=۳۱$ $۱\times۲\times۳\times۵\times۷+۱=۲۱۱$ $۱+۲+۴+۸=۱۵=۲^{۴}-۱$ $۱+۲+۴+۸+۱۶=۳۱=۲^{۵}-۱$ قا...

۷	دانش‌آموزان باید بتوانند: • یک کار ریاضی را طراحی کنند؛ در چارچوب یک ساختار مشخص و از پیش‌تعیین‌شده به‌گونه‌ای روشمند کار کنند؛ در خصوص اطلاعاتی مفروض قضاوت کنند؛ از روش آزمون و پیشرفت استفاده کنند؛ پیشرفت خود را مرور نمایند. • یک استدلال را تعقیب کنند؛ ناسازگاری احتمالی آن‌را نشان دهند؛ با استفاده از رویکردهای دیگر سیر بررسی و استدلال را تعقیب نمایند.	از یک صفحه مقوای مستطیل شکل یک کانتینر مکعبی طراحی کرده و بسازند به‌نحوی که حجم مکعب مستطیل حاصله ماکسیمم باشد. نمایش اعشاری کسرهای مختلف را با استفاده از یک ماشین‌حساب و یارانه کاوش کنند؛ مخرج کسرهای متنوع را بررسی کرده و نتایج حاصله را به روش‌های مختلف طبقه‌بندی کنند؛ درستی گزاره‌های مرتبط با نمایش اعشاری کسرهایی نظیر $\frac{۱}{۱۳}$ را کاوش کرده و اینکه این کسر دارای دوره تناوب مکرر شش‌رقمی است.
۸	• یک امر ریاضی را طراحی و برای انجام آن طرحی مشخص دراندازند؛ به‌گونه‌ای روشمند کار کنند؛ اطلاعات داده‌شده را از این منظر که آیا کامل‌اند چک کنند؛ بررسی کنند که آیا نتایج حاصله از نظم درستی برخوردارند؟ • گزاره‌ها را حکاکی کرده حدسی بسازند که به شکل استلزام منطقی اگر...... آنگاه.......... بوده باشد. بتوانند تعریف کنند، استدلال نموده، اثبات یا رد کنند.	در خصوص کاوش ارقام اعشاری و کسرها با استفاده از ماشین‌حساب و یارانه احکامی از این نوع بسازند؛ اگر مخرج کسر یک عدد اول به‌جز ۲ و ۵ باشد، آنگاه ارقام اعشاری تکرار می‌شوند؛ راستی نمایی در باب توضیحات و برهان‌های خود پیشنهاد کنند.
۹	• طراحی کنند، نقش درآورند و از راه انجام یک کار ریاضی به نتیجه‌ای موفقیت‌آمیز نایل شوند. • بیان کنند که آیا یک حدس درست، نادرست و یا اثبات‌نشده است؛ به تعریف استدلال بپردازند؛ با استفاده از مثال نقض رد کنند و یا اثبات نمایند؛ از نمادگذاری استفاده کنند؛ بتوانند از شرایط لازم و کافی استفاده کرده و آن‌را تشخیص دهند.	از یک سیم استفاده کرده فریم یک آباژور را طراحی کنند که نشانگر طول سیم و مساحت مواد مورد نیاز بوده باشد.

۱۰	• طراحی کنند، نقشی درآورند و از راه انجام یک کار ریاضی به نتیجه‌ای موفقیت‌آمیز برسند؛ برای مسائل راه‌حل‌های دیگری ارائه دهند و مسیرهای خاصی از استدلال را راستی‌آزمایی نمایند. • با استفاده از تعاریف و شرایط مینی‌مال داده شده به نمادسازی پرداخته و با اعتماد به‌نفس برهانی بسازند و یا با مثال نقض گزاره‌ای را رد کنند.	به کاوش نقش چراغ راهنمای ترافیک بپردازند و سیستم‌های خیابان‌های یک طرفه را برای مرکز شهر با استفاده از نقشه خیابان‌ها و جریان‌های ترافیکی طراحی کنند؛ تحلیلی از اثرات سیستم‌ها ارائه کرده و بهترین راه‌حل را پیشنهاد کنند. معادله $x^{۳} - ۵x + ۳ = ۰$ را بازنویسی کرده و از آن برای به‌دست آوردن فرمول تراجعی $x_{n+۱} = \frac{x_n^{۳} + ۳}{۵}$ استفاده کرده و این امر را که آیا برای مقادیر اولیه x همگراست یا واگرا آزمون نمایند.

ملاحظه می‌شود که برای هر فقره هدف درسی خاص، در مقابل آن حوزه محدودکننده و مشخصی به‌عنوان مثال (Example) ذکر شده است.

برای مثال در ص ۲۶ شماره ۹، برای تأمین این هدف که دانش‌آموز می‌بایست تفاوت عددهای گویا و اصم را بداند، به‌عنوان مثال ذکر شده است که دانش‌آموزان باید:

بدانند که $\sqrt{۲}$، π عددهایی اصم هستند و به این حقیقت شاخص آگاه باشند که در عددهای گویا اعشار ختم‌شده و یا مرتب و منظم تکرار می‌شوند، در حالی‌که در عددهای اصم اعشار با نظم و ترتیب معینی تکرار نمی‌شوند.

نتیجه می‌گیریم که هدف‌های تفصیلی بهترین راهکار برای ارائه یک محتوای درسی است.

۱-۶ تمرین

۱. براساس هدف‌های تفصیلی شماره ۴ در ص...... یک محتوای درسی مبسوط تهیه کنید.

۲. براساس شرح مندرج در شماره ۱۰ ص......... یک محتوای درسی مناسب جهت تدریس تدوین کنید.

۱-۷ تاریخچه برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

تا حدود کمی بیش از یک قرن پیش تحصیل معارف الهی و دانش بشــری منحصراً در حوزه‌های علمی دینی انجام می‌شـــده است. متأســـفانه از فعالیت‌های علمی و آموزشی این مرز و بوم در پیش از اسلام اطلاع دقیقی موجود نمی‌باشد. با این حال، براساس شواهد و قرائن اجتماعی، آموزش و یادگیری حق طبقه‌ای خاص در آن روزگاران بوده و هر کسی اجازه تحصیل و تدریس در آن زمانه‌ها را نداشته است. با پذیرش دین مبین اسلام، وضعیت طبقاتی حاکم بر جامعه دگرگون شـــد و آموزش برای همه آحاد مردم بلامانع تشـــخیص داده شد. با این وجود، حاکمان وقت برای خود مأموریتی در راســـتای اشـــاعه آموزش و همگانی کردن آن نمی‌شناختند. لکن حوزه علمی دینی، در کنار آموزه‌های دینی، بعضاً به علوم و ادبیات رایج و به ریاضیات نیز می‌پرداختند. ضمن تغییر و تحولات عظیم علمی و صنعتی در اروپای قرون هفدهم و بعد از آن، ایرانیان نیز در صدد اشاعه علم و دانش و بهره‌مندی از مزایای آن پرداختند. کوشـــش‌های ملت مردانی چون امیرکبیر در اشـــاعه علم و دانش که با جو حاکم اســـتبدادی در آن روزگاران توأم گردیده، توسعه مدارس جدیدی که مسئولیت آموزش علوم عقلی را داشتند به کندی صورت می‌گرفت. با این وجود، تأسیس دارالفنون را می‌بایست به‌عنوان جرقه‌ای در راستای توسعه و بیداری مردمان و دلسوزان این سرزمین درنظر گرفت.

از دارالفنون به‌عنوان ام‌المدارس یاد کرده‌اند، بدان جهت که نمونه یک مدرســـه مدرن علمی با هدف اســـتفاده از علوم در راســـتای رفاه و ترقی جامعه ایرانی بوده اســـت. ظاهراً اولین کتاب‌هایی که برای تدریس در زمینه ریاضیات به رشته تحریر درآمده توسط مدرسین این مدرسه بوده است. ذیلاً صفحه نخست کتابی تحت عنوان «اصول هندســـه» تألیف «حاج نجم‌الدوله میرزا عبدالغفـــار» و مقدمه آن‌را جهت اطلاع از تاریخ تألیف و تتبع در آن روزگار را نقل می‌کنیم. از تاریخ طبع این کتاب (۱۲۷۹ هجری شمســـی) بیش از ۱۱۰ ســـال می‌گذرد. این کتاب در مجموع سه بار به زیور طبع آراسته گردیده است؛ بار دوم به سال ۱۳۰۸ توسط مؤلف با تجدید نظر کلی و بار ســـوم توسط یکی از شاگردان مؤلف به‌نام ســـرتیپ مهندس میرزا عبدالرزاق خان با تجدیدنظر به چاپ رسیده است.

ما این مقدمه را عیناً به‌جهت اشاره‌ای به تاریخچه تألیف و برنامه‌ریزی درسی ریاضی در اینجا نقل کرده‌ایم. از مقدمه کتاب فوق‌الاشـــاره آشکار است که از تهیه و تألیف کتاب‌های درسی ریاضی متقارن با تأسیس حوزه علمی دارالفنون بوده اســـت. در این مقدمه، متأسفانه نامی از مؤسس آن میرزاتقی‌خان امیرکبیر نیامده است، بلکه در عوض تمجید و تکریم بسیار به شاه‌وقت یعنی به مظفرالدین‌شاه شده است! جالب‌تر آنکه انتشار کتاب مســـتلزم کسب مجوز بوده که با مهر حک شده در حاشـــیه مقدمه مشخص می‌باشد؛ اما معلوم نیست که این مجوز از چه نهادی کسب می‌شده است، وزارت علوم یا دستگاه حکومتی؟

در مقدمه به نقش ریاضیات در تأمین نیازهای تخصصی مهندســـین و ارتشـــیان اشـــاره شده است. امر تألیف کتاب‌های درسی تا پیش از وقوع انقلاب اسلامی در ایران به همین نحو ادامه داشته است، بدین‌معنی که بدون احســـاس نیاز به برنامه‌ریزی درســـی عناوین درســـی را به افرادی از حوزه‌ای تخصصی مربوطه واگذار نموده و چنین افرادی براساس تجزیه و سلیقه خود به تألیف عنوان درسی می‌پرداخته‌اند. ظاهراً، آنگونه که در مقدمه کتاب آمده اســـت، مؤلف یا چنین مؤلفینی با اســـتفاده از یک متن درسی خارجی به‌گونه‌ای به ترجمه و تألیف آن می‌پرداختند.

۱-۸ تمرین پروژه‌ای فصل یک

جورج پولیا یکی از متخصصین آموزش ریاضی اســـت که در دهه ۹۰ میلادی آثار مهمی در این زمینه از خود به‌جای گذاشته است. پولیا، مهمترین هدف آموزش و یادگیری ریاضیات را «اندیشیدن» قلمداد می‌کند. همو به معلمان و دبیران توصیه می‌کند که باید سطح توانایی اندیشیدن را در شاگردان خود ارتقاء دهند. به‌عبارتی، توصیه می‌کند که این قوه خدادادی را در شاگردان باید از قوه به فعل درآورند.

پولیا اضافه می‌کند که این اندیشه، خیال واهی و بیهوده نیست، بلکه عبارت از تفکر هدایت‌شده یا تفکر آزادانه و تفکر بارآور است. چنین اندیشه‌ای را می‌توان دست‌کم در تقریب اول «با حل مسأله» یکی دانست. می‌گوید: یکی از مهمترین هدف‌های ریاضیات دبیرســـتانی، تکامل توانایی حل مســـأله در شاگردان است. توانایی انجام ریاضی، شـــناخت و به‌کارگیری ریاضیات، پیدا کردن مجهـــولات از روی اطلاعات، کنترل کردن اثبات‌ها جزء اهداف ریاضیات است. اکنون با توجه به عناوین بخشی اهداف فصل، گفته پولیا را تجزیه و تحلیل کنید.

اولین شـــورای برنامه‌ریزی درســـی به سال ۱۳۵۸ در دفتر تألیف و برنامه‌ریزی درسی وزارت آموزش و پرورش تشـــکیل گردید. این شـــورا مرکب از اساتید دانشگاه که علاقمند به برنامه‌ریزی درسی بوده و همچنین دبیران و معلمان مجرب ریاضی بوده اســـت. در این شـــورا، شـــرکت‌کنندگان به توضیح مفاهیم و موضوعات مورد نیاز

جامعه و همچنین چگونگی روش‌های ارائه آن در کلاس درس می‌پرداختند و دیگر اعضاء به نقد و بررسی آن همت می‌گماشتند. اعضای شورای اول بخش مهمی از وقت خود را در خارج از جلسات به مطالعه، بررسی و نقد منابع درسی خارجی می‌پرداختند. اسامی اولین اعضای شورای برنامه‌ریزی درسی، ذیلاً جهت مزید اطلاع درج می‌گردد.

دکتر کاظم‌اللهی (استاد وقت دانشگاه تهران)، محمدهاشم رستمی (دبیر ریاضیات)، مرحوم دکتر مسعود فرزان (دانشیار وقت دانشگاه خوارزمی)، دکتر رحیم کریم‌پور (استادیار وقت دانشگاه الزهرا)، مرحوم دکتر اکبر حسنی (استاد وقت دانشگاه علم و صنعت ایران)، دکتر عبدالله شیدفر (دانشگاه علم و صنعت ایران)، دکتر اسماعیل بابلیان (استاد دانشگاه خوارزمی)، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده (استاد دانشگاه خوارزمی)، بیژن فرهودی (دبیر دبیرستان‌های تهران)، میرزا جلیلی (دبیر ریاضیات و دبیر شورا)، صفر باهمت (دبیر ریاضی)، دکتر همدانی‌زاده (دانشگاه صنعتی شریف)

در ادامه برخی دیگر از اعضای علمی دانشگاه‌ها و دبیران محترم ریاضی به شورای اول پیوستند و امر برنامه‌ریزی درس ریاضی به یکی از مهمترین ارکان لازم جهت تهیه و تألیف درس ریاضی مناسب ادامه یافته است.

۱-۹ نقش دبیران در کلاس درس- نوک کوه یخی

اگر از دوستان و یا فامیلتان بپرسید که چه کاری معلمین و دبیران در کلاس درس می‌کنند؟ خواهند گفت که دبیران در جلو کلاس درس می‌ایستند و صحبت می‌کنند و یا اگر دبیر ریاضی و یا فیزیک باشند، ضمن صحبت مطالبی روی تخته‌سیاه می‌نویسند، دانش‌آموزان ضمن گوش دادن به آنها مطالب را فرامی‌گیرند و این همه فعالیتی است که در آموزش و یادگیری اتفاق می‌افتد.

اما واقعیت چیز دیگری متفاوت از این است.

آموزش و تدریس کلاسی فقط عینی‌ترین بخش از کار دبیران ما است. اما در واقع امر باید گفت: برای آنکه یک تدریس موفق و مؤثر ارائه گردد، یک دبیر علاوه‌بر دانش حرف‌های می‌بایست به فنون و روش‌های تدریس و همچنین فنون حل مسئله آشنایی کافی داشته باشد. در واقع بخش اعظمی از فعالیت‌های معلمین و دبیران قسمت‌های نامرئی و غیرعینی کار آنان است. قسمت‌هایی نظیر دانش حرف‌های آنان در خصوص آموزش و یادگیری و همچنین قضاوت‌ها و ارزشیابی‌های حرف‌های آنان در خصوص فعالیت‌های جاری دانش‌آموزان، مهارت‌ها و استراتژی‌هایی که مدیریت مؤثر کلاس را تقویت و پشتیبانی می‌کند. دانش موضوعی دبیران نتیجه تحصیلات عالی آنان و گسترش آن طی دوره‌های ضمن خدمت می‌باشد. یک دبیر کارا و موفق براساس این

سه عامل برای درسی که می‌باید تدریس کند، طراحی لازم را انجام می‌دهد؛ همچنین برای هر درس خاص از هفته‌ها، ماه‌ها و یا حتی سال‌ها پیش به طراحی می‌پردازد؛ نتیجه این امر پیوستگی و پیشرفتگی است که در یادگیری دانش‌آموزان حاصل می‌شود. تدریس هر درس به مثابه بخشی از دنبال‌های از تجربیات یادگیری طراحی می‌گردد.

کار یک دبیر و آماده‌سازی برنامه‌ریزی‌شده فعالیت‌های او را در کلاس درس به مثابه کوه یخی تشبیه کرده‌اند. به یک درس اجرا شده به‌عنوان یک کوه یخی باید نگریست که ۷۰ تا ۸۰ درصد آن، در زیر آب پنهان است (شکل ۱). کار کلاسی دبیر نمایشگر نوک چنین کوه یخی است. چنین نوک کوه یخی بر پایه‌ای استوار است که پنهان است. کار کلاسی دبیر در کلاس درس نیز به‌وسیله انبوهی از تجربیات و دانش حرف‌های پشتیبانی می‌شود که به آسانی دیده نمی‌شود. این تجربیات و دانش‌های حرف‌های از این‌قرارند.

کار دبیر در کلاس درس، تنها نوک کوه یخی است که نمایان است.

۱. ارزیابی درس‌های قبلی

۲. آمادگی برای تدریس

۳. طراحی زنجیره‌ای از درس‌ها، مثال‌هایی که پیشرفت یادگیری را تضمین می‌کند.

۴. ارائه تمرین‌ها و کار در کلاس، کارهایی که دانش‌آموزان می‌بایست در کلاس انجام دهند، به‌طوری‌که مطمئن شویم کار کلاس و یادگیری دانش‌آموزان طبق کار طراحی‌شده انجام شده است.

۵. شخصیت آموزشی: شامل توانایی معلمین و دبیران در جلب توجه کلاس و نگهداری آن است؛ چنین قدرتی برای یادگیری مؤثر دانش‌آموزان و تأیید کار دبیران توسط آنان ضروری است.

۶. دانش موضوعی: دانشی است که در خصوص موضوعات خاصی که تدریس می‌کنند از منطق، قضیه‌ها، برهان‌های آن، مثال‌های کاربردی مرتبط و مثال‌های انگیزه‌بخش تا دانستن راه‌حل مسئله‌های مشکل‌تر را شامل می‌شود.

۷. دانش حرف‌های در خصوص آموزش و یادگیری فعال.

۸. قضاوت حرف‌های: قضاوتی که طی گذشت زمان و انعکاس تجربیات کاری حاصل شده است.

معلم و دبیری که تدریس می‌کند باید بتواند کلاس درس را بخواند؛ یک معلم یا دبیر مجرب با نگاه به تک‌تک دانش‌آموزان می‌تواند انعکاس تدریس خود را دریافت کند؛ کدام دانش‌آموز درس را فهمیده و کدام دانش‌آموز در درک و فهم درس مشکل دارند؟

در نظام‌های آموزشـــی پویا، کسانی‌که می‌خواهند به شـــغل دبیری اشتغال یابند، طی دوران تحصیل خود، به کارآموزی و کارورزی کلاسی می‌روند. در این کارورزی‌ها، از تجربیات دبیران کارا بهره می‌برند و یاد می‌گیرند که چگونه باید کلاس را مدیریت کنند و چگونه باید کلاس را درک کرده و آن‌را بخوانند. طی دوران کارورزی دانش حرف‌های دانشجو- معلمان افزایش یافته و اعتماد آنان به شغل آتی خود فزونی می‌یابد.

بندهــای ۶ و ۷ مربوط به دانش موضوعی و حرف‌های در درس بخش‌های آتیه مورد بحث قرار خواهد گرفت. در آن درس روش‌های مختلف تدریس و فنون حرف‌های آموزش فعال و راهیابی‌های حل مســئله را مطالعه خواهید کرد. دانش موضوعی اصولاً مربوط به توانایی تخصصی و علمی شـــما در رشـــته تدریس‌تان می‌باشـــد. دانش موضوعی عمدتاً نتیجه تحصیلات شما در دوران دانشگاهی است.

اما بندهای ۱-۴ فهرســت فوق‌الاشــاره اساســاً مرتبط با آماده‌ســازی دبیر جهت ارائه یک تدریس مؤثر و کارا می‌باشـــد. یک معلـــم و دبیری که در رابطـــه با تعلیم و تربیت دانش‌آموزان خود احســـاس وظیفه‌شناســـی و مسئولیت می‌کند هیچ‌وقت بدون آمادگی و لحاظ کردن این موارد به کلاس درس نمی‌رود. می‌بایست دروس قبلی که ارائه کرده مرور نماید و درس جدید را مرتبط با آن برای خودش تعریف کند. کتاب درســـی و منابع مرتبط با آن‌را قبلاً مطالعه کرده و براســـاس آن به طراحی درس بعدی بپردازد، چه مطالبی باید گفت، چگونه بایـــد گفت، مثال‌هایی طراحی و تألیف کند و زنجیره مطالب، مفاهیم و اموری را که به یادگیری دانش‌آموزان منجر می‌شود شناسایی و مشخص نماید.

معلمین، دبیران و حتی اســـاتید دانشـــگاهی همگی محتاج مطالعه و بررســـی محتوایی و آماده‌ســـازی جهت تدریس می‌باشـــند. از اســـتاد فقید پروفسور تقی فاطمی، که نگارنده این ســـطور افتخار شاگردی او را داشته اســـت، نقل می‌شـــود که طی بیش از ۴۰ سال کار تدریس در دانشـــگاه، هیچگاه بدون مطالعه قبلی به کلاس درس نمی‌رفته است. یادآوری می‌کنیم که:

آموزش و تدریس مســـتلزم آن است که شما دانشی را که دارا هستید به فرآیندها و اموری تبدیل کنید که منجربه یادگیری دانش‌آموزان و دانشجویان شود.

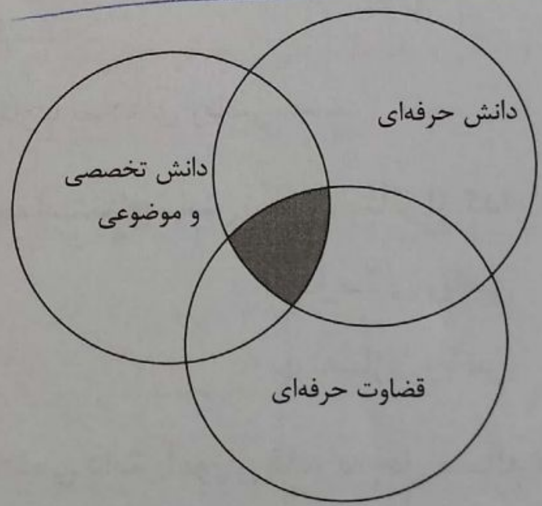
تبدیل دانش به فرایند و فعالیت‌های علمی که دانش‌آموزان ضمن اجرای آن یاد بگیرند و مهمتر از آن چگونه یاد گرفتن را یاد بگیرند امری تخصصی، مهم و حیاتی است.

و باز هم یادآوری می‌کنیم که برای آنکه یک آموزش و یاددهی فعال شود:

شما باید خیلی بیشتر از آنچه باید آموزش بدهید بدانید.

یادگیری فعال وقتی اتفاق می‌افتد که فرآیند تجربه یادگیری که توسط دبیر سازماندهی‌شده است با نیازهای یادگیری دانش‌آموزان و یادگیرندگان تطابق داشته باشد، به‌عبارت دیگر فعالیت‌های یادگیری می‌بایست توسعه‌دهنده دانش قبلی، مهارت و نگرش فرد به فرد دانش‌آموزان باشد.

یادگیری فعال می‌بایست بر پایه دانش قبلی دانش‌آموزان استوار شده با دانش قبلی دانش‌آموزان به شکلی وحدت‌یافته با وجود فرد یادگیرنده درآید. در واقع یادگیری و آموزش مؤثر فصل مشترک سه مؤلفه مهم قضاوت حرفه‌ای، دانش تخصصی و موضوعی و دانش حرفه‌ای دبیر می‌باشد.



شکل ۲. دانش موضوعی تنها بخشی از بسته ابزار حرفه دبیر و معلم می‌باشد.

در ایران که برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی به‌صورت متمرکز انجام می‌گیرد، تا اندازه‌ای طراحی درسی برای معلمین و دبیران آسان‌تر می‌نماید. در کشورهایی که کتاب‌های درسی ثابت و مشخص برای استفاده و تدریس وجود ندارد، دبیران می‌بایست خود محتوای هر درس را تألیف و آموزش هر درس را براساس آن طراحی کنند. با این حال حتی وقتی‌که محتوای درس تهیه و تدوین شده باشد، طراحی درسی که می‌بایست تدریس شود امری الزامی و اجتناب‌ناپذیر است. طراحی درس براساس کتاب درسی رسمی، در کشورهایی که چنین کتابی وجود دارد، انجام می‌پذیرد. این امر به‌نوبه خود متضمن مطالعه و بررسی دقیق محتوایی و انتقادی کتاب درسی است. بنابراین ما در فصل بعدی به فرآیند بررسی کتاب درسی، که آن نیز امری تخصصی است، خواهیم پرداخت.

۱-۱۰ خودآزمایی

۱- یک وظیفه ریاضیات دبیرستانی و آموزش آن، مطابق متن درس، کدام است؟

الف) آشکارسازی الگوهای پنهان طبیعت.

ب) آشکارسازی الگوهای پنهان طبیعت و محیط زندگی.

ج) کمک به آشکارسازی الگوهای طبیعت برای شناخت آن.

د) آشکارسازی الگوهای طبیعت و محیط زندگی انسان‌ها برای شناخت آن.

۲- در مورد نمادهای ریاضی و مفاهیم مجرد چه می‌توان گفت؟

الف) کار با نمادهای ریاضی ساده‌تر از کار با مفاهیم مجرد است.

ب) کار با مفاهیم مجرد ساده‌تر از کار با نمادهای ریاضی است.

ج) ارتباطی این مفهوم با هم ندارند.

د) کار با مفاهیم مجرد هم‌وزن کار با نمادهای ریاضی است.

۳- رشد استدلال منطقی و قوه استنتاج دانش‌آموزان متأثر از کدام فرآیند تسریع می‌گردد؟

الف) اثبات و برهان ریاضی
ب) مدل‌سازی ریاضی

ج) مجردسازی ریاضی
د) بهینه‌سازی ریاضی

۴- در کدام‌یک از حیطه‌های علمی دانش‌آموزان قادر به حل مسأله هستند؟

الف) فیزیک
ب) شیمی
ج) زیست‌شناسی
د) ریاضیات

۵- نقش آموزش و یادگیری ریاضیات در خصوص جداسازی دانش‌آموزان چیست؟

الف) فیلتر کردن دانش‌آموزان زبده

ب) ارتقاء توانایی‌های فطری و خدادادی دانش‌آموزان

ج) ارتقاء توانایی‌های فطری و خدادادی دانش‌آموزان زبده

د) جداسازی دانش‌آموزان و توجه بیشتر به رشد توانایی‌های دانش‌آموزان زبده

۶- گفته شده است که کنجکاوی غریزی دانش‌آموزان معلم خوبی برای یادگیری ریاضیات است، به‌نظر شما علت آن چیست؟

الف) دانش‌آموزان زبده استعداد خوبی دارند.

ب) دانش‌آموزان زبده به‌طور فطری و غریزی استعداد خوبی برای فراگیری ریاضیات دارند.

ج) همه دانش‌آموزان استعداد فطری مناسبی برای یادگیری ریاضیات دارند.

د) کنجکاوی غریزی دانش‌آموزان امری فطری و هدایتی اســت که در یادگیری ریاضیات می‌تواند نقش اساسی داشته باشد.

۷- تفاوت آموزش و یادگیری را می‌توان چنین توصیف کرد:

الف) آموزش یاددهی یک‌طرفه دبیر به دانش‌آموزان است و دانش‌آموزان نقش کمتری در این فرآیند دارند.

ب) یادگیری امری دوجانبه است که مستلزم برنامه‌ریزی پویا است.

ج) در آموزش، مطالب با سرعت بیشتری یاد داده می‌شود در حالی‌که در یادگیری چنین نیست.

د) آموزش و یادگیری واژه‌هایی مترادف‌اند و تفاوت اساسی با هم ندارند.

۸- کدام بخش از فعالیت دبیران ریاضی به‌منزله یک نوک کوه یخی تشبیه شده است؟

الف) دانش موضوعی دبیر

ب) قضاوت حرف‌های دبیر

ج) فعالیت کلاسی و تدریس دبیر

د) شخصیت آموزشی دبیر

۹- یادگیری فعال، فصل مشترک سه مؤلفه مهم است. این سه مؤلفه کدامند؟

الف) دانش حرف‌های، دانش تخصصی و دانش موضوعی

ب) دانش حرف‌های، قضاوت حرف‌های و شخصیت آموزشی

ج) دانش حرف‌های، دانش تخصصی و قضاوت حرف‌های

د) دانش تخصصی، دانش موضوعی و قضاوت حرف‌های

۱۰- پرورش قوه تعمیم و تجرید جزء کدام‌یک از اهداف آموزشی و یادگیری ریاضیات است؟

الف) نقش ریاضیات در تأمین آینده فرد

ب) نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان

ج) نقش ریاضیات در ارتقاء فرهنگی

د) نقش ریاضیات در تربیت فکر

۱۱- آموزش تابع فاکتوریل جزء کدام‌یک از اهداف ریاضیات است؟

الف) یک هدف عینی است
ب) یک هدف کلی است
ج) یک هدف عینی و کلی است
د) یک هدف فرهنگی است

۱۲- کتاب‌ها و منابع درسی براساس کدام اهداف تألیف و تدوین می‌گردند؟

الف) اهداف کلی
ب) اهداف عینی
ج) اهداف جزئی
د) اهداف عام

۱۳- هدف‌های کلی یک برنامه درسی ریاضی براساس چه چیزی تبیین می‌گردند؟

الف) راهنمای برنامه
ب) هدف‌های جزئی
ج) کتاب‌ها و منابع ریاضی
د) راهبردها

۱۴- آموزش و تدریس ریاضیات نتیجه کدام‌یک از امور است؟

الف) تبدیل دانش به فرآیند

ب) تبدیل دانش به فرآیندی که در آن یادگیری اتفاق بیفتد.

ج) تبدیل تجربیات به فرآیندی که در آن آموزش اتفاق بیفتد.

د) تبدیل تجربیات دبیر به آموزش فعال

۱۵- دانش موضوعی دبیران شامل کدام مورد ذیل است؟

الف) تحصیلات عالی و توسعه آن ضمن آموزش‌های بعدی

ب) آموزش‌های ضمن خدمت آنان

ج) تحصیلات عالی

د) تحصیلات دبیرستانی آنان

۱۶- قضاوت حرف‌های چگونه رشد و حاصل می‌شود؟

الف) با گذشت زمان و انعکاس یادگیری بچه‌ها
ب) با گذشت زمان و انعکاس تجربیات کاری
ج) با تعامل با دانش‌آموزان
د) با ارتقاء دانش تخصصی

۱۷- چنانچه به کاربرد ریاضیات در زندگی روزمره بیندیشیم، کدام‌یک از موارد ذیل مرکز اهمیت قرار می‌گیرد؟

الف) مدل‌سازی ریاضی
ب) بهینه‌سازی ریاضی
ج) تجزیه
د) تعمیم و فرضیه‌سازی

۱۸- نظر متخصصین آموزش ریاضی در خصوص تمدن‌ها کدام است؟

الف) تمدنی صنعتی‌تر است که عنصر ریاضی آن غنی‌تر باشد.

ب) تمدنی متمدن‌تر است که ریاضیات در آن آموزش داده شود.

ج) تمدنی صنعتی‌تر است که علوم پایه در آن قوی‌تر باشد.

د) تمدنی متمدن‌تر است که ریاضیات در پایه‌گذاری آن نقش داشته باشد.

۱۹- سلسله‌مراتب صورت‌بندی و تدوین اهداف آموزش و یادگیری ریاضیات کدام است؟

الف) هدف‌های کلی- هدف‌های عینی

ب) هدف‌های جزئی- هدف‌های عینی

ج) هدف‌های عینی- هدف‌های جزئی و کلی

د) هدف‌های کلی- هدف‌های جزئی- هدف‌های عینی

۲۰- آموزش ریاضیات مورد نیاز برای مطالعه سایر دروس جزء کدام دسته‌بندی هدف‌های آن است؟

الف) نقش ریاضیات در توسعه فکر

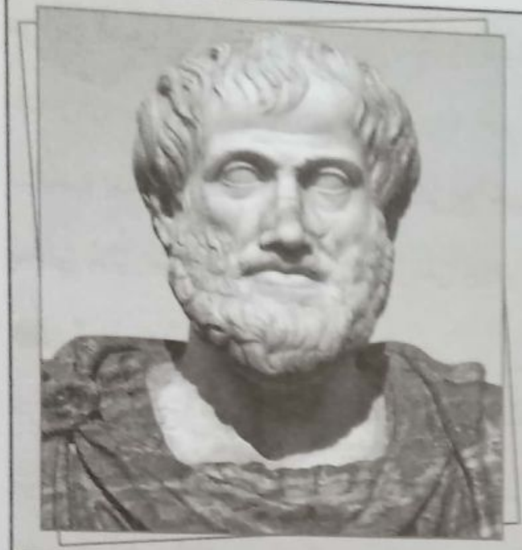
ب) نقش ریاضیات در ارتقاء فرهنگی

ج) نقش ریاضیات در شناخت طبیعت

د) نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان

پاسخ‌نامه

شماره پرسش	گزینه درست	شماره پرسش	گزینه درست	شماره پرسش	گزینه درست
۱	د	۷	ب	۱۴	ب
۲	الف	۸	ج	۱۵	الف
۳	الف	۹	ج	۱۶	ب
۴	د	۱۰	د	۱۷	الف
۵	ب	۱۱	الف	۱۵	الف
۶	ج	۱۲	ب	۱۹	د
		۱۳	الف	۲۰	د



کسانی که کودکان را به‌خوبی آموزش می‌دهند نسبت به والدین آنها افتخار بزرگ‌تری می‌یابند چرا که والدین زندگی را به فرزندانشان می‌بخشند، اما معلمین هنر خوب زندگی کردن را.

«ارسطو»

فصل دوم

اصول آموزش و یادگیری ریاضیات

در این فصل ابتدا روش‌های تدریس ریاضیات را که در مدارس ما معمول‌اند مورد نقد و بررسی قرار می‌دهیم سپس روش تدریس فعال را که بر پایه اصول صحیح آموزش ریاضیات استوار بوده و با اهداف آموزش این علم تناسب بیشتری دارد به اختصار تشریح خواهیم کرد.

به‌طور کلی می‌توان روش‌های تدریس ریاضیات را به دو دسته تقسیم کرد: روش‌های زبانی و روش‌های کشفی.

۲-۱ روش‌های زبانی

در این روش‌ها تقریباً تنها ابزار آموزش کلام و زبان معلم است. معلم به‌محض ورود به کلاس به تدریس و توضیح درس می‌پردازد. یکسره و یکنواخت درس را به پایان رسانده و بدون هیچ‌گونه بحث و تبادل نظری با دانش‌آموزان، کلاس را ترک می‌کند. نه تنها دانش‌آموزان را به سؤال کردن تحریک نمی‌کند بلکه چنان هیبتی به خود می‌گیرد که کسی جرأت سؤال کردن از وی را نداشته باشد. در نظر چنین معلمی دانش‌آموز خوب کسی است که به حرف‌ها و کلام معلم خوب گوش دهد و هر چه را که وی گفت به خاطر سپرده و چنانچه معلم سؤال کرد، عیناً پاسخ گوید.

عیب اصلی این روش‌ها در این است که به غریزه ذاتی دانش‌آموزان توجه لازم نمی‌شود و به هیچ‌وجه اهداف آموزش ریاضیات را آن‌چنان‌که در بیانه هفتاد و پنج ریاضیدان ذکر شده است تأمین نمی‌کند.

بچه‌ها به‌ویژه در سنین کلاس‌های پایین و دبستان، چیزهایی را واقعاً باور می‌کنند که ببینند. بنابراین چیزی را واقعاً یاد می‌گیرند که توأم با رؤیت و مشاهده بوده و برای آنها ملموس باشد. در دوران دبیرستان نیز نوجوانان از اینکه باید ساعاتی را یکسره گوش کرده و هیچ‌گونه فعالیتی جز گوش دادن به درس معلم نداشته، کلاس درس را خسته‌کننده و مأیوس‌کننده می‌یابند. آنها ذاتاً دوست دارند در آموزش نقشی داشته و بتوانند آزادانه از معلم سؤال کرده تا درس را بهتر بفهمند.

روش‌های زبانی مربوط به زمان‌های پیشین می‌باشند، زمان‌هایی که علوم تجربی و علوم ریاضی به اندازه کافی توسعه و تکامل نیافته بودند. در این زمان‌ها علوم به‌صورت معلوماتی حفظ‌کردنی از معلمین به شاگردان انتقال می‌یافت و کسی که چیزهای بسیاری را از برداشت آدمی باسواد و فاضل شناخته می‌شد. ولی امروزه دامنه معلومات بشری در هر یک از شاخه‌های فرعی علوم بسیار گسترش یافته و به‌خاطر سپردن کلیه قواعد و دانسته‌های علمی کاری ناممکن و غیرضروری تلقی می‌شود این‌گونه روش‌ها، اعتبار خود را از دست داده‌اند. امروزه افرادی باسواد و بامعلومات علمی شناخته می‌شوند که بتوانند خوب فکر کنند و در برخورد با موقعیت‌های مختلف توانایی‌های لازم را در تجزیه و تحلیل پدیده‌های علمی داشته باشند؛ به روش‌های علمی آشنا باشند و بتوانند از ابزار و وسایل تحقیقاتی مربوط به‌خوبی استفاده نمایند.

روش‌های زبانی به دو دسته تقسیم می‌شوند. روش قاعده‌گویی و روش استدلالی.

۱. روش قاعده‌گویی: در این روش معلم بیشتر بـه ذکر نتایج مهم درس که به‌نظـر وی همان قاعده‌ها و دستورات هستند اکتفا می‌کند و سعی دارد که پس از توضیحاتی کوتاه هر چه سریع‌تر این قاعده‌ها را به دانش‌آموزان انتقال دهد و به قول خودش مطلب را سریع‌تر به محصلین آموزش دهد. به‌عبارت دیگر این قبیل معلمین مطالب درسی را به‌صورت قواعد به دانش‌آموزان دیکته می‌کنند.

ایراد عمده‌ای که بر این روش وارد است آن است که به محصلین مجال تفکر را نمی‌دهد. مفاهیم ریاضی طی پروسه و فرآیندی مشخص در ذهن شکل می‌گیرند و این فرآیند محتاج زمان است. در روش قاعده‌گویی فرصت کافی برای شکل‌گیری مفاهیم به‌دست نمی‌آید.

روش قاعده‌گویی برای آموزش دستورها و فرمول‌های کلیدی که نیازی به توجیه آنها نمی‌باشد مفید است. مثلاً کسی که می‌خواهد قواعد آیین‌نامه راهنمایی و رانندگی را فراگیرد می‌تواند با صرف وقت اندکی این دستورها را به روش قاعده‌گویی از معلم خویش بیاموزد. معمولاً در آزمون‌ها نیز چنین کسانی پاسخ‌های درست را ارائه می‌دهند. لیکن پس از موفقیت در آزمون، از آنجا که فلسفه وجودی این قواعد برای محصل روشن نشده است در واقع مطالب و قواعد را یاد نگرفته‌اند و لذا در فراموش کردن آنها و یا تمایل به استفاده از آنها چندان رغبتی نشان نمی‌دهند و پس از مدتی کوتاه نسبت به رعایت مواد آیین‌نامه‌ها بی‌تفاوت شده و حتی در عدم اجرای آنها اصرار می‌ورزند. بنابراین ملاحظه می‌شود که حتی آموزش قواعد راهنمایی و رانندگی نیز به روش قاعده‌گویی آنگونه که مفید فایده‌ای باشد کارساز نیست؛ در آموزش‌های پیش‌دانشگاهی بسیاری از مطالب حساب، مثلثات و حتی جبر از جمله روش تقسیم اعداد چندرقمی بر اعداد چندرقمی در کتب درسی قدیم بدین روش یاد داده می‌شد.

در آموزش‌های فشرده نیز غالباً روش قاعده‌گویی اعمال می‌گردد. ذهن محصلین از قواعد مختلف و متنوع مطالب گوناگون انباشته شده و از آنجا که این مطالب به‌درستی تفهیم نشده‌اند، محصلین آنها را با اکراه تمام می‌آموزند ولی به‌محض موفقیت و یا شکست در آزمون‌ها همگی را به فراموشی می‌سپارند. حتی آن دسته از محصلین که در آزمون‌ها موفق می‌شوند، با ذهنی خسته و گریزان از تحصیل و تعلم ادامه تحصیل می‌دهند و از قدرت تفکر و خلاقیت مناسبی برخوردار نیستند.

۲. روش استدلالی: این روش علی‌رغم اینکه در شمار روش‌های زبانی است ولی با روش قاعده‌گویی تفاوت بسیار دارد. در روش قاعده‌گویی، صرف‌نظر از عباراتی که جنبه دستوری دارند، دلیل و برهانی برای گفته‌های خود ذکر نمی‌کنیم. ولی در روش استدلالی، که به روش توصیفی نیز موسوم است، سعی داریم که در ضمن ارائه مطالب، برای توضیح درستی گفته‌های خود دلیل و برهانی ارائه دهیم.

مثال: فرض کنیم که بخواهیم قاعده تقسیم کسر بر کسر را آموزش دهیم. می‌توانیم چنین استدلال کنیم:

می‌دانیم حاصل‌ضرب یک عدد (با یک کسر) در عکس آن همواره مساوی یک است. پس اگر کسی $\frac{۳}{۵}$ را ابتدا در کسر دیگر مثلاً $\frac{۲}{۷}$ و سپس در عکس آن (یعنی $\frac{۷}{۲}$) ضرب کند کسر اول در واقع در «یک» ضرب شده و در حقیقت تغییر نمی‌کند:

$$\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۷}\times\frac{۷}{۲}=\frac{۳}{۵}$$

حال می‌توانیم طرفین را مثلاً بر $\frac{۷}{۲}$ تقسیم کنیم:

$$\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۷}\times\frac{۷}{۲}:\frac{۷}{۲}=\frac{۳}{۵}:\frac{۷}{۲}$$

در طرف چپ $\frac{۷}{۲}:\frac{۷}{۲}$ را می‌توانیم حذف کنیم و به‌دست آوریم:

$$\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۳}{۵}:\frac{۷}{۲}$$

پس:

$$\frac{۳}{۵}:\frac{۷}{۲}=\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۷}$$

و این قاعده تقسیم یک کسر بر کسر دیگر را به‌دست می‌دهد.

به‌طوریکه ملاحظه می‌کنیم در روش استدلالی تنها به دادن «قاعده» اکتفا نمی‌کنیم؛ بلکه صحت روابط را نیز در هر مرحله با استفاده از مفاهیم و روابطی که قبلاً دانش‌آموزان فهمیده‌اند ثابت می‌کنیم.

روش استدلالی مناسب فهم و درک دانش‌آموزان دبستانی نیست زیرا منطق بچه‌ها در این سنین با منطق بزرگسالان متفاوت است. ولی اعمال این روش در سال‌های دبیرستان و در سطوح بالاتر معمولاً مورد توجه و عمل معلمین و مدرسین می‌باشد.

۲-۲ نقد و خلاصه

روش‌های زبانی، همان‌گونه که از نامشان پیداست، بر زبان و کلام معلم تکیه دارد. در این روش‌ها، معلم و مدرس متکلم‌الوحده است و کمتر مجال سؤال کردن، توضیح دادن، درک و فهم واقعی به محصلین داده می‌شود.

تنها مزیت ظاهری روش‌های زبانی این است که تصور می‌شود با این روش‌ها محصلین به ظاهر زودتر در درس پیش می‌روند. این باور درست نیست زیرا در درازمدت، اثرات نادرستی در پرورش فکر و استعداد محصلین

می‌گذارد و در سنین بالاتر (دبیرستان و دانشگاه) اگر مطالب ریاضی را دیر می‌فهمند، علت عمده‌اش این است که قبلاً در آموزش مطالب بنیادی به آنها عجله کرده‌ایم. به‌عبارت دیگر، در مراحل بعدی آموزش، محصلین ناچارند از معلوماتی استفاده کنند که قبلاً آنها را خوب فرانگرفته و به‌درستی نفهمیده‌اند. لهذا در فراگیری و تحصیل ریاضیات همواره در حال تردید گام برمی‌دارند و ترسان و لرزان پیش می‌روند. آموزش مطالب ریاضی که زنجیروار به‌هم مربوط است نیازمند آموزش درست مطالب قبلی است. در اعمال این روش‌ها یکی از هدف‌های آموزش ریاضی که همانا ایجاد اعتمادبه‌نفس و تقویت استدلال و تفکر در محصلین است نادیده گرفته می‌شود.

۲-۳ یادگیری فعال

کلیات:

پژوهش‌های انجام‌شده در خصوص فرآیند تشکیل مفهوم در ذهن آدمیان نشانگر آن است که یک مفهوم چیزی بیش از اجتماع ارتباطات وابسته‌ای است که توسط حافظه عرضه می‌شود؛ چیزی افزون بر یک عادت ذهنی صرف؛ بلکه یک مفهوم یک عمل معقول پیچیده‌ای است که با تکرار صرف حاصل نمی‌شود بلکه وقتی کسب می‌شود که رشد ذهنی فرد به سطح مورد نیازی از ادراک رسیده باشد.

در این خصوص، فیگوتسکی می‌گوید:

تجربیات عملی نشان می‌دهد که آموزش مستقیم مفاهیم غیرممکن و بی‌فایده است. معلمی که تلاش دارد به چنین روشی عمل کند معمولاً کاری انجام نمی‌دهد، تنها چیزی که حاصل می‌شود شفاهیات رد و بدل شده‌ای تهی از معنی است. چیزی که بچه‌ها طوطی‌وار تکرار می‌کنند، شبه‌دانشی متشکل از مفاهیم مورد نظر حاصل می‌شود، اما در واقع در خلاء اتفاق می‌افتد.

منظور فیگوتسکی از مفهوم «معنی واقعی» آن است. بدین اعتبار معلمین نمی‌توانند به یاددهی یادگیری اقدام کنند. یادگیری که در آن ادراک بچه‌ها اتفاق افتد، مگر آنکه بچه‌ها در فرآیند یادگیری فعال بوده باشند. در این‌صورت یادگیری فعال یک یادگیری بامعنی بوده که در آن نقشی از علاقه یادگیرنده و ارزش چنین فردی را به رسمیت شناخته و آن‌را درک کنیم. برخی از متخصصین آموزش ریاضی از واژه «یادگیری عمیق» به‌جای «یادگیری فعال» استفاده می‌کنند تا تمایز آن‌را با «یادگیری سطحی» که همان «آموزش سنتی» است آشکار سازند؛ یادگیری را وقتی «یادگیری سطحی» می‌نامیم که بدون ادراک باشد. در این بخش، روش‌هایی از یادگیری فعال را، که طی آن معلمین بچه‌ها را یاری می‌کنند تا در فرآیند یک یادگیری بامعنی درگیر شوند، به‌طور خلاصه بیان خواهیم کرد.

هدف‌های آموزشی این بخش عبارتند از آنکه دانشجویان باید بتوانند

- عبارت یادگیری فعال را توضیح داده و فواید آن‌را برای معلمین و بچه‌ها برشمارند.
- از روش‌هایی که مشوق یادگیری فعال دانش‌آموزان است آگاهی یابند.
- این آمادگی را داشته باشند تا در صورت اشتغال به شغل دبیری و معلمی یک یادگیری فعال را پیاده کرده و با دیگر معلمین و دبیران رقابت سالمی را برقرار کنند.

۲-۳-۱ یادگیری فعال چیست؟

یادگیری فعال وقتی رخ می‌دهد که دانش‌آموز در سرتاسر فعالیت‌های یاددهی- یادگیری یک شریک فعال بوده باشند. طرفداران این رویکرد برآنند که حسی از تملک و درگیری شخصی و نفسانی در یادگیرنده به‌وجود می‌آید امری حیاتی در یادگیری موفقیت‌آمیز می‌باشد. به‌علاوه به دیده کسانی که از خارج به امورات دانش‌آموزان توجه می‌کنند کارهای آنان مهم تلقی شده و فعالیت آنها جهت‌دار جلوه می‌کند، ایده‌های آنها و سهمی که در امر آموزش می‌پردازند، و همچنین یافته‌های آنها ارزشمند تلقی می‌شود.

رویکردهای یادگیری فعال هم برای معلمین و دبیران و هم برای دانش‌آموزان سودمند است. به دبیران این امکان را می‌دهد که وقت بیشتری صرف گروه‌های دانش‌آموزی و فردفرد آنها کرده و این امر به‌نوبه خود منجربه قضاوت و ارزیابی کیفی بهتری از دانش‌آموزان می‌شود. همچنین یادگیری فعال ارزیابی دبیران از نیازهای خاص دانش‌آموزان را توسعه می‌دهد.

از سوی دیگر، از منظر دانش‌آموزان، روش‌های یادگیری فعال مشوق یادگیری مهارت‌های حل مسأله و یادگیری مستقل آنان است که این امر هم در کار علمی آتی آنان و هم در امور شغلی‌شان اهمیتی مضاعف دارد. البته اجرای روش‌های یادگیری فعال مستلزم صرف وقت بیشتر دبیران در رابطه با طراحی و آمادگی خود برای آموزشی به روشی فعال می‌باشد.

مزایای یادگیری فعال را برای دانش‌آموزان به‌طور اخص و برای بچه‌ها به‌طور اعم به‌شرح ذیل می‌توانیم بیان کنیم.

- رضایت‌مندی بیشتر شخصی
- تعامل بیشتر با دانش‌آموزان دیگر و دبیران درس
- تشویق به کارهای مشترک و کار تیمی
- فرصت‌های بیشتر کار با دانش‌آموزان با توانایی‌های مختلف
- کار با کل کلاس به‌منظور سهیم شدن در نتایج حاصله و پاسخگو...

- مشوق احترام متقابل بوده و نظرات دیگران را ارج می‌گذارد و این یک هدف تربیتی مهمی در همه نظام‌های آموزشی است.
- یادگیری فعال حمایت‌کننده یادگیری همکارانه است نه یادگیری رقابت‌مدارانه.

۲-۳-۲ یادگیری فعال و انگیزه:

غالباً می‌توانیم دانش‌آموزان را با درگیر کردن یک مسأله به امر یادگیری تشویق کنیم، لکن چنین مسأله‌ای می‌بایست به‌صورتی واضح تعریف گردد، مقصد آن روشن باشد و مرتبط با توانایی‌ها و یا نیازهای دانش‌آموزان باشد. چنین انگیزه‌ای می‌تواند منبعث از علایق شخصی و ذاتی و درونی بوده یا آنکه مرتبط با امور خارجی بوده و یک انگیزه خارجی قلمداد گردد. انگیزه‌های خارجی با افزایش سن دانش‌آموزان اهمیت بیشتری می‌یابند. وقتی‌که مأموریت مدرسه با اشتغال آتی دانش‌آموزان یا تحصیلات عالی آنان مرتبط باشد، انگیزه دانش‌آموزان افزایش یافته و آنان تشویق به یادگیری بیشتری می‌شوند.

برنامه تحصیلی دوره دبیرستان به‌گونه‌ای باید باشد تا تفکر والاتر دانش‌آموزان را ترغیب نماید. معهذا آموزش مراتب عالی‌تر تفکر و مهارت‌ها، گرچه ممکن است لازم و ایده‌آل تلقی گردد، چنانچه با نیازهای قبلی آنان یا نیاز آنان به دانستن هماهنگ نباشد، کمکی به انگیزه بخشی دانش‌آموزان نخواهد کرد. آموزش می‌بایست با نیازهای دانش‌آموزان مرتبط باشد، در غیر این‌صورت جنبه سطحی داشته و منجربه مسأله می‌شود. چنین مسأله‌ای می‌تواند مشتمل بر به‌خاطرسپاری ضعیف هر آنچه که آموزش داده می‌شود باشد و یا آنکه منجربه سطحی شدن کارها و مهارت‌های یادگیری گردد.

۲-۳-۳ عادت‌های یادگیری‌شده:

اینکه یاد بگیریم چگونه باید یاد گرفت یک وجه ممیزه یادگیری فعال است؛ به‌عبارت دیگر روش یادگیری از محتوای یادگیری مهمتر است. با تشویق دانش‌آموزان به شرکت در فعالیت‌های یادگیری و ترغیب آنان به امور مربوطه از لحظات شروع یادگیری، رویکرد یادگیری سامان‌یافته و شکوفا می‌گردد که در آن هم مهارت‌محور بوده و هم بینش‌محور است. روش‌های یادگیری فعال عادت‌های یادگیری را ترغیب می‌نماید. معلمین و دبیران انتظار دارند تا آنچه که دانش‌آموزان در مدرسه یاد می‌گیرند در کار آتی آنان و در منزل مورد استفاده قرار گیرد و توانایی آنان را به‌منظور همنوایی با زندگی روزمره به‌طور کلی گسترش دهد.

مدرسه جایی است که دانش‌آموزان یاد می‌گیرند چگونه اموری را به‌خوبی و به روش‌های معینی انجام دهند. برخی از مهارت‌هایی که توسعه و رشد می‌یابند در سرتاسر زندگی بچه‌ها به‌کار خواهد آمد. برای مثال، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که برای درک معنی یک لغت چگونه از یک فرهنگ لغت استفاده کرده و بدان

مراجعه کنند. یا آنکه یاد می‌گیرند که چگونه یک محاسبه ساده را ذهنی انجام دهند و یا مساحت یک زمین محدود را چگونه تخمین بزنند. اینها عادت‌هایی است که مشمول تکرار و توسعه هستند. تکرار مهارت‌ها منجربه توسعه توانایی‌ها است. بسیاری از اعمال ما از این نوع است، همانند اعمال نظیر خوردن یا لباس پوشیدن. بینش‌ها نیز به دانش‌آموزان یاد داده می‌شود. همانند بینش «اشکال کردن» و «پرسش کردن» و یا این نگرشی که یک مسأله را می‌توان حل کرد نه آنکه به سبب مشکل بودن آن صورت آن‌را پاک کرد. باید یادآوری کنیم که «خوب پرسش کردن» نصف دانستن است.

بخشی از فعالیت‌های بسیاری از افراد حرف‌های بر عادات روزمره آنان در طول زندگی‌شان تکیه دارد. همانند یک پیانویست یک کنسرت که در یک زمان معین قطعه‌ای را اجرا می‌کند و هر بار که آن‌را اجرا می‌کند بهتر از دفعه قبل در زمان بهتری ارائه می‌دهد. تمرینات مکرر او را قادر می‌سازد که برای دفعات بعد بهتر اجرا کرده و از زمان به‌دست‌آمده روی مهارت قطعه تمرکز بهتری انجام دهد.

۲-۳-۴ یادگیری فعال و یادگیری کشفی:

بسیاری از متخصصین یادگیری کشفی را نوعی از انواع یادگیری‌های فعال می‌دانند. برخی نیز معتقدند که یادگیری کشفی روش ممتازی از یادگیری است که در آن یادگیرنده باید بتواند موضوع را خود کشف کند. در طرف دیگر، یادگیری فعال بعضاً در نقطه مقابل یادگیری طوطی‌وار تلقی می‌شود زیرا در یادگیری طوطی‌وار یادگیرنده در درک مطلب مورد یادگیری دخل و تصرفی ندارد. معهذا باید گفت که یادگیری طوطی‌وار نیز تا حدی یک فرآیند فعال است و غالباً کاری مشکل نیز می‌نماید.

این نظریه که دانش‌آموزان می‌توانند همه چیز را خود فراگیرند و خودشان کشف کنند، تصور درستی نمی‌باشد. قطعاً رویکرد یادگیری به موضوع یادگیری و محیط یادگیری بستگی تمام دارد. مثلاً اگر بخواهیم تلفظ کلمات انگلیسی را به بچه‌ها یاد دهیم باید به آنان تلفظ درست را عرضه داریم و بخواهیم تا تکرار کنند. اما اگر بخواهیم خواص متوازی‌الاضلاع‌ها را تدریس کنیم بهتر است دانش‌آموزان را به فعالیت‌هایی مرتبط با چهارضلعی‌ها مشغول کنیم تا این‌گونه ویژگی‌های ساده را خود کشف کنند.

در بسیاری از علوم انسانی محتوای موضوعی به‌گونه‌ای است که یک یادگیری موفقیت‌آمیز الزامات خاص خود را دارا می‌باشد. چنین الزاماتی مشتمل بر به‌خاطرسپاری جدول‌ضرب، به‌خاطرسپاری معانی لغات، یا به‌خاطر داشتن یک غزل یا یک شعر می‌باشند. بسیاری از این حقایق می‌تواند با ذهنیت دل و از طریق یادگیری قاعده‌ای فراگرفته شود. اما در بسیاری از مباحث علوم ریاضی تقویت مهارت‌های تفکر و استدلال یکی از هدف‌های مهم یادگیری بوده و لذا توجه بیشتر به فرآیند یادگیری نقشی اساسی دارد. برای نمونه، نیازی

نیست تا دانش‌آموزان وادار شوند که مثلاً حقایق ذیل را به‌صورتی قاعده‌وار به‌خاطر سپارند:

- سه ارتفاع هر مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.
- سه میانه هر مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.
- حاصل‌جمع نخستین n عدد طبیعی برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

کافی است از دانش‌آموزان بخواهیم که مثلثی دلخواه رسم کنند. سه ارتفاع (یا سه میانه) آن‌را رسم کنند و آنچه که مشاهده می‌کنند بیان کرده و یادداشت نمایند. لهذا ملاحظه می‌کنیم که کشف بسیاری از حقایق ریاضی از راه فعالیت‌های مربوط به آن توسط خود دانش‌آموزان میسر می‌باشد. در مراحل بعدی یاددهی-یادگیری کوشش می‌شود تا با کمک و یاری معلمین و دبیران استدلال‌هایی قابل قبول برای این حقایق سامان دهند.

یادگیری کشفی مثالی از یادگیری فعال است؛ در شکل ایده‌آل آن، یادگیری کشفی وقتی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان را رها کرده تا حقایق را خودشان کشف کنند. مشکل اساسی اینجاست که چه موقع و در کجا و برای چه موضوعی چنین امری اتفاق می‌افتد. **تشخیص چنین موقعیت‌هایی محتاج تسلط دبیران به موضوع درسی، تاریخچه آن و هنرمندی فوق‌العاده‌ای است که عمدتاً از تجربه و تخصص آنها منشأ می‌گیرد.**

در حالت میانی این مسأله روش سامان‌یافته‌تری برای یادگیری کشفی می‌توانیم تصور کنیم. در این روش که می‌توانیم آن‌را «روش کشفی راهنمایی‌شده» بنامیم چارچوبی سامان‌یافته برای تدریس موضوع درسی طراحی می‌گردد که ضمن اجرای آن یادگیرنده، تحت راهنمایی و راهبری دبیر خود، به کشف موضوع از طریق فعالیت‌های از پیش تعیین‌شده نایل می‌شود.

- **در روش کشفی رهبری‌شده سؤالاتی می‌تواند مطرح شود:**

آیا در این روش، جواب مسأله از پیش برای دانش‌آموزان شناخته شده است؟

آیا قصدمان این است که مقداری از موضوع را برای دانش‌آموزان توضیح دهیم و مابقی کار را به‌عهده آنان بگذاریم؟

آیا در صورت اخیر، انتظار دست‌یابی به نتایج کار از دانش‌آموزی به دانش‌آموز دیگر متفاوت است؟ چنانچه جواب مثبت باشد، در این‌صورت به یک «یادگیری واگرا» دست یافته‌ایم. در چنین روشی،

راهنمایی و کمکی که دبیر به دانش‌آموزان ارائه می‌دهد متناسب با سطح هوشی آنان و متفاوت خواهد بود؛ به‌عبارت دیگر مقدار راهنمایی عرضه‌شده متناسب با نیاز دانش‌آموزان و توانایی‌های بالقوه آنان اســت. در یادگیری واگرا، حتی باید این اجازه را به دانش‌آموزان بدهیم که برحســب توانایی‌شان به نتایج پایانی متفاوتی دست یابند.

برای نمونه هرگاه دانش‌آموزی در مدت زمان کمی موفق به کشف فرمولی برای عبارت $۱+۲+۳+\cdots+n$ شــود می‌توانیــم از وی بخواهیم که برای عبارت $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+۴^۲$ نیز تلاش خــود را ادامه دهد، در حالی‌که سایر دانش‌آموزان، ممکن است با کشف فرمول عبارت اول، کارشان خاتمه‌یافته تلقی گردد.

مــا به‌عنــوان معلمین، دبیران و حتی اســاتید ریاضی باید از پیش معین کنیم که قصدمان از روش کشــفی چه چیزی می‌باشد.

آیا می‌خواهیم همه دانش‌آموزان به یک نقطه انتهایی در موضوع درسی برسند؟

آیا از روش کشفی این انتظار را داریم که فرآیند کشفی را آموزش دهیم، یعنی آن‌را به‌عنوان ابزاری برای کشف درنظر گرفته و «روش کشفی» برایمان مهمتر از محتوای موضوع بوده و اصراری بر رسیدن همه دانش‌آموزان به یک نقطه انتهایی نداریم؟

در چنین صورتی هدفمان چنین خواهد بود:

- **کشف به‌عنوان یک فرآیند- یاد بگیریم که چگونه باید یاد گرفت؟**

کشف به‌عنوان یک انگیزه- راه بهتری است برای کسب مهارت‌ها و دانش از پیش‌کشف‌شده.

یادگیری کشفی و یادگیری واگرا در دوره‌های عالی‌تر یادگیری و پژوهش‌های ریاضی ادامه می‌یابد. دانشجویانی که در دوران قبلی تحصیلات خود با این روش‌ها آشنا شده‌اند، در دوران عالی‌تر پژوهش‌های ریاضی موفق‌تر می‌باشند.

برخی از متخصصین آموزش روش‌های یادگیری واگرا را روش‌های آموزشی پژوهشی- محور نیز نامیده‌اند.

اجرای روش‌های «یادگیری واگرا» مبتنی‌بر سیاســت‌گذاری مدرســه‌ای نیز می‌باشــد؛ بدین معنی که هرگاه طراحی برنامه مدرســه براســاس تربیت و تعلیم شــاگردانی ممتاز و بالنده باشــد که از اعتماد به نفس والایی برخوردار بوده و از حل مســأله‌هایی که پیش خواهد آمد لذت برده و توانایی ارائه طرح‌هایی برای آن داشــته باشند، از این‌گونه روش‌ها استفاده وافر می‌گردد.

۲-۴ روش تدریس فعال

مقدمه: مهمترین روشـــی که برای تعلیم مفاهیم و روابط ریاضی پیشـــنهاد شـــده و امروزه در دنیا مورد توجه متخصصین آموزش ریاضی اســـت روش تدریس فعال می‌باشـــد. این روش را گاهی روش کشـــفی و یا روش مکاشـــفه‌ای نیز نامیده‌اند. در این روش اســـتفاده از احساســـات و ادراکات یادگیرنده (محصلین) برای رسیدن به درک مفاهیم و مطالب مورد تدریس نقش اساســـی دارد. بنیان فکری این روش بر تحقیقات متدلوژیســـت سوئیسی ژان‌پیاژه و پیشرفت روان‌شناسی یادگیری ریاضی استوار است.

در این روش نقش معلم را می‌توان چنین تبیین کرد که دانش‌آموزان را در مقابل صحنه‌ها و یا موقعیت‌هایی قرار می‌دهد که کیفیت وقایع و عوامل موجود در آنها، وجود مفاهیم و روابط معین را به او القا می‌کند. شکی نیست که ارائه این موقعیت‌ها باید متناسب با زندگی اطراف دانش‌آموزان بوده و در این رابطه نقش وسایل کمک‌آموزشی نیز حائز اهمیت است.

اهمیت روش فعال بر ســـایر روش‌هـــا را می‌توان در گفتار کوتاه و قدیمـــی زیر که یک ضرب‌المثل چینی است چنین خلاصه کرد:

- **من می‌شنوم و فراموش می‌کنم،**
- **من می‌بینم و بخاطر می‌آورم**
- **من عمل می‌کنم و می‌فهمم**

امـــروزه جوهره پروژه‌ها و تحقیقات آموزشـــی و یادگیری ریاضیات را چنین گفتاری تشـــکیل می‌دهد. چنین پروژه‌هایی بر تاریخ طولانی فلســـفه تربیتی تأکید دارند که معتقد اســـت فرد با «عمل و انجام دادن» بهتر یاد می‌گیرد. گو اینکه این ایده در زمان‌های پیشـــین عام‌الفهم نبوده است، معهذا در تاریخ تعلیم و تربیت همواره مطرح بوده اســـت. اگر بخواهیم محک ســـاده‌ای برای کارایی و مترقی بودن یک دستگاه آموزشی (مهدکودک، دبســـتان، دانشـــگاه و کل نظام آموزشی یک کشور) ارائه دهیم باید ببینیم که تا چه اندازه روش‌های یادگیری فعال مورد توجه و عمل قرار گرفته و تا چه اندازه یادگیری توأم با لذت و بالندگی اســـت. میزان علایق واقعی دانش‌آموزان به مطالعه و کشف روابط علمی و پویایی و شکوفایی استعدادهای بالقوه آنان که سرمایه‌های اصلی هر کشـــور هستند در گرو آماده‌سازی موقعیت‌های صحیح یادگیری است نه آموزش‌های ماشینی و حافظه‌ای که چیزی جز خستگی ذهنی به بار نخواهد داشت.

در اینجا بعضی از گفته‌های علمای تعلیم و تربیت را در طی ۳۰۰ سال اخیر ذکر می‌کنیم برای اینکه این ادعا را روشن‌تر سازیم که روش‌های یادگیری فعال همواره مورد توجه و علاقه‌مندی متخصصین امر بوده است.

«به محصلتان یاد بدهید تا پدیده‌های طبیعت را مشاهده نمایند؛ به زودی حس کنجکاوی او را تحریک خواهید کرد. اما اگر این کنجکاوی را شدید یافتید در ارضای آن حس زیاد عجله نکنید. مسائل را به وی ارائه دهید و بگذارید که خودش حل کند. بگذارید چیزی نداند، نه از برای آنکه به وی گفته‌اید که نباید به او چیزی بگویید، بلکه از برای آنکه او آن را برای خودش یاد بگیرد.»

«بدون تردید مفاهیم و اشیایی را که خودش بدانها شناخت پیدا می‌کند و به‌دست می‌آورد روشن‌تر و قانع‌کننده‌تر از آنهایی است که به‌وسیله دیگران به وی آموزش داده می‌شود.»

(امیل- ۱۷۶۲)

«بهترین راه آماده‌سازی و رشد توانایی‌های ذهنی آن است که چیزهایی را که آرزومندیم با موفقیت به پایان رسانیم خودمان انجام دهیم......... بهترین راه فهمیدن عمل کردن است.»

(کانت ۱۸۰۲)

بنابراین همیشه سؤال‌های بچه‌هایتان را فوراً و مستقیماً پاسخ ندهید. در عوض به‌محض آنکه آنها تجربه و آمادگی کافی به‌دست آوردند برایشان ابزار و وسایلی فراهم نمایید تا جواب‌ها را دریابند.

۲-۴-۱ اصول یادگیری (روش فعال):

مطلوب‌ترین روش تدریس روشی می‌باشد که بر پایه اصول یادگیری پایه‌گذاری شده است. در این روش وضعیت کلاسی را که مورد نظرمان است می‌توان در سه اصل یادگیری ذیل که بهتر است آنها را سه اصل آموزش نیز بنامیم خلاصه نمود.

۱. یادگیری فعال: بهترین راه یادگیری هر چیز کشف آن چیز به‌وسیله متعلم (یادگیرنده) است. این اصلی است که مبنای روش سقراطی بوده و به‌اندازه خود یادگیری قدمت دارد.[۱]

۲. بهترین تحریک (انگیزه): برای آنکه یادگیری مؤثر و فعال باشد، متعلم باید در مواردی که به وی یاد داده می‌شود علاقه‌مند باشد و در فعالیت یادگیری خشنودی بیابد و این در صورتی تحقق می‌یابد که برای یادگیری انگیزه داشته باشد. یک محصل (متعلم) تحریک شده و با انگیزه خیلی سهل‌تر از کسی که تحریک نشده است مطالب را فرامی‌گیرد.

---

۱. مشهور است که سقراط (فیلسوف یونانی) طریقه‌ای برای اثبات سهو و خطا و رفع شبهه از اذهان به‌کار می‌برد، در این طریقه با سؤال و جواب و مجادله سعی داشت خطای مخاطب را ظاهر کند. پس از آن، باز به همان ترتیب، سؤال و جواب را دنبال می‌کرد تا سرانجام خود و شاگردانش به کشف حقیقت نائل شوند. بعضی‌ها این روش تعلیمات سقراط را مامایی نامیده‌اند، زیرا که او می‌گفت دانشی ندارم و تعلیم نمی‌کنم. من مانند مادرم فن مامایی دارم (مادر سقراط ماما بود) او کودکان را در زادن مدد می‌کرد. من نفوسی را یاری می‌کنم که زاده شوند، یعنی به خود آیند و راه کسب معرفت را بیابند. وی به‌راستی در این فن ماهر بود و مصاحبان خود را منقلب می‌کرد و لذا کسانی‌که او را وجودی خطرناک شمرده و در هلاکتش پافشردند، قدرت و تأثیر نفس او را درست دریافته بودند. سقراط را به جرم اینکه به آیین رسمی و دولتی اعتقاد ندارد و پرستش خدایان جدید را ترویج می‌کند محکوم به مرگ کردند. وی با نوشیدن جام شوکران زندگی را فدای عقاید خود کرد. تعلیمات اخلاقی سقراط تنها موعظه و نصیحت نبود و برای نیکوکاری و درستکرداری مبنای علمی و عقلی می‌جست. بد عملی را اشتباه و نادانی می‌دانست و می‌گفت: مردمان از روی علم و عمد دنبال شر نمی‌روند اگر خیر و نیکی را تشخیص دهند البته آن‌را اختیار می‌کنند، پس باید در تشخیص خیر کوشید.

تحریکات ممکن است شامل، آرزوی یادگیری، احتیاج به نقش داشتن، آرزوی داشتن یک مدرک به‌خصوص و یا پرهیز از تنبیه باشند. البته یادگیری تحت تحریکات ذاتی بر یادگیری تحت تحریکات خارجی رجحان دارد.

۳. فازها یا مراحل متوالی آموزش: یادگیری با عمل و خیال و گمان شروع می‌شود، سپس از آنجا به کلمات و مفاهیم می‌انجامد، و باید به‌صورت عادات ذهنی مورد نظر خاتمه یابد.

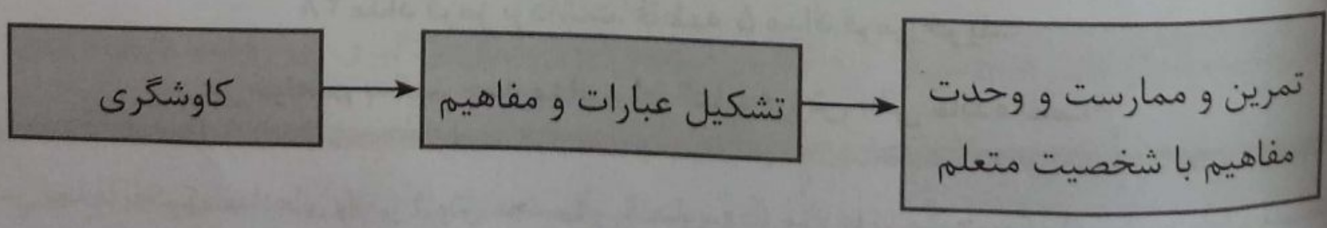
به‌عبارت دیگر برای آنکه یادگیری مؤثر و فعال باشد، لازم است که یک فاز کاوشگری مقدم بر فاز تشکیل عبارات و مفاهیم وجود داشته باشد، سرانجام باید مواد یاد داده‌شده به وضعیت‌سازی متعلم و رفتار وی سهمی ببخشند و با این وضعیت یکی شوند.[۱]

۲-۵ تدریس به روش فعال در دوره‌های مقدماتی

با توجه به اصول فوق‌الذکر، در عمل معلمین با استفاده از وسایل کمک‌آموزشی به طریقه‌های مجسم، نیمه‌جسم و مجرد و به یاری فنون و هنرهای معمول مانند استفاده از داستان‌های مناسب و نقاشی‌ها متناسب، مقدماتی فراهم می‌کنند تا متعلم در طی آن به کشف مفاهیم و روابط مورد نظر نایل شود (مرحله کاوشگری). سپس با استفاده از سؤال و جواب و بحث بین معلم و بچه‌ها و یا خود بچه‌ها تشکیل عبارات مورد نظر انجام می‌گیرد. در مرحله آخر با تمرین‌های مکرر و ممارست‌های عملی در مورد مفاهیم و تکنیک‌های یادگرفته‌شده سعی می‌شود این مفاهیم و مطالب با رفتار دانش‌آموزان وحدت پیدا کند.

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که در مراحل کاوشگری و تشکیل عبارات و مفاهیم، تعاون و همکاری گروهی بچه‌ها با یکدیگر نقش بسزایی دارد. چنانچه امکانات کلاس اجازه دهد باید معلمین سعی کنند که در ضمن آموزش حس تعاون و همکاری گروهی را در بچه‌ها تقویت کنند و از آن به‌عنوان عاملی در جهت آموزش و یادگیری صحیح استفاده نمایند.

مراحل یادگیری (آموزش) فعال را به‌طور خلاصه می‌توان در چارت ذیل درج نمود:



۲. در روان‌شناسی گویند که یادگیری برای تغییر رفتار است. این بدان معنی است که یادگیرنده مطالبی را که یاد گرفته در رفتار او باید اثر بگذارد و با شخصیت وی وحدت پیدا کند. برای مثال محصلی که ضرب اعداد یک‌رقمی را خوب یاد گرفته است، به‌محض آنکه یک چنین ضربی را به وی ارائه دهیم عکس‌العمل نشان داده و جواب آن‌را می‌گوید در صورتی‌که قبل از یادگیری این ضرب رفتاری دیگر داشت و عکس‌العملی غیر از این داشته است.

مسئله

۱. فرض کنیم هدف آموزش ضرب‌های یک‌رقمی در یک‌رقمی باشد. به‌طریق مجسم می‌توان تعدادی از دانش‌آموزان (مثلاً ۶ نفر) را در دو ردیف ۳ تایی مرتب کرده، سپس با سؤال و جواب از بچه‌ها به‌عبارت ۲ تا ۳ تا می‌شود ۶ تا رهنمودشان کرد و یا در طریق نیمه‌مجسم، که معمولاً در کتاب‌ها به‌سهولت امکان‌پذیر است دو ردیف سه‌تایی از سیب، پروانه و غیره هم را نقاشی کرد و سپس از بچه‌ها خواست تا تساوی $\square = ۳ \times ۲$ و یا تساوی‌های $۶ = ۳ \times \square$ و $۶ = \square \times ۲$ را کامل کنند.

۲. فرض کنیم مواد تقسیم کسر بر کسر و یا حالت ساده‌تر آن تقسیم عدد بر کسر باشد که معمولاً در کلاس پنجم ذکر می‌شود. ابتدا با ذکر نمونه‌های ملموس از قبیل اینکه از یک میله ۶ متری چند تکه نیم $(\frac{۱}{۲})$ متری می‌توان جدا کرد، بچه‌ها را به مفهوم تقسیم عدد بر کسر آشنا می‌کنیم:

پس وقتی یک میله ۶ متری به میله‌های $\frac{۱}{۲}$ متری تقسیم می‌شود ۱۲ تکه به‌دست می‌آید، یعنی:

$$۶ : \frac{۱}{۲} = ۱۲$$

و یا هرگاه ۲ سیب را به تکه‌های ثلثی تقسیم کنیم ۶ تکه به‌دست می‌آوریم، پس:

$$۲ : \frac{۱}{۳} = ۶$$

در این مرحله اصلاً صحبت از معکوس کردن کسر دوم و ضرب آن در عدد (کسر اول) نیست، البته اگر بچه‌ها خود این حقیقت را کشف کنند اهمیت بسزایی دارد.

۳. فرض کنیم که می‌خواهیم تفریق در اعداد دو رقمی (بدون انتقال) را به دانش‌آموزان یاد بدهیم. برای این کار به طریقی مثلاً با یک داستان برای بچه‌ها انگیزه یادگیری تفریق را ایجاد می‌کنیم. داستان زیر از کتاب ریاضی سال دوم (صفحه ۱۱۴) نقل می‌شود.

فاطمه برای خرید مداد قرمز به کتاب‌فروشی رفت. **۲۸ مداد قرمز برداشت. فاطمه ۵ مداد قرمز خرید.** **می‌خواهیم بدانیم چند مداد برای کتاب‌فروش باقی مانده است؟**

سپس بچه‌ها به‌کمک مدادهای واقعی (روش مجسم) و با تصاویری از مدادها (نیمه‌مجسم) به کاوشگری می‌پردازند (مرحله کاوشگری) برای نیل به جواب مسئله تحقیق و کاوش نمایند. در این مرحله باید به بچه‌ها وقت و ابزار کافی داد تا بتوانند در مسئله

محسن از جمله بچه‌هایی بود که به حل مسئله نایل آمد. محسن دو دسته ۱۰تایی مداد و ۸ یکی مداد کشید. سپس چنین استدلال نمود که کتاب‌فروش ۵ مداد از ۸ مداد برمی‌دارد و به فاطمه می‌دهد و ۳ تا از ۸ تا (یکی‌ها) باقی می‌ماند پس دو دسته ۱۰تایی و ۳ یکی برای کتاب‌فروشی باقی می‌ماند. یعنی ۲۳ مداد برای کتاب‌فروش باقی می‌ماند.

یکی‌ها	ده‌تایی
۸	۲
۵	-
۳	۲

۲۸ − ۵ = ۲۳

در اینجا با ذکر مثال‌های مشابه و سرانجام نوشتن تساوی‌های تفریق و جدول‌های مربوطه در واقع بچه‌ها به مرحله تشکیل عبارات نایل می‌شوند. (تفریق ستونی و سطری) که در اثر ممارست و تمرین به‌صورت ملکه ذهن آنان درمی‌آید و جزئی از رفتار آنان را تشکیل می‌دهد.

۴. برای تعدادی از بچه‌های ۸ تا ۹ ساله که دایره را قبلاً شناخته‌اند به‌کمک یک تکه نخ یک دایره می‌کشیم. نقطه ثابتی را که نخ دور آن می‌گردد، به بچه‌ها نشان داده و اسم آن‌را نیز که همان مرکز باشد به بچه‌ها یاد می‌دهیم سپس از یکی از بچه‌ها می‌خواهیم تا یک نقطه روی دایره به دلخواه خود نامگذاری کرده و فاصله آن‌را تا نقطه (م) که مرکز دایره باشد با خط‌کش اندازه بگیرد. (بهتر است طول نخی که به‌کمک آن دایره می‌کشیم عددی درست باشد، مفهوم اندازه‌گیری را نیز قبلاً به بچه‌ها یاد داده بودیم). احمد فاصله (دم) را اندازه‌گیری کرد و عدد ۱۲ سانتی‌متر را به‌دست آورد. این عمل را با کمک بچه‌های دیگر و با انتخاب نقاطی دیگر از دایره تکرار کرده‌ایم و از بچه‌ها خواستیم تا خود تجربه را تکرار نمایند و نتیجه‌ای را که به‌دست می‌آورند، یادداشت نمایند. (کاوشگری)

اغلب بچه‌ها این نتیجه را که فاصله تمام نقاط دایره تا مرکز آن یک اندازه (۱۲ سانتی‌متر) است به‌دست آورند (کشف عبارات و مفاهیم). سپس شعاع دایره را نیز معرفی نموده و از بچه‌ها خواستیم تا بگویند که یک دایره چند شعاع دارد. همچنان‌که ملاحظه می‌کنید در روش فعال یادگیری، این بچه‌ها هستند که با ابزار و وسایل کمک‌آموزشی (خط‌کش، مداد، کاغذ و...) و با راهنمایی معلمین خود به فعالیت پرداخته و به کشف روابط و مفاهیم نایل می‌شوند و نقش معلم بیشتر یک راهنماست تا یک فرد متکلم‌وحده و اغلب جواب‌های مورد نظر را بچه‌ها گرفته و پس از هماهنگی آنها را به کلاس برمی‌گرداند. و این روح تغییرات کلاسی است که آموزش و پرورش جدید و بافت مدارس جدید را تشکیل می‌دهد.

۵. معرفی π پس از اینکه قطر و محیط دایره را تعریف کردیم می‌خواستیم نسبت محیط دایره به قطر آن (عدد π) را به بچه‌ها معرفی کنیم. (این کار در کلاس چهارم و پنجم انجام می‌شود.)

در اینجا با فراهم نمودن چند شیء دایره‌ای شکل (مثلاً سکه‌های پول) از بچه‌ها می‌خواهیم تا با کمک یکدیگر (دوبه‌دو) محیط و قطر دایره‌ها را با خط‌کش و متر نواری اندازه‌گیری کرده و در جدولی در دفتر خود یادداشت کنند. یک زوج از بچه‌ها این اعداد را به‌دست آورده بودند:

قطر	۲	۳	۴	۵	۶	۷
محیط	۶/۱	۹/۵	۱۲/۸	۱۶	۱۸/۶	۲۲

(اعداد جدول بالا برحسب سانتی‌مترند)

سپس از آنها خواستیم تا مشاهدات و کشفیات خود را یادداشت نمایند. علی و احمد با بررسی اعداد جدول خود دریافتند که محیط هر دایره کمی بیش از ۳ برابر قطر آن است.

بقیه بچه‌ها نیز اعدادی نزدیک به ۳ و بزرگتر از ۳ به‌دست آورده بودند و با تعجب دریافتند که این اعداد به کوچکی و بزرگی دایره‌ها ربطی ندارد.

۶. در کلاس سوم وقتی بچه‌ها قطر چندضلعی را شناختند از آنها می‌خواهیم (و یا خودشان با کنجکاوی می‌خواهند بدانند) که تعداد قطرهای هر چندضلعی چندتاست.

وقتی بچه‌های سنین ۹ تا ۱۰ ساله این تجربیات را در مورد سه ضلعی (مثلث) چهارضلعی، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی انجام دادند این نتایج را به‌دست آوردند:

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد قطرها	۰	۲	۵	۹	۱۴

در اینجا ذکر این نکته لازم است که آنچه در روش فعال یادگیری مهم است فعالیت فیزیکی، ذهنی و گروهی (تعاون و همکاری) یادگیرندگان (متعلمین) می‌باشد و بدیهی است دانش‌آموزانی که بدین روش کار می‌کنند لذت کاوشگری را درک کرده و اطلاعات به‌دست‌آمده را شخصاً یادداشت نموده و در مراحل بعدی به عبارت‌بندی و یافتن مفاهیم ریاضی مناسب نایل می‌شوند. گو اینکه این مراحل بعدی ممکن است سال‌های بالاتر تحصیل باشد. فی‌المثل در مثال فوق‌الذکر جمع‌آوری اطلاعات راجع‌به تعداد اقطار چندضلعی‌ها و درج آنها در جدول

علاوه‌بر اینکه خود یکی از هدف‌های آموزش ریاضیات در دبستان می‌باشد زمینه‌ای برای رسیدن به فرمول (عبارت) تعداد اقطار برحسب تعداد اضلاع در سنین بالای دبستانی و یا سنین بالاتر به‌دست می‌دهد.

(اگر n تعداد ضلع‌های چندضلعی باشد تعداد قطرها برابر است با $n(n-۳)/۲$)

۷. روش فعال یادگیری داشتن وسایل کمک‌آموزشی (از قبیل مدادرنگی، کاغذ شطرنجی، خط‌کش، قیچی، پارچه و غیره) را جهت استفاده دانش‌آموزان ضروری می‌نماید. در این روش به‌جای اینکه بچه‌ها صرفاً ذهنی فکر کنند (به‌عبارت بهتر در خلأ بیندیشند) با مواد و اشیاء سر و کار داشته و به‌کمک ساخته‌های خود پی به مفاهیم ریاضی مورد نظر می‌برند. به‌علاوه از اینکه خود چیزهایی کشف می‌کنند بیشتر لذت می‌برند.

بر این اصل در کتاب‌های ریاضی ابتدایی (به‌خصوص اول، دوم، سوم) نقاشی‌ها زیادی دیده می‌شود تا بچه‌ها با تکمیل این نقاشیها به تقارن آنها و یا دیگر خواص آنها پی برده و زمینه مناسبی برای یادگیری این مفاهیم داشته باشند. (صفحات مربوط به تقارن در کتاب دانش‌آموز ملاحظه شوند.)

استفاده از موقعیت‌های تصویری که به روش نیمه‌مجسم مشهور است در سرتاسر این کتاب‌ها ملاحظه می‌شود. در این روش با استفاده از یک موقعیت تصویری و تساوی‌هایی که باید دانش‌آموز تکمیل نماید وی را هدایت به کشف قواعد و یا رابطه‌های ریاضی (مثلاً، ضرب یک عدد دورقمی در یک عدد یک‌رقمی) می‌کنیم تا خود به کاوشگری پرداخته و قاعده مورد نظر را کشف نماید. ناگفته پیداست که صفحات کتاب فقط راهنمایی معلم جهت تدریس مفاهیم ارائه شده است و این معلم است که با اتکا به روش‌های تدریس درست و سؤال و جواب با بچه‌ها (بحث)، آنها را به کشف روابط و قواعد علمی راهبری می‌نماید.

۲-۶ تدریس به روش فعال در دوره‌های متوسطه و عالی

وقتی ریاضیات را به‌عنوان مجموعه‌ای از فعالیت‌های بشری بدانیم که ریاضیدانان انجام می‌دهند ملاحظه می‌کنیم که تدریس به روش فعال در دوره‌های دبیرستانی و دانشگاهی نیز می‌تواند با موفقیت انجام گیرد. بنابر گفته بلیر[1] [۱] ریاضیات، به‌خصوص از جنبه آموزشی آن، ترجیحاً یک فعالیت از ذهن بشری است تا مجموعه‌ای از حقایق لایتغیر. البته آن فعالیتی منجربه ریاضیات می‌شود که به یک ساختار منظم صوری بیانجامد. از ساختار به‌وجود آمده و ساختارهای قبلی مجدداً ساختارهای دیگری به‌وجود آمده و بدین‌سان ریاضیات گسترش و توسعه می‌یابد و بدیهی است این توسعه توسط فعالیت‌های بشری انجام گیرد که در این مقام بدان فعالیت ریاضی می‌گوییم. بنابر گفته ساندرزمک‌لین[2] [۱] ریاضیات مشتمل بر کشف مراحل متوالی ساختارهای صوری است که در بطن دنیا و فعالیت‌های بشری نهفته است.

۱. Blair
۲. [illegible] Mclane

بنابراین ملاحظه می‌شود که مراد از واژه «فعالیت» به‌معنی عام آن است که هم شامل فعالیت‌های ملموس و هم شامل فعالیت‌های ذهنی است. در دوره‌های پیش‌دانشگاهی، به‌ویژه دوره دبستانی، محصلین از راه فعالیت‌های ملموس (مجسم و نیمه‌مجسم) و کار با اشکال هندسی و دیاگرام‌ها عمدتاً به کشف روابط ریاضی می‌پردازند. در دوره‌های نظری باز هم تأکید یادگیری بر فعالیت یادگیرنده (دانش‌آموز یا دانشجو) متمرکز است لیکن بنابر ماهیت موضوعی این فعالیت ممکن است فعالیتی صرفاً ذهنی و یا آنکه آمیخته‌ای از فعالیت‌های ملموس و ذهنی بوده باشد.

اصول روش تدریس فعال اساساً همان است که در بخش پیشین ذکر گردید. برای روشن‌تر شدن این روش در دوره‌های نظری به ذکر مثال‌هایی چند می‌پردازیم.

مثال ۱ (تدریس همنهشتی‌ها):

معلم: از لحاظ قابلیت تقسیم بر ۲ اعداد صحیح را دسته‌بندی کنید.

دسته اول:

$$0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$$

دسته دوم:

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots$$

معلم: دسته اول را با نماد $[0]$ و دسته دوم را با نماد $[1]$ نشان دهید. $[0]$ و $[1]$ را رده‌های باقیمانده‌ای به هنگ ۲ می‌نامیم. پس وقتی $x \in [0]$، باقیمانده تقسیم x بر ۲ برابر ۰ است. لذا هرگاه $x_1 - x_2 \in [0]$ می‌نویسیم:

$x_1 \equiv x_2$ (به هنگ ۲)

و می‌خوانیم x_1 همنهشت است با x_2 با هنگ ۲.

همچنین وقتی $y_1, y_2 \in [1]$ می‌نویسیم (به هنگ ۲) $y_1 = y_2$؛ یعنی y_1 و y_2 دارای باقیمانده‌های مساوی هستند. (در تقسیم بر ۲). حال $n = 3$ اختیار کنید و همین موضوع را درباره رده‌های باقیمانده‌ای به هنگ ۳ تعمیم و گسترش دهید.

$$[0]: 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots$$

$$[1]: +1, +4, +7, +10, \ldots, -2, -5, -8, \ldots$$

$$[2]: +2, +5, +8, +11, \ldots, -1, -4, -7, -10, \ldots$$

معلم: چنانچه در دسته‌بندی‌ها دانش‌آموزان مشکل داشته باشند، قضیه تقسیم را یادآوری می‌کنند و مثلاً می‌نویسند:

$-۴ = (-۲)(۳) + ۲$

$-۸ = (-۳)(۳) + ۱$

و یادآوری می‌کنند که باقیمانده باید همواره مثبت باشد. معنی عبارت‌های (هنگ ۳) $x \equiv ۲$، (هنگ ۳) $y \equiv ۱$ را ذکر کرده و دو مقدار برای x و ۴ مقدار y را پیدا کنید:

$x = ۵ \quad x = ۲$

$y = -۸ \quad y = ۱۶ \quad y = ۴ \quad y = ۱۰$

معلم (تعمیم و گسترش مفهوم): فرض کنیم n عدد طبیعی و ثابتی باشد. چند رده باقیمانده‌ای نسبت به n وجود دارد؟ آنها را فهرست کنید. (n رده)

$[۰],[۱],[۲],\ldots,[n-۱]$

معلم: اگر مشکل داشته باشند، می‌توان با اختیار کردن $n = ۴$ و $n = ۵$ دانش‌آموزان را وادار به بررسی بیشتر کرده تا بتوانند حدس درستی ارائه دهند.

۲-۶-۱ مطالعه و بررسی بیشتر

معلم: فرض کنیم (هنگ n) $x \equiv k$ و (هنگ n) $y = k$. آیا (هنگ n) $x + y \equiv k$؟ آیا (هنگ n) $x + y \equiv ۲k$؟ یا (هنگ n) $x - y \equiv ۰$؟ آیا (هنگ n) $mx=mk$ (m عدد طبیعی دلخواهی است)؟

و سؤال‌های دیگری نیز می‌توان مطرح کرد. چنانچه بعضی از دانش‌آموزان آمادگی و توانایی بیشتری داشته باشند، می‌توان تمرین‌های جدیدتر برای آنها طرح و ارائه کرد تا کار و فعالیت بیشتری کرده روابط همنهشتی را کشف کنند.

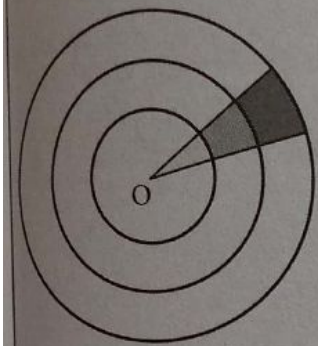
برای نمونه (برای دانش‌آموزان قوی‌تر) می‌توان این سؤال را مطرح کرد آیا از اینکه (هنگ n) $kx \equiv ky$ می‌توان نتیجه گرفت که (هنگ n) $x \equiv y$؟ حدس خود را اثبات کنید و یا چنانچه جواب منفی است مثال مشخصی ارائه دهید.

و یا آنکه: تحت چه شرایطی از (هنگ n) $kx \equiv ky$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که (هنگ n) $x \equiv y$؟ و

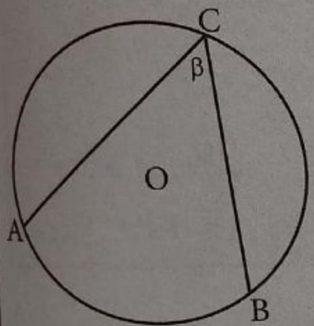
یادگیری با سؤال، فعالیت و پرسش و پاسخ ادامه می‌یابد.

وظیفه یک معلم آگاه و شایسته طراحی سناریویی است که بر طبق آن پرسش‌های مناسب مطرح شده و فعالیت‌های یادگیری انجام گیرد.

مثال ۲ (هدف): تدریس زاویه‌های محاطی و ظلی و محاسـبه اندازه این زاویه‌هاست. یادآوری و پیش‌نیاز، مفهوم زاویه، اندازه زاویه مرکزی. می‌دانیم اندازه کمان‌های رنگی همه با هم برابر است و این اندازه با اندازه زاویه α یکی است. می‌دانید چرا؟



زاویه α را یک زاویه مرکزی می‌نامیم. پس اندازه هر زاویه مرکزی برابر اندازه کمان مقابلش اسـت. به زاویه β توجه کنید:

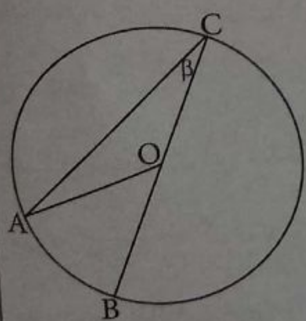


β: زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره و دو ضلعش وترهایی از دایره‌اند.

معلم: زاویه β را یک زاویه محاطی می‌نامیم. کمان $\widehat{AB}$ چقدر است؟

اندازه زاویه β برحسب کمان $\widehat{AB}$ چقدر است؟

راهنمایی: ابتدا حالت ساده‌تری از β را بررسی کنید. حالتی‌که یک ضلع زاویه از مرکز دایره می‌گذرد.



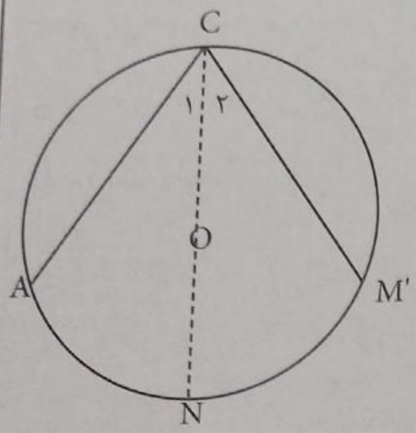
از O به A وصل می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین CAO داریم $\hat{O} = ۲\hat{\beta}$ (به چه دلیل؟)

بنابراین $\hat{\beta} = \frac{\hat{O}}{۲} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$

زیرا $\hat{O}$ یک زاویه مرکزی است!

نتیجـــه: در ایـــن حالت خاص، اندازه زاویه محاطی برابر اندازه نصف کمان مقابلش می‌باشـــد. آیا این نتیجه کلیت دارد؟

معلم- تعمیم و گسترش: به حالت کلی برمی‌گردیم.



راهنمایی: از C به O وصل کنید و ادامه دهید. اکنون چند زاویه محاطی می‌بینید؟

سه تا از افراز $(\beta =)A\hat{C}M, M\hat{C}N, A\hat{C}N$

معلم: چه رابطه‌هایی بین این سه زاویه وجود دارد؟

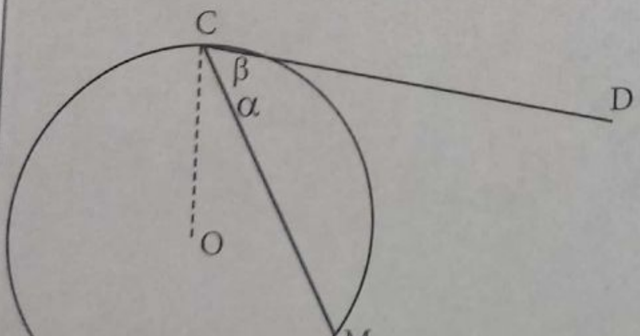
$$\hat{\beta} = A\hat{C}M = A\hat{C}N + N\hat{C}M$$

پس، بنابر حالت خاص پیشین:

$$\hat{\beta} = \frac{AN}{۲} + \frac{MN}{۲} = \frac{AM}{۲}$$

یعنی اندازه β برابر است با نصف اندازه کمان مقابلش.

معلم (تعمیم و گسترش): به زاویه مقابل توجه کنید.



یک ضلع این زاویه، یعنی ضلع DC، بر دایره مماس است و ضلع دیگر آن وتری از دایره است. چنین زاویه C را یک زاویه ظلی می‌نامیم. کمان $\widehat{CM}$ کمان مقابل به زاویه ظلی β می‌باشد.

معلم: اندازه زاویه ظلی برحسب کمان مقابلش چقدر است؟

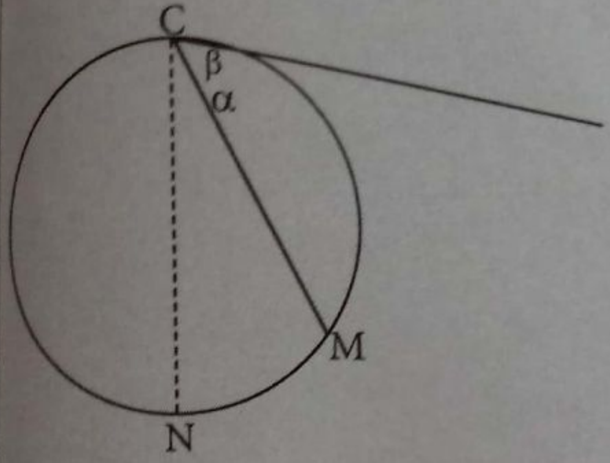
بررسی و فعالیت؛ خط‌هایی در داخل شکل می‌کشد. مسئله را به مسئله‌های پیشین ربط می‌دهد و یا آنکه حالت ساده‌تری از مسئله را درنظر می‌گیرد و.... استراتژی دانش‌آموزان ممکن است متفاوت باشد.

حالت خاصی از زاویه ظلی که ضلع دیگر قطر دایره اســت. در این حالت خاص، اندازه زاویه ظلی برابر یک قائمه است زیرا DC عمود بر OC است. کمان مقابل، کمان MC می‌باشد که برابر ۲ قائمه است.

معلم: در صورت نیاز دانش‌آموزان را راهنمایی می‌کند.

از اندازه زاویه محاطی که قبلاً یاد گرفته‌اید استفاده کنید.

α, β متمم‌اند.



اما:

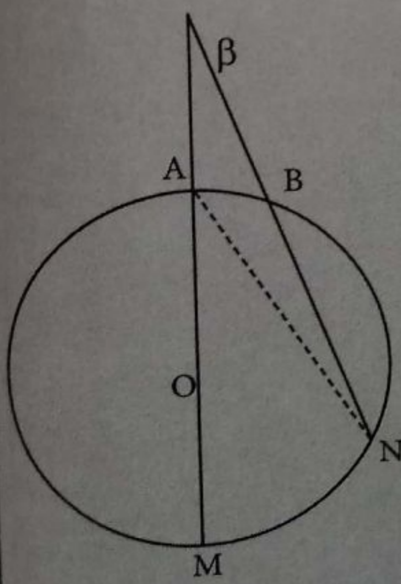
$$\hat{\beta} + \hat{\alpha} = \pi/۲$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{MN}}{۲}$$

بنابراین:

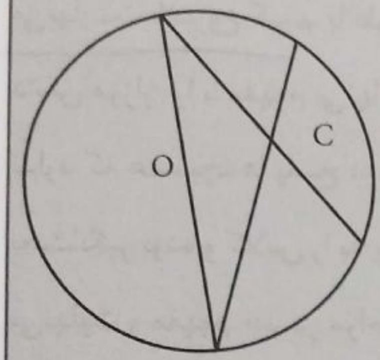
$$\hat{\beta} = \pi/۲ - \frac{\widehat{MN}}{۲} = \widehat{CN}/۲ - \widehat{MN}/۲ = \widehat{CM}/۲$$

مسئله (کاربرد) اندازه زاویه β را برحسب کمان‌های دایره پیدا کنید:



راهنمایی: (چنانچه لازم باشد) وتری مانند خطچین رسم کنید چند زاویه می‌بینید و رابطه آنها چیست؟

مسئله (کاربرد) اندازه زاویه β (یک زاویه داخلی) را برحسب اندازه کمان‌های دایره پیدا کنید:



راهنمایی: (چنانچه لازم باشد) یک ضلع زاویه را ادامه دهید. رابطه بین β و زاویه‌های محاطی چیست؟ قبلاً حدس بزنید!

نکته

ملاحظه می‌کنیم که در روش فعال، به‌جای آنکه معلم به ذکر همه جزئیات پرداخته و همه مطالب مربوط را توضیح بدهد تا دانش‌آموزان فقط به سخنان معلم گوش دهند و یا وی را تماشا کنند، با طراحی سناریویی مناسب و هدف‌دار فعالیت‌های دانش‌آموزان را رهبری می‌کنند تا خود دانش‌آموزان مفاهیم و روابط بین آنها را کشف کنند؛ به‌عبارت دیگر در این روش به تفکری سازنده و خلاق پرداخته و به روش‌های بررسی و تحقیق عادت می‌کنند. همه دانش‌آموزان به تناسب استعدادهای خود لذت کشف کردن و خلاقیت را می‌چشند و به‌جای آنکه از خیل انبوه دانش‌آموزان چند نفری را برگزیده و به نخبه‌پروری بپردازیم، همه دانش‌آموزان را با فرایند تحقیق و پژوهش عادت می‌دهیم.

ما بر این باوریم که همگی دانش‌آموزان از استعداد و توانایی خلاقیت برخوردارند ولی متأسفانه در طول زندگی و در مسیر آموزش و تعلیم به افرادی غیرخلاق مبدل می‌شوند.

همه مطالب را می‌توان با روش فعال تدریس کرد. در اینجا به تدریس یکی از مشکل‌ترین مفاهیم ریاضی، یعنی مفهوم حد، می‌پردازیم. می‌دانیم مفهوم حد از اساسی‌ترین و بنیادی‌ترین مفاهیم ریاضی است که در دوره دبیرستان دانش‌آموزان ریاضی ملزم به فراگیری آن هستند.

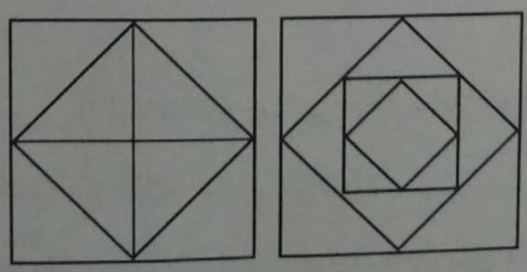
فقدان تدریس مناسب و نارسایی‌های کتاب‌های درسی باعث می‌شود تا دانش‌آموزان درک درست و مناسبی از این مفهوم نداشته و فقط به تکنیک‌های حدگیری که بیشتر جنبه ماشینی دارد اکتفا کنند.

مثـال ۳ (تدریـس حد به روش فعال): به‌عنـوان پیش‌نیازی برای آموزش مفهوم حـد می‌توانیم با مفهوم بی‌نهایـت شـروع کنیم. با طرح سـؤالاتی نظیر سـؤالات ذیل به دانش‌آمـوزان ابتدایـی (کلاس دوم به بالا) دانش‌آموزان را با مفهوم بی‌نهایت آشـنا می‌کنیم یا حداقل زمینه آشـنایی آنها را فراهم می‌کنیم. البته لزومی ندارد که همه بچه‌ها پاسخ درست به این‌گونه سؤالات بدهند. آنچه ممکن است این است که بعضی از پاسخ‌ها بحث‌انگیز بوده و کلاس را به یک بحث علمی مشـغول می‌دارند و این زمینه بسـیار مناسـبی برای شـناخت بی‌نهایت و مفهوم حد در مراحل بعدی است. اما سؤالاتی که مربوط به بی‌نهایت می‌شود و مناسب کلاس دوم ابتدایی یا کمی بالاتر از آن باشد بدین قرارند:

- الف) فکر می‌کنید چند عدد وجود دارد؟
- ب) بزرگترین عدد کدام است؟
- ج) کوچکترین عدد کدام است؟
- د) چه تعداد عدد بین ۰ و ۱ می‌شناسید؟
- ه) چند کسر مختلف وجود دارد؟

تجربه (دوم یا سوم راهنمایی): از دانش‌آموزان می‌خواهیم که مربعی به طول یک واحد (مثلاً ده سانتی‌متر یا یک دسی‌متر) رسم کنند. سپس وسط اضلاع مجاور را به‌هم وصل کنند تا مربع دیگری پدید آید. سپس از آنان خواسته می‌شود تا مساحت مربع به‌دست‌آمده را حساب کنند. (نصف مساحت مربع قبلی و با استفاده از خط‌چین‌ها و نه محاسبه وتر مثلث قائم‌الزاویه.)

پس مساحت مربع اول برابر ۱ واحد سطح و مساحت مربع دوم $\frac{۱}{۲}$ واحد سطح است.



شکل ۱: الف — شکل ۱: ب

عمل را با مربع جدید عیناً تکرار و مساحت مربع به‌دست‌آمده را حساب می‌کنند، (نصف مساحت مربع قبلی یعنی $\frac{۱}{۴}$) در ادامه به آنان گفته می‌شود که عمل را هر چند بار که می‌توانید تکرار کنید و مساحت مربع‌های به‌دست‌آمده را حساب کنید.

$۱=$ مساحت مربع اول

$\frac{۱}{۲}=$ مساحت مربع دوم

$\frac{۱}{۴}=$ مساحت مربع سوم

$\frac{۱}{۸}=$ مساحت مربع چهارم

$\vdots$

$\frac{۱}{۲^{۹}}=$ مساحت مربع دهم

دانش‌آموزان با توجه به این الگوریتم و بدون نیاز به رسم اشکال که تدریجاً نامکن می‌شود می‌توانند مساحت هر مربع را محاسبه کنند. از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که نتیجه تجربیات خود را بیان کنند. با تکرار این عمل ملاحظه می‌کنیم که مساحت مربع‌های به‌دست‌آمده از هر عدد که بخواهیم کوچکتر می‌شود و می‌دانیم این همان مفهوم حد است که دانش‌آموزان به‌گونه‌ای نیمه‌تجربی در این مورد، با آن آشنا می‌شوند.

آموزش مفهوم حد در دوره نظری: با یادآوری مفهوم حد از کلاس سوم راهنمایی با مثال‌هایی شبیه آنچه که گفته شد، توجه دانش‌آموزان را به ساختار منطقی این مفهوم معطوف می‌داریم. در مورد مثال مربع‌ها، اینکه مساحت مربع‌ها از هر عدد که بخواهیم کوچکتر می‌شوند مشروط بر آنکه عمل را به قدر کافی ادامه دهیم (به‌طور عملی یا ذهنی). با استفاده از نمادگذاری ریاضی اگر مساحت مربع n ام را به S_n نشان دهیم، آنگاه چنانکه دیدیم $S_n=\frac{۱}{۲^{n-۱}}$. حال اگر بخواهیم مثلاً $S_n<\frac{۲}{۱۰۰}$ بشود باید ببینیم n چقدر باشد تا:

$$\frac{۱}{۲^{n-۱}}<\frac{۱}{۱۰۰} \qquad (۱-۲)$$

گوییم به‌جای آنکه $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ ها را از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتر کنیم می‌توانیم آنها را از $\frac{۱}{۲^{۷}}$ کوچکتر بکنیم. لذا کافی است نامساوی:

$$\frac{۱}{۲^{n-۱}}<\frac{۱}{۲^{۷}} \qquad (۲-۲)$$

را حل بکنیم. یعنی $n-۱>۷$ و یا اگر $n>۸$ باشد، نامساوی ۲-۲ و به طریق اولی ۲-۱ برقرار است. یعنی از مرتبه هشتم به بعد مساحت همه مربع‌ها از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکترند.

پس از اینکه دانش‌آموزان با مثال‌هایی از این قبیل و با اعدادی مانند $\frac{۱}{۱۰۰۰}$, $\frac{۱}{۱۰^{۶}}$ به‌جای $\frac{۱}{۱۰۰}$ و به‌عنوان نمونه‌هایی از اعداد کوچک دلخواه، الگوریتم فوق را تکرار کردند می‌توانیم این خصوصیت را به شکل منطقی و با استفاده از نمادهای سوری بیان کنیم: «مقادیر S_n ها (مساحت مربع‌ها در مثال فوق) را می‌توانیم از هر عدد دلخواه (کوچک) مانند ε کوچکتر بکنیم مشروط بر اینکه n به‌قدر کافی بزرگ انتخاب شود» (مربع‌ها را به قدر

کافی نصف کرده باشیم) و یا:

$$\forall\varepsilon\exists k\forall n\ \ (n \geq k \Rightarrow S_n < \varepsilon)$$

در این حالت اصطلاحاً گوییم که «حد S_n وقتی‌که n به بینهایت میل کند برابر صفر است» و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to\infty} S_n = ۰$ ضمناً ذکر این نکته نیز ضروری است که گو اینکه مقادیر S_n از هر عدد کوچکتر می‌شوند ولی همواره $S_n \neq ۰$، زیرا هر S_n مساحت یک مربع است که هیچ‌وقت صفر نمی‌شود. به‌علاوه، در این تعریف سور عمومی متناظر قید «دلخواه» و سور وجودی متناظر «به‌قدر کافی» در تعریف حد به زبان معمولی هستند که دانش‌آموزان به‌کمک پیش‌نیازها و کار عملی روی مثال‌ها به درک آن پی برده و نه تنها تعریف سوری حد را به‌درستی فرا می‌گیرند بلکه قادرند مفهوم حد را به زبانی ساده و روان نیز بیان کنند و لذا می‌توان گفت که مفهوم حد را فهمیده‌اند.

حد توابع: پس از آشنایی با مفهوم حد دنباله‌ها حد توابع را شروع می‌کنیم. البته در اینجا نیز باید مفاهیم قبلی حد به‌عنوان پیش‌نیاز یادآوری گردد. می‌توانیم با توابع ساده‌ای مانند:

$f(x) = ۲x + ۱$ یا $f(x) = \dfrac{۱}{x}$

شروع کنیم. در مورد مثال اول از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا مقادیر تابع را به‌ازای x های بزرگ در یک جدول بنویسند. عیناً مشابه دنباله $f_n = \dfrac{۱}{n}$ نتیجه می‌گیرند که وقتی x به‌قدر کافی بزرگ اختیار شود $f(x)$ از هر عدد دلخواه کوچکتر می‌شود. در اینجا بهتر است نظیر چندین ε مقادیر k را به‌دست آورند. $(\varepsilon > ۰)$:

مقادیر ε دلخواه (معلوم)	۱	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰۰}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰}$	ε
مقادیر k به‌دست‌آمده (مجهول)	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\frac{۱}{\varepsilon}$

ε نمایشگر نزدیکی $f(x)$ به صفر و k به‌دست‌آمده مبین نزدیکی x به ∞ است.

در مورد مثال دوم نیز مشابهاً عمل می‌شود. از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا نتیجه‌ها را بیان کنند.

«مقادیر $\frac{۱}{x}$ به‌طور دلخواه (هر چقدر بخواهیم) به صفر نزدیک می‌شوند مشروط بر آنکه x به‌قدر کافی بزرگ اختیار شود.»

«مقادیر $2x+1$ به‌طور دلخواه به عدد ۳ نزدیک می‌شوند مشروط بر آنکه x به‌قدر کافی به ۱ نزدیک شود.»

این ویژگی‌های مشترک را این‌طور بیان می‌کنیم که حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ وقتی x به ∞ میل کند برابر ۰

یا حد تابع $f(x)=2x+1$ وقتی x به ۱ میل کند برابر ۳ است. به زبان نمادی می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3 \text{ و } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

ریاضیدانان عادت دارند که عبارت $\lim_{x\to a} f(x)=b$ را به زبان نمادی چنین تعریف کنند.

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$$

که ترجمه آن می‌شود:

«بـه‌ازای هر عدد مثبـت ε عدد مثبتی مانند δ وجـود دارد به‌طوریکه به‌ازای هر x اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\varepsilon$»

که دقیقاً همان معنایی است که قبلاً به زبان ساده‌تر بیان گردیده است.

۲-۷ مسائل پروژه‌ای فصل ۲ (برای دانشجو- معلمان و دبیران)

۱. طرح‌هایی برای ارائه درس مشتق به روش‌های فعال و استدلالی تهیه کنید.

۲. طرح‌هایی برای ارائه درس انتگرال به روش‌های فعال و قاعده‌گویی تهیه کنید.

۳. طرح‌هایی برای تدریس لگاریتم به روش‌های فعال و قاعده‌گویی تهیه و تدوین کنید.

۴. طرح‌هایی برای تدریس مفهوم تکنیک حد به روش فعال تهیه و تدوین کنید.

۲-۸ دیالوگ:

۱. یک موضوع درسـی از ریاضیات دبیرسـتانی را با مشـورت مدرس خود انتخاب کنید. سپس طرحی درسی برای آموزش و یادگیری این موضوع به روش فعال طراحی کنید. برای نمونه و به‌عنوان الگویی عملی در اینجا مثالی از تدریس موضوع «تشابه» را برای شما طراحی کرده‌ایم.

موضوع درس: تشابه

مقطع تحصیلی: دبیرستان و یا سال آخر راهنمایی

پیش‌نیاز: شناخت اشکال هندسی مانند مثلث و درک نسبت‌های اعداد

روش: روش فعال (سقراطی)

ابزارهای آموزشی: نقشه‌هایی از کشور جمهوری اسلامی با مقیاس‌های مختلف، عکس‌هایی یکسان با اندازه‌های مختلف.

دبیر: به دیوار کلاس اشاره می‌کند. روی دیوار دو نقشه سیاسی از ایران وجود دارد. از بچه‌ها می‌خواهد که تفاوت این دو نقشه و تشابهات آنها را بررسی کرده و گزارش دهند. به بچه‌ها یادآوری می‌کند که مشخصاتی از نقشه‌ها در ذیل آنها درج شده است.

بچه‌ها به‌طرف نقشه‌ها هجوم می‌برند. به شهرها و استان‌ها، مرزبندی‌ها و فاصله‌ها توجه می‌کنند. به تبادل اطلاعات با یکدیگر مشغول می‌شوند: فاصله شهرها در نقشه‌ها به یک اندازه نیست. اما تناسب فاصله‌ها رعایت شده است و اظهاراتی از این‌گونه را با یکدیگر در میان می‌گذارند.

یکی از بچه‌ها: این اعداد یعنی چه؟ $\frac{۱}{۱۰۰,۰۰۰}$ و روی این یکی نقشه $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰}$؟

«عدد نقشه بزرگتر، بزرگتر از عدد نقشه کوچکتر است»!

نسبت این دو عدد چه معنایی می‌تواند داشته باشد؟

$$\frac{۱}{۱۰۰,۰۰۰} : \frac{۱}{۱۰۰۰,۰۰۰} = ۱۰$$

پرسش از دبیر: نسبت دو مقیاس برابر ۱۰ می‌باشد. این عدد چه معنایی دارد؟

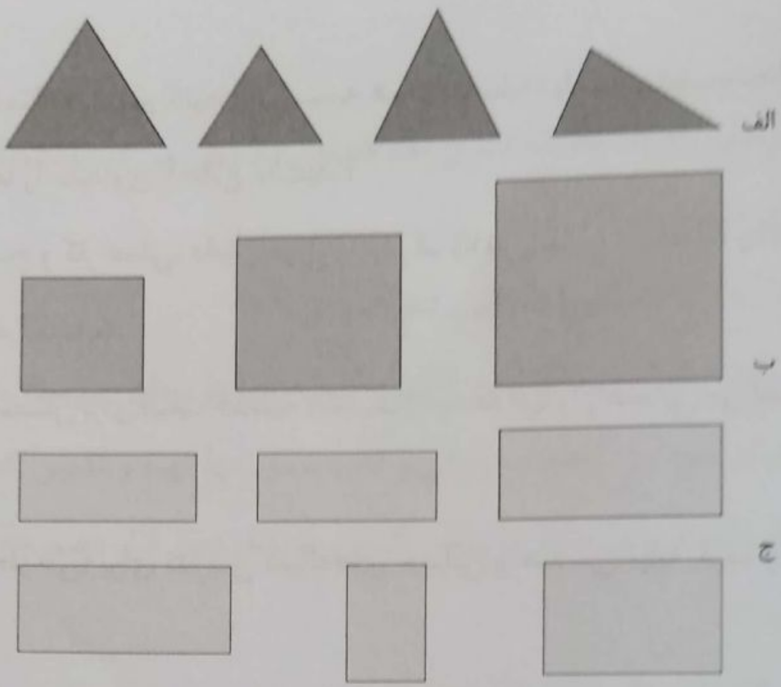
دبیر: فاصله دو شهر را در دو نقشه با خط‌کش اندازه بگیرید و با هم مقایسه کنید. چه عددی به‌دست می‌آورید؟

بچه‌ها: عدد ۱۰ را یعنی فاصله دو شهر در نقشه بزرگتر ۱۰ برابر فاصله آن دو شهر در نقشه کوچکتر است.

دبیر: آیا این نتیجه برای همه فاصله‌های شهرها، به‌دست می‌آید؟

و این پرسش و پاسخ می‌تواند ادامه داشته باشد. چنین پرسش و پاسخی می‌تواند حتی در خارج از کلاس رسمی درس هندسه اتفاق افتد.

دبیر: اکنون بچه‌ها به این اشکال توجه کنید.



بچه‌ها: زاویه‌ها را مقایسه کنیم یا طول اضلاع را؟

دبیر: ابتدا از چشم و ذهن خود کمک بگیرید و بگویید کدام‌ها شبیه هم هستند؟

بعد وارد، اندازه‌گیری‌ها، نسبت طول‌ها و.... شوید. آیا می‌توانیم بگوییم که یک مثلث شبیه یک مستطیل است؟

بچه‌ها: ما مثلث‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. مربع‌ها را با هم، و مستطیل‌ها را با هم.

دبیر: آری، این یک آغاز کار اصولی است.

بچه‌ها: به‌نظر می‌رسد همه مربع‌ها شبیه هم هستند.

دبیر: مثلث‌ها چطور؟

بچه‌ها: خیر

کدام مثلث‌ها شبیه هم هستند؟

در ردیف (الف) دو مثلث سمت چپ «مثل هم هستند.»

درست است.

دبیر: نسبت اضلاع آنها را به‌دست آورید.

بچه‌ها: $\frac{۵}{۴}$ یا ۱/۲۵

دبیر: آیا زاویه‌هایشان برابرند.

بچه‌ها: آری

دبیر: اکنون خودتان ۵ مثلث رسم کنید که شبیه هم (متشابه) باشند و نسبت‌ها را هم استخراج کنید.

[راهنمایی: همه مثلث‌ها را متساوی‌الاضلاع نکشید.]

و با این پرسش و پاسخ و کار عملی، دانش‌آموزان به درک واقعی نسبت تشابه و اینکه چه موقع دو مثلث متشابه‌اند نایل می‌شوند. (کشف)

در سال‌های بالای دبیرستان برای اثبات حدسیه (کشف) بچه‌ها، آنها را راهنمایی می‌کنیم و ادامه کار را خودتان تکمیل کنید.

۲. پروژه- سناریویی (طرحی) برای تدریس دنباله‌های حسابی و هندسی تهیه کرده و با دیگر دانش‌آموزان و دبیر خود مطرح کنید.

جزئیات طرح باید شامل موارد ذیل باشد.

مسائل انگیزه‌بخش از زندگی صنعتی، طبیعی و دنیای ریاضیات مطرح شده باشد.

پیش‌نیازهای آن رعایت شده باشد. کارهای عملیاتی آن‌را می‌توان قبل از شروع رسمی درس، به بچه‌ها ارائه کرد. نتایج (خواص تصاعدهای عددی و هندسی) باید به روش فعال توسط بچه‌ها و با راهنمایی دبیر به‌دست آید.

منابع تاریخی: از ذکر تاریخی حوادثی که در ارتباط با تصاعدهاست، به نحو احسن، به‌عنوان پیش‌درآمد طرح، و یا در متن طرح و یا در انتهای آن می‌توان استفاده کرد.

مانند آنچه گوس[1] ریاضیدان مشهور آلمانی در سن ۱۰ سالگی و در مدت زمانی بسیار کوتاه (۱ دقیقه) توانست مجموع ۱۰۰ عدد اولیه اعداد طبیعی را به‌دست آورد.

$$۱+۲+۳+۴+\cdots+۹۹+۱۰۰=۵۰\times۱۰۱=۵۰۵۰$$

آیا او از $a_i+a_{n-i}=a_j+a_{n-j}$ (حاصل‌جمع جملات متساوی‌البعد از طرفین برابر است) استفاده کرده است؟

۳. طرح درسی به روش فعال برای آموزش و یادگیری مفاهیم آماری (آمار و مدلسازی ریاضی) در دبیرستان تهیه کنید.

---

۱. Gauss

هدف: آموزش و یادگیری (عملی) مفاهیم، میانگین، میانه، انحراف، نمودارهای ستونی و دایره‌ای،.......

موارد انگیزه‌ای

۱. تعداد خودروهایی که در یک ساعت از یک خیابان مشخص می‌گذرند. تعداد انواع خودروهایی که در یک ساعت از خیابان می‌گذرند.

۲. توزیع نمرات درسی امتحانی، میانگین نمرات و.....

۳. طرح درسی برای آموزش مجانب توابع (افقی، قائم و مایل) در سطح دبیرستان تهیه کرده و اجرا کنید.

۴. طرح درس برای آموزش مقاطع مخروطی و دسته‌بندی آنها تهیه و تدوین کنید. (وقتی یک آباژور با کلاهک استوانه‌ای یا مخروطی شکل را روشن کرده و در کنار دیوار قرار دهیم چه تصویری لبه کلاهک بر دیوار نقش می‌زند؟)

۵. تدریس دستگاه‌های m معادله n مجهولی خطی و کاربرد آن در طراحی ترافیکی (ر.ک [ ])

۶. محاسبه انتگرال‌های غیرقابل محاسبه به روش‌های تقریبی.

۷. تعبیر هندسی ریشه‌های مضاعف مشتق دوم توابع.

۲-۹ یادگیری الکترونیکی[۱]

تحولات سریع و چشمگیر عصر حاضر منجربه پیشرفت‌هایی در کلیه جوانب زندگی بشر گردیده است که این پیشرفت‌ها نه تنها موجب ناپایداری تجارب شده بلکه دانش بشری در برابر این تغییرات سریع قرار گرفته است. این تحولات و پیشرفت‌ها نتیجه پیشرفت‌های حاصله در تولید ابزار و امکاناتی است که قدرت انتقال، نگهداری، بازنگری حجم وسیعی از دانش و اطلاعات را میسر ساخته است. این تحولات و پیشرفت‌ها به‌نوبه خود نیاز به آموزش‌های جدید و دائمی را موجب گردیده است تا بتواند به نیازهای پیچیده انسان امروزی پاسخ گوید. امروزه غالب کشورها به‌منظور حضور پایدار در رقابت اقتصادی و علمی و موفقیت در این امر به کاربرد دانش‌های جدید در امر آموزش و یادگیری برنامه‌ریزی‌های وسیعی را تدارک کرده‌اند. یکی از مهمترین هدف‌های توسعه‌های کشورها تحت پوشش قرار دادن بخش زیادتری از جمعیت خود در آموزش‌های پیش‌دانشگاهی و حتی دانشگاهی است. امکانات به‌وجودآمده توسط فناوری‌های جدید علاقه به کسب دانش با روش‌های متنوع را بیشتر کرده است؛ به‌گونه‌ای که آموزش و یادگیری مبتنی‌بر فناوری در مدارس کشورهای پیشرفته

۱. E-learning electronic- learning

قابل دستیابی است. چنین آموزش‌هایی را **یادگیری الکترونیکی** می‌نامند، زیرا در چنین فرآیندهایی فرد یادگیرنده، با کسب توانایی استفاده از دانش ذخیره‌شده و یا استفاده از شبکه آموزش‌های غیرحضوری، به یادگیری می‌پردازد. تفاوت‌های یادگیری‌های الکترونیکی، که به دسته وسیعی از روش‌های یادگیری- یاددهی اطلاق می‌شوند، با یادگیری‌های سنتی را می‌توان به‌طور خلاصه چنین بیان کرد.

- در بیشتر موارد یادگیری الکترونیکی، محتوای مورد یادگیری توسط یادگیرنده انتخاب می‌گردد.
- سطح دانش مورد تقاضای یادگیرنده انعطاف‌پذیر بوده و آنگونه که با دانش قبلی یادگیرنده قابل تطابق باشد، قابل تغییر است.
- یادگیری توأم با تعامل بوده به‌گونه‌ای که یادگیرنده می‌تواند به خودارزیابی بپردازد.
- دسترسی به منابع یادگیری بسیار کم‌هزینه‌تر از منابع سنتی (مدرسه، دانشگاه، معلم یا دبیر خصوصی....) است.
- هنر جستجوگری و کاوش جزء لاینفک این‌گونه یادگیری‌ها است و لذا یادگیری فعال است.
- نقش یادگیرنده در کسب اطلاعات و دانش نقشی پایه‌ای و محوری است.
- محیط یادگیری منحصر به مدرسه و دانشگاه نیست، بلکه هر کجا که به شبکه‌های آموزشی و سایت‌های اطلاعاتی دسترسی باشد یادگیری می‌تواند اتفاق بیفتد؛ خواه چنین محلی، منزل، ایستگاه قطار، اداره و یا هر جای دیگری بوده باشد.
- زمان یادگیری را یادگیرنده انتخاب می‌کند. فلذا یادگیری منحصر به زمان و مکان خاصی نبوده، به‌طوری‌که حداکثر استفاده از امکانات و منابع یادگیری انجام می‌گیرد.
- یادگیری مادام‌العمر می‌باشد، تغییرات سریع جامعه‌ها و مدیریت دانش به‌گونه‌ای است که کسب دانش و مهارت‌های جدید برای افراد از الزامات اساسی است، در حالی‌که در آموزش‌های رسمی- سنتی یادگیری مقطعی و موقتی می‌باشد.

۲-۹-۱ وسایل و امکانات

ابزار و امکانات الکترونیکی بسیار متنوع بوده و شامل CD های آموزشی تعاملی[1]، دیسکت‌ها، فایل‌ها، اسلایدها، نرم‌افزارهای درسی تخصصی و نظایر اینها است. استفاده از امکانات و ابزار الکترونیکی به‌صورتی سازمان‌یافته منجر به تأسیس شبکه‌های یادگیری تعاملی به‌صورت‌های وب‌سایت‌ها و on-line گردیده که همانند مدارس سنتی معمولی استفاده از آنها مستلزم ثبت‌نام تحصیلی و پرداخت شهریه می‌باشد. پیش‌بینی می‌شود که با

۱. Interactive CD's

ادامه این روندها و روش‌ها، توسعه آموزش‌های الکترونیکی به حدی پیشرفت کند که دیگر نیازی به دانشگاه‌ها و مدارس فعلی در آینده کمتر احساس گردد.

یادگیرنده برای ورود به موضوع مورد دلخواه خود کافی است واژه‌های کلیدی بحث را بشناسد و از روش‌های استفاده از جستجوگری و جستجوگری پیشرفته بتواند استفاده کند.

اکنون مهمترین واژه‌های کلیدی یادگیری الکترونیکی و مؤسسات وابسته را جهت استفاده ذکر می‌کنیم	
یادگیری دور	distance learning (DE)
مؤسسه یادگیری دور	distance learning institution
یادگیری باز	open learning (OE)
مؤسسه یادگیری باز	open learning institution
ابزار، رسانه	means
یادگیری چندرسانه‌ای	multi- means learning
یادگیری چندرسانه‌ای	multi- media learning
دانشگاه چندرسانه‌ای	multi- meida university
-	search
-	advanced serach
-	software
منابع آموزشی باز	open educational resources (OER)
نرم‌افزار	soft-ware
درس‌افزار منابعی علمی است که دسترسی به آن برای همه آحاد جامعه میسر می‌باشد.	course-ware
جامعه یادگیری، جامعه یادگیرنده جامعه‌ای است که همه آحاد آن، در هر شغل و مقام و در هر سنی، در حال یادگیری هستند.	learning society
جامعه دانش پایه‌ای (جامعه دانش پایه)	knowledge-based society
یادگیری معنوی (مجازی)	virtual learning
یادگیری تلفیقی	blended learning

۲- ۱۰ یادگیری تلفیقی

واژه blend به‌معنی مخلوط کردن و تلفیق کردن می‌باشد. مراد از یادگیری تلفیقی به روشی از یادگیری اشاره دارد که در آن ترکیب یا تلفیقی از وسایل و ابزار آموزشی، من‌جمله آموزش چهره به چهره معلم- دانش‌آموز برای یادگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. تنوع این ترکیب و انتخاب مؤلفه‌های آن تابعی از وضعیت و محیط یادگیری است. بنابراین همه روش‌های سنتی آموزش شامل حضور مدرس با گچ و تخته تا وسایل و ابزار الکترونیکی فوق و الکترونیکی و یا دسترسی به شبکه اینترنتی در این رده از یادگیری‌ها قرار می‌گیرند. معلم، دبیر و یا مدرس درس متناسب با امکانات و ابزار مدرسه و سطح توانایی دانش‌آموزان به طراحی درس پرداخته به‌گونه‌ای که از همه توان بالقوه و موجود دانش‌آموزان و مدرسه استفاده بهینه را تأمین نماید.

برای مثال، ممکن است بخشی از درس را به‌صورت چهره به چهره تدریس کند، و در ادامه از دانش‌آموزان بخواهد که با استفاده از کارگاه ریاضی و یا آزمایشگاه ریاضی مدرسه و نرم‌افزارهای موجود به ادامه یادگیری به‌صورتی فعال و با ابزار الکترونیکی بپردازند؛ یا آنکه به برخی از دانش‌آموزان که در منزل دسترسی به اینترنت دارند مطالب و مسأله‌هایی ارائه دهد تا به‌عنوان کار پژوهشی و مطالعاتی بدان مسأله‌ها پرداخته و به دبیر خود گزارش دهند.

بدین‌روش تدریس تلفیقی، در درون خود، قابل تکوین و تحویل می‌باشد، بدین‌معنی که متناسب با تجهیز بیشتر دانش‌آموزان و امکانات مدرسه می‌تواند تغییر یافته به‌گونه‌ای که از امکانات روزآمد مدرسه استفاده بیشتری به‌عمل آید.

برخی از متخصصین یادگیری‌های الکترونیکی بر این باورند که نقش معلم، دبیر و مدرس به‌صورتی حضوری و چهره به چهره هیچ‌گاه خاتمه نمی‌یابد، بلکه به‌مرور می‌تواند کاهش یابد، لکن در هر شرایطی دیدار دانش‌آموزان و دانشجویان با مدارس خود جنبه‌های اخلاقی، اجتماعی و فرهنگی خاص خود را دربرداشته و همواره توصیه می‌گردد.

مسأله پروژه‌ای

در خصـــوص اســـتفاده از رایانه‌ها در کلاس درس و چگونگی آن بحث‌هـــای مفصلی در بین برنامه‌ریزان درس معمولاً انجام می‌گیرد. ذیلاً نظر یکی از این افراد را نقل می‌کنیم.

۱. آرنولدراس (Arnold Ross) در این خصوص گفته است:

کنجکاوی یک خصوصیت شـــایع بشری است که معمولاً با روحیه شـــادی همراه است. این خصوصیت، انتقال از مرحله «دیدن» به «ادراک کردن» را در انســـان تقویت می‌کند. در مرحله رشـــد جوانان، باید انگیزه آنها را در کاویدن مســـائل تقویت کنیم. باید به رشـــد و تعالی استعداد آنها در مشـــاهده، انجام آزمایش و طرح‌ریزی ماجراجویانه تجربیاتشـــان بپردازیم. همچنین باید به تربیت استعداد افراد در ایجاد ارتباط با دیگران بپردازیم. باید توجه کنیم که نخســـت تجربه و پس از آن زبان مناســـب علمی برای بیان آن پدیده مطرح می‌شـــود و نه برعکس. از این‌رو باید در مراحل نخست رشد جوانان، تجربیاتی عملی و مستقیم را در اختیار آنها قرار دهیم. مشخص کنید که این گفته راس باید کدامیک از روش‌های تدریس و به چه دلیلی تطابق دارد.

فصل دوم

۲. همچنیـــن رأس ادعـــا می‌کند که کامپیوترها تنها می‌توانند زمانی مؤثـــر و طبیعی وارد یادگیری و آموزش شوند که شاگردان الگوریتم‌های مهم را فراگرفته و بر آنها مسلط باشند. در مراحل ابتدایی، شاگردان باید برای هر الگوریتم به رایانه برنامه بدهند. در این‌صورت می‌توان جایگاه رایانه را به‌عنوان وسیله‌ای برای استخراج اطلاعات بیشتر از هر کشف مرحله‌به‌مرحله دریافت.

در محیط کامپیوتر - مداری امروزی، فراگیری طرز استفاده صحیح و آگاهانه از آن در مراحل اولیه، امری بسیار مطلوب به‌شـــمار می‌رود. به‌ویژه که این امر، اســـاس تسلط بر کاربردهای بسیار دقیق‌تر از رایانه‌ها را در عرصه علم و تکنولوژی فراهم می‌سازد.

اکنـــون به‌نظر شـــما ادعای رأس تا چـــه اندازه با واقعیت‌های امروزی کار با رایانه‌هـــا در مدارس تطابق دارد. با هم‌شاگردی‌های خود بحث کرده و نظرات خودتان را با مدرس درس مطرح کنید.

فصل سوم

آموزش و یادگیری
حل مسأله

هدف فصل سه

دانشجویان پس از مطالعه این فصل باید بتوانند

- راهیابی‌های مهم حل مسأله را بشناسند.
- مفاهیم آنالیز و سنتز را در رابطه با حل مسأله معنی کنند.
- مثال‌هایی از مسأله‌ها و قضیه‌هایی که در حل و یا برهان آنها روش‌ها و راهیابی‌های آنالیز و سنتز اعمال می‌گردد ارائه دهند. به‌ویژه مثال‌هایی از قضیه‌ها و مسأله‌های آنالیز ریاضی را ارائه کرده و حل آنها را در رابطه با آنالیز و سنتز (تجزیه و ترکیب) تشریح نمایند.
- نقش راهیابی «به مجهول نگاه کنید» را در دستیابی به راهیابی حل مسأله بشناسند.
- سخن بولتسانو را در خصوص حل مسأله ریاضی به‌خاطر بیاورند.
- لوپ حل مسأله را تعریف کنند.

۳-۱ راهیابی چیست؟

«راهیابی» یا «راهبرد» در مقابل واژه لاتین «strategy» اطلاق می‌شود. کلمه استراتژی، که ظاهراً ریشه در فرهنگ سیاسی و نظامی دارد، به مجموعه‌ای از اعمال متوالی گفته می‌شود که طی اجرای آن به هدف از پیش تعیین‌شده‌ای نایل می‌شویم. استاد فقید احمد آرام[1]، از واژه «راهیابی» در این خصوص استفاده کرده است. حل یک مسأله ریاضی، عموماً دفعتاً حاصل نمی‌شود، بلکه حل یک مسأله، مستلزم اجرای ابتکارات و اعمال متفاوتی است که با ترکیب آن در قالب یک نظم منطقی، برای مسأله یک راه‌حل یا یک استدلال قابل قبول به‌دست می‌آید. استدلالی که همه کسانی که با نظم منطقی ریاضی آشنایی دارند بر ایشان قابل قبول و قانع‌کننده است. ما هم در این فصل به‌دنبال توضیح و فصل‌بندی اقداماتی هستیم که معمولاً ریاضیدانان و ریاضی‌کاران در حل مسأله‌های ریاضی و اثبات قضیه‌ها به‌کار می‌برند. واژه‌های «مسأله» و «قضیه» در تئوری‌های ریاضی تفاوت ماهیتی ندارند، بلکه قضیه‌ها مسأله‌های اصلی‌تری هستند که در حل سایر مسائل بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در هر تئوری ریاضی[2]

---

۱. استاد فقید احمد آرام، مترجم و نویسنده، مشهور معاصر، کتاب ریاضیدان و روش‌شناس آمریکایی جرج‌پولیا (George Polya) تحت عنوان «چگونه مسأله حل کنیم» را ترجمه و در اختیار جامعه ریاضی ایران قرار داد. این کتاب که توسط انتشارات کیهان منتشر شده است، چندین بار تجدید چاپ گردیده است.

۲. تئوری Theory با نظریه در ریاضیات تفاوت دارد. استاد فقید دکتر غلامحسین مصاحب برای این واژه مترادفی در فارسی قرار نداده است. تئوری ریاضی تعریفی دقیق دارد که در تاریخ ریاضی مورد بحث قرار می‌گیرد. (ر.ک [۳-۲-۱ ص ۱۰۷])

به‌جز اصول موضوعه آن که قضیه‌های بدون اثبات و پذیرفته‌شده آن تئوری به‌شمار می‌روند، هر مسأله ریاضی موقعی یک «حقیقت ریاضی» تلقی می‌گردد که برای آن یک اثبات منطقی بتوان ارائه کرد. از این لحاظ، «ریاضیات» تنها علمی است که برای هر ادعای آن اثبات و استدلال قابل قبول و منطقی وجود دارند.

۳-۲ انواع اثبات‌های ریاضی

ممکن است این سؤال برای برخی از دانش‌آموزان پیش آید که «چرا باید اثبات قضیه‌ها را بیاموزیم» و یا این سؤال برای معلمین مطرح شود که «چرا باید اثبات قضیه‌ها را به دیگران تعلیم دهیم؟» در این رابطه می‌توانیم سه حالت را تفکیک کنیم:

۱. **اصولاً و به هیچ‌وجه به اثبات نپردازیم.**

۲. **برای هر چیز و هر حکمی اثبات و دلیل بیاوریم.**

۳. **تنها برای بعضی چیزها به اثبات بپردازیم.**

قطعاً حالت اول ما را به جایی نمی‌رساند. ریاضیات بدون اثبات، ریاضیات نیست، به‌عبارت دیگر اگر برای ادعایی که اقامه می‌شود اثباتی منطقی داریم می‌توانیم بگوییم که آن حکم یک بخش یا قطعه‌ای از ریاضیات است، و اگر برای آن ادعا اثبات و استدلالی نداریم، آن ادعا فقط یک حدس می‌تواند باشد که ممکن است درست و یا نادرست باشد.

با اندکی تأمل در مورد دو حالت دیگر، به وجود اثبات رهنمون می‌شویم. اثبات‌های کامل و اثبات‌های غیرکامل.

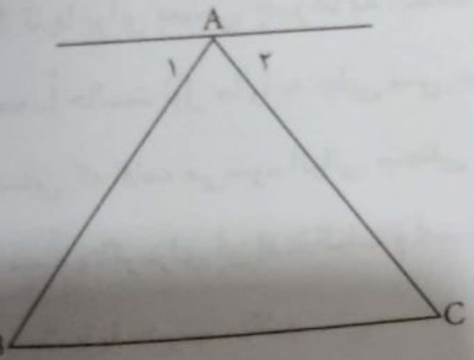
۳-۲-۱ اثبات‌های کامل

برای یک منطق‌دان ریاضی و یا یک ریاضیدان حرف‌های تنها اثبات‌ها و استدلال‌های کامل می‌توانند وجود داشته باشند: آنچه را که به‌عنوان یک دلیل و یا اثبات اقامه می‌کنیم باید عاری از هر شکاف و افتادگی و عدم قطعیت بوده باشد و اگر جز این باشد، دلیل نخواهد بود. آیا برای چنین دلیل‌های کاملی یک استاندارد و محک عالی وجود دارد که از آنها بتوان در زندگی روزانه یا در محاکم قضایی و یا در علوم فیزیکی استفاده کرد؟ به‌ندرت امکان پیدا شدن چنین دلیل‌هایی فراهم می‌آید. بنابراین تصور درکی از چنین استدلال‌های کاملی مشکل می‌نماید. به گواه تاریخ علم ریاضی، واضع و مبتکر چنین اندیشه‌ای کسی جز اقلیدس نمی‌باشد.

اقلیدس در کتاب معروفش تحت عنوان «مبانی ریاضیات»[1] از راه آموزش هندسه مسطحه اندیشه و اثبات کامل را نیز عرضه می‌دارد. امروزه سایر تئوری‌های ریاضی، همانند تئوری گروه‌های جبری، تئوری اعداد حقیقی، تئوری اندازه، و نظایر اینها نیز به‌صورتی مانند روش اقلیدس ارائه می‌شوند. در کتاب فوق‌الاشاره عرضه‌هایی از ارائه یک فکر و استدلال درست و محکم ریاضی ملاحظه می‌شود. به‌عنوان یک مثال از اثباتی کامل اثبات این قضیه را مرور می‌کنیم:

قضیه: در هر مثلث مجموع سه زاویه آن برابر با دو قائمه است و این قضیه‌ای است که با مطالعه آن در دبیرستان یکی از محفوظات ذهنی اغلب ما را تشکیل می‌دهد. برای ارائه دلیل آن که چندان محتاج توضیح نمی‌باشد. از رأس A (شکل ۱) خطی به موازات قاعده BC رسم شده است، زاویه‌های B و C از مثلث هر یک با یکی از زاویه‌های تشکیل‌شده در A با شماره‌های ۱ و ۲ برابر می‌باشند. بدان جهت که زاویه‌های متبادله با یکدیگر مساویند.

فصل سوم



بدین‌ترتیب نتیجه می‌گیریم که مجموع سه زاویه مثلث برابر با مجموع سه زاویه تشکیل‌شده در رأس A است که با هم یک راست زاویه یعنی یک زاویه نیم‌صفحه می‌سازند. چون هر زاویه نیم صفحه دو قائمه است، بنابراین قضیه مورد نظر اثبات شده است.

اگر دانش‌آموزی بدون آنکه واقعاً چنین استدلالی را فهمیده باشد در کلاس درس شرکت کند، حق دارد مدرسه و معلمان خود را سخت ملامت کند. باید میان چیزهای با اهمیت کم و چیزهای با اهمیت بیشتر، تفاوت قائل شویم. اگر دانش‌آموزی با فلان واقعیت هندسی خاص نتوانسته است آشنا شود، زیان فراوانی نکرده است. مثلاً خیلی از ما ممکن است این قضیه را که در یک چهارضلعی محاطی حاصل‌ضرب اقطار آن برابر مجموع حاصل‌ضرب‌های اضلاع مقابل است به یاد نیاوریم (قضیه بطلمیوس) و یا آنکه اثبات آن را نتوانیم به‌خاطر بیاوریم، گرچه این یک واقعیت هندسی است، لکن چندان در زندگی روزمره دانش‌آموزان مورد استفاده نمی‌باشد. ولی اگر کسی از اثبات‌ها و برهان‌های ریاضی به کلی بی‌خبر مانده باشد، بهترین

1. Elements

و ساده‌ترین مثال‌های استدلال و برهان را از دست داده و از درک و دریافت اندیشه و روح استدلال کردن صحیح بی‌بهره مانده است. طبیعی است بدون کسب چنین اندیشه و مهارتی، ملاک و محکی که بتواند با آن دلایل ادعایی گوناگون را که در زندگی نوین بر او عرضه می‌شود، را با هم مقایسه کند و درست را از نادرست تشخیص داده و بازشناسد، در اختیار نخواهد داشت. به‌طور خلاصه باید بگوییم که:

اگر تعلیم و تربیت عمومی بخواهد اندیشه‌های دلیل شهودی و استدلال منطقی را به دانش‌آموزان عرضه دارد، بایستی در آن جای خاصی برای آموزش و یادگیری اثبات‌های ریاضی درنظر گرفته شود.

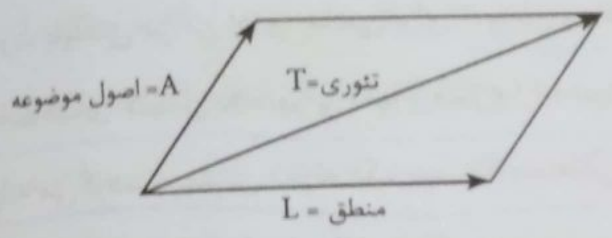
اثبات‌های کامل به صورتی تنها و منتزع ارائه نمی‌شوند. اثبات‌های کامل در قالب یک «دستگاه منطقی» ارائه می‌گردند، بهترین نمونه یک دستگاه منطقی همان کتاب مبانی اقلیدس است. اقلیدس در این کتاب فقط به ارائه مجموعه‌ای از واقعیت‌های هندسی نپرداخته است، بلکه وی یک دستگاه و منظومه‌ای منطقی از قضیه‌های هندسی ارائه کرده است که امروزه از آن به‌عنوان یک تئوری ریاضی یاد می‌کنند. تئوری ریاضی مجموعه و دستگاهی از گزاره‌ها و احکام ریاضی است که با هم سازگاری داشته و هر یک با استفاده از احکام قبلی و به صورتی منطقی قابل تبیین و نتیجه‌گیری هستند. در واقع احکام و قضیه‌ها با نظمی خاص در کنار هم واقع شده‌اند. هر قضیه چنان قرار گرفته است که بتواند بر شالوده اصول، تعریفات و قضیه‌های قبلی به اثبات برسد. از این روی، می‌توانیم به‌ترتیب قرار گرفتن قضیه‌ها به‌عنوان مهمترین دستاورد اقلیدس و به منظومه منطقی آنها همچون مهمترین هنر و شایستگی کتاب «مبانی» نگاه کنیم.

هندسه اقلیدس تنها یک تئوری منطقی نیست، بلکه نخستین و بزرگترین نمونه از چنین منظومه‌ای است که علوم ریاضی به تاسی از آن بسط و توسعه یافته‌اند. حتی علومی دیگر نیز برای تقلید از آن تلاش کرده‌اند و هنوز هم تلاش می‌کنند. آیا لازم است که علوم دیگر به‌ویژه آنهایی که مانند روان‌شناسی یا علوم قضایی که از هندسه تفاوت بسیار دارند از روش اصل موضوعی اقلیدس تقلید کنند؟ این پرسشی است که بسیار درباره آن بحث و اختلاف‌نظر پیش آمده است، ولی کسی که با تئوری اقلیدسی، که همان هندسه معمولی است، آشنایی نداشته باشد، نمی‌تواند در این بحث و تبادل‌نظر شرکت کند. به‌هر حال، این‌گونه بحث‌ها از حیطه این کتاب مختصر خارج است.

تئوری هندسه اقلیدسی با ملات استدلال و برهان یک‌پارچگی پیدا کرده است: استدلال و برهانی که براساس منطق ارسطو می‌باشد. بدین‌نحو، هر قضیه با یک برهان براساس اصول موضوعه و قضیه‌های پیش از آن تحکیم می‌یابد. بدون فهمیدن چنین برهان‌ها و استدلال‌ها نمی‌توانیم از جوهر این تئوری[1] و تفکر ریاضی آگاهی پیدا کنیم.

[1] استاد فقید مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب، که باید او را به حق پدر ریاضیات نوین ایران دانست، کلمه Theory را معادل‌سازی نکرده است. می‌دانیم استاد

۱. در واقـع هر تئوری ریاضـی نتیجه مجموعه‌ای از اصول موضوعه با همراهی یک منطق اسـت. منطقی که استدلال و نتیجه‌گیری‌ها را ممکن می‌سازد. منطق همه تئوری‌های ریاضی تا اوایل قرن بیستم منطق ارسطو است؛ با جایگزینی منطق ارسطو با هر یک از منطق‌های چند ارزشی دیگر تئوری‌های دیگر ساخته و پرداخته می‌شود. همچنین با جایگزینی و یا حذف و اضافه هر یک از اصول موضوعه تئوری می‌توان تئوری‌های دیگری بنا نهاد، این وضع را به اصل متوازی‌الاضلاع در ترکیب نیروها در فیزیک تشبیه می‌کنیم:



تئوری ریاضی برآیند مجموعه‌ای از اصول موضوعه (بند اشتهای تئوری) و یک منطق است. ریاضیدان در خلق یـک تئوری ریاضی، آزاد اسـت که برخی از اصول را تغییر دهد و یا از یـک منطق خاص به‌عنوان یک مؤلفه دیگر تئوری بهره جوید. داود هیلبرت[1]، ریاضیدان نامدار آلمانی جزء اولین کسـانی است که به نحوه تأسیس، شکل‌گیری و مبانی تئوری‌های ریاضی و مبانی ریاضیات پرداخت.

خلاصه آنکه اگر تعلیم و تربیت عمومی در صدد ارزانی داشتن اندیشه نظام منطقی به دانش‌آموزان است، باید در آن مقام خاصی برای استدلال هندسی درنظر گرفته شود.

۳-۲-۲ اثبات‌های توضیحی (غیر کامل)

ما بر این عقیده نیسـتیم که اندیشـه برهان شهودی و اسـتدلال دقیق براساس تئوری منطقی برای هر کس چیزهای زاید و غیرلازمی می‌باشـند. با این حال باید متذکر شـویم که در مواقعی به واسطه فقدان وقت کافی یا دلایل دیگر، مطالعه و تحقق به این روش‌ها به صورتی که برای هندسـه اقلیدسـی مطرح است، امری مطلق نمی‌باشـد. ولی حتی در این حالات نیز ممکن اسـت نوعی از استدلال مطلوب‌نظر باشد. نقشی که اثبات‌های غیر کامـل یا اثبات‌هـای توضیحی دارند، در این رابطه معنـی و مفهوم می‌یابد. نقش مهـم این‌گونه اثبات‌ها هوش‌افزایی دانش‌آموزان است. برای روشن‌تر شدن این نکته به مثال مجموع زاویه‌های مثلث برمی‌گردیم.

در زبان‌های انگلیسـی، عربی و ادبیات فارسـی متحیر و شایستگی فوق‌العاده‌ای داشته اسـت. دلیل این امر این است که تئوری ریاضی را به‌لحاظ مفهومی نمی‌توان با فرضیه یا نظریه یکی انگاشت.

برای تعریف تئوری ریاضی می‌توانید به کتاب «آشنایی با فلسفه ریاضی» تألیف همین مؤلف و به انتشارات دانشگاه پیام نور مراجعه کنید.

۱. David Helbert

از اثبات‌ها دلیل و مدرک به‌دست می‌آید. آنگاه نگاه‌دارنده و پیوندکننده اجزاء یک فکر منطقی به یکدیگرند. در مثال صفحه قبل با کمک شکل ثابت شد که مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر ۱۸۰ درجه است. شکل مورد نظر این واقعیت را با واقعیت دیگر یعنی برابر بودن زاویه‌های متبادله حاصل از تقاطع یک خط راست با دو خط موازی پیوند داده است. واقعیت‌های با هم مرتبط‌شده، جالب توجه‌ترند و بهتر از واقعیت‌های ناپیوسته به یکدیگر در خاطر می‌مانند.

بدین‌ترتیب، شکل ما دو قضیه هندسی به‌هم پیوسته را در ذهن ما جایگزین می‌سازد و بالاخره شکل و قضیه آن به‌صورت یکی از خصوصیت‌های ذهنی ما درمی‌آید.

اینک به بیان حالتی می‌پردازیم که در آن اکتساب اندیشه‌های کلی ضروری به‌نظر نمی‌رسد و تنها اندیشه مربوط به بعضی از واقعیت‌ها مطلوب است. حتی در چنین حالت‌هایی لازم است واقعیت‌ها به‌صورت پیوسته و مرتبط به‌هم و به‌نحوی نظام‌مند بیان شوند، چه آنکه اکتساب موضوعات مجزا بسی سخت است و این‌گونه شناخت‌ها در معرض فراموشی قرار می‌گیرند. هرگونه ارتباط که واقعیت‌ها را به‌آسانی و به‌صورت طبیعی و ماندگار به یکدیگر مرتبط سازد در اینجا مطلوب است.

مرادمان از این چیدمان آن نیست که بر پایه منطق دقیق استدلالی بنا نهیم، بلکه مرادمان از این ارتباط واقعیت‌های آن است که به‌صورت مؤثر به حافظه‌مان کمک کنیم، باید چیزی باشد که منظومه هوش‌افزایی نامیده شده است. با این حال، حتی از دیدگاه منظومه هوش‌افزایی محض، استدلال‌ها مخصوصاً استدلال‌های ساده ممکن است سودمند باشد. به‌طور خلاصه:

حتی در آن هنگام که به اندیشه‌های منطقی اهمیت خاصی پیوسته نیست، اثبات‌ها و استدلال‌های توضیحی می‌تواند به‌عنوان وسیله‌ای برای هوش‌افزایی سودمند واقع شود.

در تدریس برخی از موضوعات و دروس ریاضی مواردی وجود دارد که در آن لازم نیست همه برهان‌ها به‌صورت «گسترده» عرضه شوند. حالت مهمی از این وضعیت آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال به دانش‌آموزان کلاس پایان تحصیلات متوسطه و همچنین دانشجویان رشته‌های مهندسی است.

اگر بنا باشد که این درس ریاضی با استانداردهای منطقی دقیق آموزش داده شود، محتاج براهینی با درجه معین از دشواری و موشکافی هستیم که از آن به‌عنوان تکنیک‌های اپسیلونی یاد می‌شود. ولی مهندسان این شاخه از درس را برای کاربرد آن می‌خوانند و نه دقت کافی در اختیار دارند و نه متمایل به آن هستند که برای دریافت ریزه‌کاری‌ها به اثابت‌های دور و دراز بپردازند. دانش‌آموزان سوم متوسطه که برای اولین بار با مفهوم حد آشنا می‌شوند نیز همین مشکل را دارند.

بنابراین نگرانی شدیدی برای آن وجود دارد که همه این استدلال‌های مربوط به گزاره‌های منطقی اپسیلون کنار گزارده شود. ولی اگر چنین کنیم، این درس مهم ریاضی را تا سطح یک کتاب دستور آشپزی تقلیل داده‌ایم. هم‌چنان که می‌دانیم در یک کتاب آشپزی توصیف دقیق مواد لازم و روش‌های تهیه غذای مطلوب ذکر شده است، لکن برای نسخه‌های ارائه‌شده هیچ دلیلی در کتاب دیده نمی‌شود که مثلاً چرا از فلان ماده غذایی به مقدار مشخص‌شده باید استفاده کرد. اثبات غذا یا شیرینی تهیه‌شده‌ای مانند باقلوا، خوردن آن است: کسی که باقلوا را تناول می‌کند هیچ پرسشی در مورد ترکیب مواد آن نمی‌کند. یک کتاب آشپزی به‌صورتی کامل در خدمت هدفی است که برای آن نوشته شده است. چون دستورها نوشته شده و نیازی به ضبط در حافظه ندارد، به یک نظریه منطقی یا هوش‌افزایی احتیاجی نمی‌باشد.

ولی نویسنده یک کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، یا معلم یک دبیرستان در کلاس سوم نظری، اگر بخواهد از نزدیک از کتاب آشپزی پیروی کند، می‌تواند به هدفی که درنظر دارد برسد. اگر روش‌های عملی را بدون اثبات کردن آنها به دانش‌آموزان تعلیم دهد، روش‌های بی‌دلیل انگیزه‌ای برای فهمیده شدن پیدا نمی‌کند. در صورتی که قاعده را بدون آوردن برهان آن تعلیم دهد، قاعده‌های ناپیوسته به یکدیگر هر چه زودتر فراموش می‌شوند. ریاضیات را نمی‌توان بدان‌گونه چشید که باقلوا چشیده می‌شود؛ اگر از ذکر هرگونه دلیل صرف‌نظر کنیم، درس حساب دیفرانسیل به آسانی به‌صورت فهرست و سیاهه‌ای از اطلاعات سنگینی و هضم‌ناشدنی درمی‌آید.

بهترین راه برای پرهیز کردن از دو راه نامطلوب که یکی پرداختن به استدلال‌های دراز و سنگین و دیگری تنزل کردن به سطح دستورهای کتاب آشپزی است، استفاده معقول از براهین غیرکامل می‌باشد.

در اینجا اشاره به مفهوم حد به‌صورتی غیرکامل می‌کنیم. می‌دانیم مفهوم کامل حد، یعنی تعریف عبارتی که به‌صورت نمادی مانند:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad (*)$$

نوشته می‌شود، چنین است:

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

به دانش‌آموزی که با سورهای منطقی آشنایی کافی ندارد و ترکیبات گزاره‌ای منطقی را نمی‌داند توسل به تعریف کامل حد به شکل فوق مشکل‌ساز خواهد بود.

لکن در کتاب سوم دبیرستان برای تعریف تساوی (*) عبارتی به شکل زیر عرضه شده است:

« $f(x)$ را هر چقدر بخواهیم می‌توانیم به L نزدیک کنیم مشروط بر آنکه xها به‌قدر کافی به a نزدیک شوند.»

و برای تفهیم عبارت اخیر، مثلاً اگر از ما خواسته شود که پیدا کنیم برای چه x هایی در مجاورت a، $|f(x)-L|<\frac{1}{100}$، با حل این نامساوی اندازه نزدیکی x به a (یعنی δ) محاسبه می‌شود. می‌دانیم اثبات تساوی (*) برای $\varepsilon=\frac{1}{100}$, $\varepsilon=\frac{1}{100}$ و نظایر اینها کامل نمی‌گردد. تساوی (*) وقتی و فقط وقتی برقرار است که برای همه εها، یعنی همه اعداد مثبت δهای نظیر را محاسبه کرده باشیم. لکن با مقدار گرفتن دو یا سه عدد برای ε و به‌دست‌آوردن δهای مربوط، مفهوم حد به ذهن دانش‌آموزان القا می‌گردد. در واقع مفهوم حد را توضیح داده‌ایم، بدون آنکه به تکنیک $\varepsilon-\delta$ متوسل شویم.

برای تشخیص درستی یک حکم، یک منطق‌دان دقیق، یا یک دانشجوی آنالیز ریاضی، یک دلیل ناتمام اصلاً دلیل نیست، و قطعاً باید میان اثابت‌های غیرکامل با اثابت‌های کامل به‌دقت تمایز قایل شویم، اشتباه کردن یکی با دیگری جایز نیست، و یکی را به‌جای دیگری فروختن بدتر.

این امر دردناک است که نویسنده یک کتاب درسی یک دلیل غیرکافی را به‌صورتی مبهم، با تردید آشکار میان شرمساری و ادعای اینکه دلیل کاملی است، عرضه کند ولی دلایل غیرکامل ممکن است در صورتی‌که در جای مناسب و با شکل بیان مقتضی آمده باشند، سودمند واقع شوند. ملاحظه کردیم که توضیح مفهوم حد به‌لحاظ ساختار منطقی براساس تعریف دقیق حد انجام گرفت. هدف دلایل غیرکامل و همچنین تعریف‌های غیرکامل این نیست که جایگزین دلایل کامل شوند که هرگز چنین چیزی اصولاً امکان‌پذیر نمی‌باشد بلکه می‌خواهیم آنچه را که ارائه می‌کنیم، دل‌چسب و منسجم باشد. برای نمونه به ذکر دو مثال دیگر می‌پردازیم.

مثال ۱) یک معادله جبری از درجه n ام (در یک میدان توسعه‌یافته) درست n ریشه دارد. این قضیه که به‌نام قضیه اساسی جبری گاوس نامیده می‌شود می‌بایستی به دانشجویانی عرضه شود که آمادگی لازم برای فهمیدن اثبات آن‌را ندارند. در واقع این‌گونه دانشجویان پیش‌نیازهای لازم برای درک اثبات آن‌را نگذرانده‌اند. ولی این‌را می‌دانند که یک معادله درجه اول دارای یک ریشه است و همچنین می‌دانند که هر معادله درجه دوم دارای دو ریشه است. علاوه‌بر این، قضیه دشوار فوق دارای بخشی است که اثبات آن به‌آسانی میسر است و آن عبارت است از اینکه: «هیچ معادله از درجه n ام بیش از n ریشه متمایز ندارد.» آیا این واقعیت‌ها یک اثبات کامل برای قضیه اساسی فراهم می‌آورد؛ به هیچ‌وجه. ولی برای آن کفایت می‌کنند که اندکی توجه را به آن جلب کنند و آن‌را موجه جلوه‌گر سازند و در ذهن دانشجویان جایگزین سازند که این امر به‌نوبه خود یک هدف عمده است.

مثال ۲) حاصل‌جمع هر دو زاویه مسطحه تشکیل‌یافته از یال‌های یک زاویه سه‌وجهی بزرگتر از زاویه مسطحه سوم است. تشکیل و عکس تمثیل

آشکارا از این قضیه نتیجه می‌شود که در یک مثلث کروی مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است. با توجه به اینکه طبعاً به فکر شباهت موجود میان مثلث کروی و مثلث مسطح می‌افتیم، آیا با این نکات یک برهان به‌وجود می‌آید؟ به هیچ‌وجه. ولی به ما کمک می‌کند که قضیه فوق را بهتر بفهمیم و آن‌را به‌خاطر بسپاریم و از آن استفاده کنیم.

مثال ۱ به‌لحاظ تاریخی جالب توجه است. زمانی نزدیک به ۲۵۰۰ سال حتی ریاضیدانان به این قضیه اساسی بدون وجود اثباتی کامل برای آن معتقد بودند. در واقع، بدون داشتن حتی شالوده‌ای بیش از آنچه در بالا بدان اشاره گردید. مثال دوم ما حاکی از تمثیل و قیاس تمثیلی به‌عنوان منبع مهمی برای حدسیه‌سازی‌ها است. در فصل دوم گفته شد که در ریاضیات همانند سایر علوم طبیعی و فیزیکی، **اکتشاف و خلق ریاضیات نو، غالباً از راه مشاهده، شباهت و استقراء آغاز می‌شود.** این رویه‌ها که به‌صورتی مطلوب و جالب در ساختن یک برهان راهبردی به‌کار می‌رود، به‌ویژه مورد توجه فیزیکدانان و مهندسان واقع می‌شود.

نقش و فایده اثابت‌های غیرکامل تا حدی از راه مطالعه فرآیند حل مسأله‌ها عرضه می‌شود. بعضی از تجربه‌های حاصل از حل کردن مسائل، نشان می‌دهد که نخستین ریشه‌های یک اثبات و یا حل یک مسأله غالباً غیرکامل و ناتمام هستند. اساسی‌ترین اشاره و عمده‌ترین ارتباط و نطفه دلیل ممکن است در همین‌جا بوده باشد، ولی جزئیات بعداً به‌دست می‌آید که غالباً فایق آمدن بر آن محتاج تلاش فراوان است[1]. بعضی از مؤلفان و البته نه همه آنان، از این موهبت برخوردارند که درست نطفه و جوهره برهان و اندیشه عمده آن‌را به ساده‌ترین شکل ارائه می‌دارند و سپس به ماهیت جزئیات باقیمانده اشاره می‌کنند. چنین دلیلی با آنکه ناکامل است ممکن است آموزنده‌تر از دلیلی باشد که با جزئیات کامل بیان شده باشد، به‌ویژه آنکه اگر قصدمان این باشد که دانش‌آموزان نقشی مهم در تکمیل و تکوین برهان داشته و به یادگیری واقعی اشتغال یابند.

● خلاصه آنکه نقش اثبات‌های غیرکامل را می‌توانیم چنین تعیین کنیم

۱. به‌عنوان راهی برای ارائه مطلبی که پیش‌نیازهای آن تاکنون عرضه نشده باشد، لکن به ناچار از استفاده آن هستیم (معادله درجه n ام)

۲. به‌عنوان وسیله‌ای برای هوش‌افزایی

۳. به‌عنوان روشی برای القاء یادگیری در روش‌های فعال یادگیری به‌گونه‌ای که یادگیرندگان نیز نقشی در تکمیل برهان داشته باشند.

۴. با این حال باید درنظر داشت که اثابت‌های غیرکامل جانشینی برای اثابت‌های کامل نخواهند بود.

۵. باید اعتراف کنیم که ارائه کردن یک برهان ناتمام به صورتی که مطابق ذوق و سلیقه شنونده باشد، اصلاً کار آسانی نمی‌باشد.

● ۳-۳ واژه‌نامه فنی مسأله ریاضی

۳-۳-۱ اثبات‌های شهودی و اثبات‌های صوری (استنتاجی):

قبل از آنکه انواع استدلال ریاضی را توضیح دهیم لازم است کلیاتی در باب استدلال به‌لحاظ شکلی، ارائه دهیم. اثبات‌ها یا برهان‌های مسائل ریاضی به‌لحاظ ساختاری و روش‌های تفکر ریاضی عمدتاً بر دو گونه‌اند:

۱. اثبات‌های شهودی

۲. اثبات‌های صوری (منطقی)

این تقسیم‌بندی در واقع نتیجه دو نوع تفکر است که هم در فلسفه از دیرباز مطرح بوده و هم در ریاضیات. تفکر شهودی به نوعی از تفکر گفته می‌شود که بدون دلیل منطقی و استدلالی، شخصی بتواند حقیقتی را دریابد. دریافت شهودی می‌تواند براساس شهود بصری (رؤیت) و یا شهود روحانی اتفاق افتد. لکن تفکر صوری یا تفکر ریاضی تفکری است که براساس استدلال منطقی و به‌واسطه دلایل محکم و مستدل ارائه گردد. باید متذکر شویم که دو تفکر لزوماً در مقابل هم نمی‌باشند، گرچه بسیاری از متفکرین چنین می‌پندارند. این دو نوع تفکر در واقع مکمل همدیگرند. وقتی یک ریاضیدان همچون پیردوفرما[1] در سال ۱۶۲۴ میلادی بیان می‌دارد که معادله $x^n + y^n = z^n$ برای اعداد طبیعی $n \geq ۳$

۱. پیردوفرما Pier de Fermat عضو مجلس قانونگذاری فرانسه علاقه وافری به دانش ریاضیات داشت. همو اغلب اوقات آزاد خود را به مطالعه کارهای ریاضیدانان پیشین، از جمله دیوفانتیس، صرف می‌کرد. فرما چندین قضیه در باب حساب اعداد مطرح و اثبات کرده است. لیکن برای قضیه مورد بحث، که به قضیه آخر فرما نیز مشهور است، برهان اقامه نکرده است. سرانجام پس از حدود سه قرن، یا بیش از آن، یکی از هیجان‌انگیزترین دستاوردهای بشری حاصل گردید و آن زمانی بود که کورانت و رابینز کتاب «ریاضیات چیست؟» را نوشتند. در این اثر اثبات قضیه آخر فرما به دست اندرو وایلز از دانشگاه پرینستون در سال ۱۹۹۴ ارائه شده است. اثبات وایلز خیلی فنی است و فقط برای متخصص آن قابل فهم است. در این اثبات از نظریه «خم‌های بیضوی» استفاده زیادی شده است.

در اعـداد صحیـح جـواب غیربدیهـی نـدارد، لکـن به دلایلـی از ارائـه اثبات منطقـی آن سـرباز می‌زند. در واقـع از شـهود و بینـش خود اسـتفاده کرده اسـت و این شـهود خیلی پیـش از منطق برایـش اتفاق افتـاده اسـت. همیـن حدس و شـهود پـس از حدود چهـار قـرن در سـال ۱۹۹۲ میلادی توسـط وایلز به‌صورتی منطقی و صوری اثبات می‌گردد. متأسـفانه برخی از متفکرین و شاعران مشهور ما به واسطه علاقه وافری که به شهود عقلی داشته‌اند، به صورتی نادرست بر پیکر تفکر منطقی و استدلالی تاخته‌اند. در تعلیم و تربیت ریاضی، معلمین می‌بایست هر دو نوع تفکر را ارزش نهند.

روش مورد قبول بعضی از مؤلفین کتاب‌های درسی روشی بسیار پسندیده و مطلوب است که برای حل یک مسأله ابتدا یک طرح شهودی از اندیشه اصلی مسأله مورد بحث عرضه می‌کنند و سپس جزئیات و دلایل درستی این طرح را با استدلال ارائه می‌دهند.

ریاضیدان دقیق و باوجدان که می‌خواهد خود را به درسـت بودن آنچه گفته و ثابت کرده است متقاعد سازد، در آن می‌کوشد که به روش شهودی به آن نظر کند و یک برهان صوری برای آن بیاورد.

بهتر است به‌هنگام اثبات صوری از خود بپرسیم؛

آیا با اطمینان می‌توانیم درستی آن‌را مشاهده کنیم؟

همچنین بهتر است به‌هنگام مشاهده واقعیتی به صورتی شهودی، از خود بپرسیم؛

آیا می‌توانیم صحت آن‌را به اثبات برسانیم؟

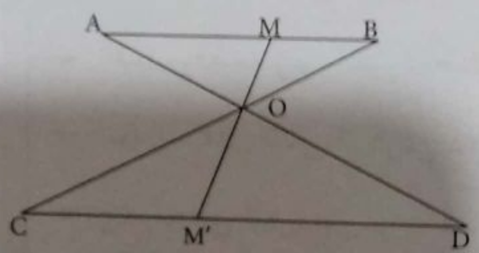
ریاضیدان باوجدان در این مورد همچون کدبانویی است که با شرافت و درستکاری برای خرید به بازار می‌رود. بـرای اینکه از کیفیت چیزی که می‌خواهد بخرد آگاه شـود، دوسـت دارد کـه آن‌را ببیند و لمس کند. بینش شهودی و برهان صوری دو راه مختلف ادراک حقیقت‌اند که احساس کردن اشیاء مادی از طریق دو حس دیدن و لمس کردن است؛ در حالی‌که احساس کردن اشیاء و واقعیت‌های ریاضی از طریق چشم عقل و شهود معنوی است که به آن بصیرت شهودی اطلاق می‌گردد.

بصیرت شهودی ممکن است با شتاب باشد و خیلی پیشتر از برهان صوری حاصل شود. هر دانشجوی باهوش، بدون داشتن شناخت منطقی از هندسه فضایی می‌تواند به‌خوبی این مطلب را درک کند که اصطلاحاتی را که در جمله «دو خط راست موازی با خط راست سوم در فضا خود با یکدیگر متوازی‌اند.» به‌درستی درک کند.

پرداختن به روش صوری به قواعد منطقی و فرمول‌های جبری ممکن است به جایی بسیار دورتر از شهود برسد.

در واقع هر کس می‌تواند یک‌باره این مطلب را دریابد که سه خط راست واقع بر یک سطح که برحسب اتفاق انتخاب شده‌اند، آن سطح را به هفت ناحیه تقسیم می‌کنند. (کافی است تنها ناحیه محدودشده آن‌را که به‌صورت مثلث است و از تقاطع سه خط راست درست شده درنظر بگیرید.) به‌ندرت کسی قابلیت تصور کردن این مطلب را دارد که حتی با به‌کار بردن همه توجه (شهودی) خود، این حقیقت را دریابد که از ۵ سطح اتفاقی فضا به ۲۶ بخش تقسیم می‌شود. ولی به‌خوبی می‌توان ثابت کرد که چنین حکمی درست است و استدلال آن هم طولانی و دشوار نمی‌باشد.

نمونه دیگر این واقعیت مقایسه مجموعه‌ها به‌لحاظ تعداد اعضاء آنها است. هرگاه خط را مجموعه‌ای از نقاط بدانیم، ممکن است شهودمان ما را ممکن است چنین گمراه کند که از دو خط یکی به طول ۵ سانتی‌متر و دیگری به طول مثلاً ۲۰ سانتی‌متر، خط طویل‌تر دارای نقاط بیشتری است. اما استدلال منطقی خلاف این‌را ثابت می‌کند. (شکل ۳-۳)



استدلال: f تابعی است که به نقطه M برروی BA، نقطه M' برروی DC را متناظر می‌کند. این تابع به‌آسانی یک تابع دوسویی است. پس دو پاره‌خط BA و DC دارای یک تعداد نقطه‌اند.

وقتی به حل یک مسأله می‌اندیشیم، معمولاً یک طرحی برای حل آن درنظر می‌گیریم، این طرح با نقشه مسیری است که فکر می‌کنیم با طی آن مسأله حل می‌شود. در ضمن اجرای یک نقشه، هر گام را که برداشت‌هایم آزمایش می‌کنیم. برای امتحان کردن گام‌ها می‌توانیم به بصیرت شهودی اعتماد کنیم، یا قواعد صوری منطقی را به‌کار گیریم. گاه شهود مقدم است و گاه استدلال صوری و این امر به ماهیت مسأله بستگی دارد. مثلاً در حل مسأله‌ای هندسی، به‌ویژه هندسه مسطحه، با رسم شکل و استفاده از امکانات شکل و بصیرت شهودی سعی می‌کنیم که استدلالی قانع‌کننده برای حل مسأله پیدا کنیم. بهر تقدیر، از هر دو بصیرت شهودی و تفکر استدلالی توأماً بهره‌برداری کردن سودمند و جالب‌تر است. در صورتی که بتوانیم آشکارا ببینیم که گام برداشته‌شده درست است، شهود تقدم دارد[1].

[1] متأسفانه در ادبیات ما در برخی مقام‌ها، استدلال و منطق خشک علمی مورد بی‌مهری قرار گرفته است. مثلاً مولوی در مثنوی، دفتر اول می‌فرماید:

پای چوبین بی‌تمکین بود

۳-۳-۲ استدلال ریاضی

استدلال استنتاجی (صوری) غالباً با استدلال ریاضی یکسان تلقی می‌شوند. برای آنکه، به‌عنوان یک پیش‌نیاز و انگیزه‌بخشـــی به دانش‌آموزان، آنها را به تفکر متقاعد سازیم که هرگاه بخواهیم استدلال‌هایی ارائه دهیم که برای همگان قابل قبول باشـــد، و در زندگی محاوره‌ای کمتر به بحث و جدل و اتهامات بی‌مورد دچار شـــویم، می‌توانیم با مثال‌هایی از زندگی اطراف بچه‌ها، این واقعیت را توضیح دهیم. در زیر دو نمونه از این واقعیت‌ها را می‌توانیم به‌عنوان فعالیت نمونه برای بچه‌ها ذکر کنیم:

فعالیـــت نمونه ۱) بعد از بحث درباره معنای اثبات در هندســـه (شـــکل زنجیروار مســـتندات) از دانش‌آموزان بخواهید در مورد زیر بحث کنند:

دانشـــمندی دارویی را اختراع کرده بود. برای یک دوره دو ماهه آن‌را به ۲۰ نفر داد. هیچ‌یک از آنها در طی این دو ماه دچار ســـرماخوردگی نشدند. آیا شما فکر می‌کنید، این دانشمند ثابت کرده است که داروی او جلوی سرماخوردگی را گرفته است؟ این موضوع چگونه با معنای اثبات در ارتباط است؟

فعالیت نمونه ۲) از دانش‌آموزان بخواهید تا در قالب گروه‌هایی موارد ذیل را به بحث بگذارند:

- الف) موقعیت زیر را مورد بحث قرار دهند.
- ب) ایده‌های ناشی از بارش ذهنی برای حل آن مطرح کنند.
- ج) راه‌حلی قابل‌قبول برای همه بیابند و یا دست‌کم گزارش گروه خود را ارائه دهند.
- د) تفکر خود را برای رسیدن به یک تصمیم به بحث بگذارند.

از تقاطع سه بزرگراه ناحیه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع پدید آمده است. فکر می‌کنید بهترین مکان در درون مثلث برای احداث یک کارخانه کجاست؟ (فاصله‌های مساوی از نقطه‌های تقاطع می‌تواند یک گزینه باشد.)

۳-۳-۳ استدلال ریاضی چیست؟

ریاضیدانان، معلمین و دبیران غالباً از استدلال منطقی، تفکر ریاضی و یا تفکر انتقادی نام می‌برند، بدون آنکه تفاوت‌های آنها تبیین گردد. تفکر ریاضی با به‌کارگیری مهارت‌های تفکر غنی ریاضی‌وار (شهودی، استنتاجی، راهبردی) برای درک ایده‌های کشف روابط میان ایده‌ها، به‌دست آوردن یا حمایت از نتایجی در باب ایده‌ها و روابط‌شان و حل مسائلی که با ایده‌ها و مفاهیم سر و کار دارد، درگیر است. استدلال ریاضی می‌تواند به‌عنوان بخشـــی از فرآیند تفکر ریاضی مشـــخص شود. اســـتدلال ریاضی قســـمتی از تفکر ریاضی است که با تشکیل تعمیم‌ها و به‌دست آوردن نتایج معتبر درباره ایده‌ها و چگونگی ارتباط آنها درگیر است.

در حالی‌که اســـتدلال و برهان لازمه پیشـــرفت علمی به‌ویژه در حوزه ریاضیات اســـت، به زبان دقیق‌تر، هر جا برهان و استدلالی وجود نداشته باشد، اصولاً ریاضیاتی وجود ندارد. به قول یکی از ریاضیدانان No Proof No mathematics

۴-۳-۳ انواع استدلال ریاضی

جرج پولیا در باب استدلال ریاضی بیان می‌دارد:

یک اثبات ریاضی استدلالی مدلل (استنتاجی) است در صورتی‌که شواهد استقرایی یک فیزیکدان در خصوص یک حکم فیزیکی شواهدی محیطی (مربوط به موقعیت) است. همچنین شواهد یک وکیل دادگستری-شواهدی آماری و نیز شواهد یک اقتصاددان، متعلق به استدلال محتمل است. استدلال استقرایی حالت خاصی از استدلال محتمل است.

توصیف زیر با روشی که استدلال استقرایی در اکثر تحقیقات تفسیر شده، سازگار است.

استدلال استقرایی: یک فرآیند استدلال ریاضی است که اطلاعات درباره بعضی از اعضای یک مجموعه را به‌کار می‌گیرد تا یک تعمیم در مورد اعضای دیگر یا همه اعضای آن مجموعه بسازد.

مثال استدلال استقرایی: دانش‌آموزی مثال‌های $\frac{۱}{۴}=\frac{۱۶}{۶۴}$ و $\frac{۱}{۵}=\frac{۱۹}{۹۵}$ را دید و به‌طور استقرایی استدلال کرد که رقم اول [در صورت] و رقم دوم [در مخرج] کسر مشترک هستند و می‌توانند حذف شوند. او کسر $\frac{۱۲}{۲۶}$ را مورد آزمایش قرار داد و یاد گرفت که تعمیم‌های ایجادشده در استدلال استقرایی همیشه درست نیستند.

توصیف زیر از استدلال استنتاجی با ایده‌هایی از منابعی مانند هندرسون و اسمیت هماهنگی (وفاق) دارد و با معانی به‌کار رفته در تحقیق جاری نیز سازگار دارد.

استدلال استنتاجی: یک فرایند استدلال ریاضی است که الگوهای استنتاج به‌کار رفته برای به‌دست آوردن نتایج از مقدمات را معتبر می‌سازد.

توجه کنید که استدلال شرطی به‌کارگیری یک اگر- آنگاه یا گزاره‌های شرطی در فرایند استدلال استنتاجی است. نظر به اینکه حجم بزرگی از تحقیقات روی استدلال ریاضی به تردستی و سهولت دانش‌آموز با استنتاج منطقی مربوط است، الگوهای اساسی استنتاج معتبر و نامعتبر مورد استفاده در استدلال شرطی در زیر مرور شده است.

قانون قیاس شرطی (قاعده زنجیره‌ای) (Syllogism)	قیاس استثنایی منفی (قانون نقض انتزاع) (Modus Tollens)	قیاس استثنایی مثبت (قانون انتزاع) (Modus Ponens)
$p \to q$ درست است. $q \to r$ درست است.	$p \to q$ درست است q نادرست است	$p \to q$ درست است q درست است
$p \to r$ درست است.	بنابراین، p نادرست است.	بنابراین، p درست است.

به‌کارگیری قانون نقیض انتزاع: یک مربی تنیس به یک بازیکن گفت: «اگر بیشتر بازی‌های آزمایشی را از احمد ببرد، در دومین بازی انفرادی امروز بازی خواهی کرد.» این بازیکن در فهرست بازی انفرادی دوم نبود. او نتیجه گرفت که او بیشتر بازی‌های آزمایشی خود را از احمد نبرده است.

به‌کارگیری قاعده زنجیره‌ای: یک دانش‌آموز می‌دانست که اگر زاویه‌های قاعده یک مثلث همنهشت باشند، آنگاه دو ضلع مثلث همنهشت هستند. او همچنین می‌دانست که اگر دو ضلع از یک مثلثی همنهشت باشند، مثلث متساوی‌الساقین است. او نتیجه گرفت اگر زاویه‌های مجاور قاعده یک مثلث همنهشت باشند، آنگاه مثلث متساوی‌الساقین است.

۳-۳-۵ الگوهای نامعتبر

هم‌وزن	هم‌وزن معکوس
$p \to q$ q نادرست است	$p \to q$ p نادرست است
بنابراین، p نادرست است.	بنابراین، q نادرست است

بی‌اعتباری الگوی قضیه عکس: زهرا می‌دانست که «اگر یک عدد بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه آن عدد بر ۲ بخش‌پذیر است.» هنگامی‌که معلوم شد یک عدد داده‌شده بر ۲ بخش‌پذیر است، زهرا نتیجه گرفت که آن عدد بر ۴ بخش‌پذیر است.

ادعای نامعتبر[1]: یک آگهی بیان کرد: «اگر شما روزانه ویتامین B مصرف کنید، آنگاه سلامتی برقرار است.» حسن فکر کرد که «اگر نتوانم روزانه ویتامین B مصرف کنم، آنگاه سلامتی برقرار نخواهد ماند.» او احساس کرد به خرید مقداری ویتامین B نیاز دارد.

اصطلاح استدلال کلاسی (مجموعه‌ای) برای ارجاع جهت مورد استفاده قرار دادن استنتاج قیاسی در حالت کلاس شمول نسبت به دسته‌های شرطی، به‌کار گرفته می‌شود.

قیاس استثنایی کلاس شمول: همه A ها، B هستند.

X یک A هست

بنابراین X یک A هست

۳-۳-۶ تحقیق پیرامون استدلال ریاضی

طبیعت تحقیق استدلال استنتاجی چیست؟ اکثر تحقیقات بر روی استدلال استنتاجی به رشد توانایی دانش‌آموز در فهمیدن، کشف کردن و یا به‌کارگیری الگوهای استدلال معتبر یا نامعتبر مربوط می‌شود.

آیا توانایی‌های استدلال استنتاجی به‌طور طبیعی فراتر از زمان بهبود می‌یابد؟ اینهلدر و پیاژه نظریه‌پردازی کردند که کودکان در مرحله عملیات عینی (۷ تا ۱۱ سال) قادر به استدلال مجموعه‌ای (کلاسی) هستند اما استدلال شرطی برای آنها وقتی قابل دسترس می‌شود که به مرحله عملیات صوری (۱۲ سال به بالا) می‌رسند. برخلاف این، بعضی از تحقیقات نشان می‌دهد که نوجوانان می‌توانند نتایج معتبر استنتاج‌شده از مقدمات را بشناسند و اینکه این توانایی را به‌طور پیوسته و استوار از سال‌های تحصیلی ۶ تا ۸ افزایش دهند. در مثال زیر ملاحظه می‌شودکه بچه‌ای که هنوز به‌نحوه استدلال آشنایی ندارد چگونه به نتیجه غلط می‌رسد.

فعالیت نمونه: بعد از مطالعه روش‌های esrevnoc , esrevni noitcidartnoc از دانش‌آموزان بخواهید تصمیم بگیرند که آیا یک خطای استدلالی در مورد زیر رخ داده است یا خیر و [یا دلیل] نتیجه‌گیری خودشان را تأیید کنند: مادر فاطمه به او گفت: اگر اطاقت را تمیز نگهداری نکنی، در بهار آینده کاغذ دیواری جدید برای اطاقت نخواهی داشت. فاطمه اطاقش را تمیز نگه داشت و هنگامی‌که در بهار سال بعد کاغذ دیواری جدید در اطاقش نصب نشد احساس کرد که مادرش زیر وعده‌اش زده است.

در ادامه، بازتاب رویکردهای مورد استفاده در مطالعات پژوهشی گزارش شده، یک کانون کلاسی برای توسعه «روحیه انتقادی» تشریح می‌کند.

1. enverse

کمک به دانش‌آموزان برای توسعه «روحیه انتقادی» به‌وسیله ایجاد جو کلاسی که دانش‌آموزان احساس کنند با خیال آسوده می‌توانند پرسشگری کنند، پیکارجویی کنند، قضاوت‌های خود را مسکوت نگذارند و تقاضای استدلال و تصدیق کنند. هنگامی که با محتوای ریاضی و دنیای واقعی سروکار دارند، در کلاس سؤالاتی مطرح کنید که دانش‌آموزان را به نظارت، ارزیابی و در نتیجه عمل کردن براساس تفکر خویش وادارد.

به‌طور کلی استدلال مجموعه‌ای (کلاسی) ساده‌تر از استدلال شرطی است.

الگوهای استنتاج از ساده‌ترین تا مشکل‌ترین الگو برای دانش‌آموزان که در کشف استدلال غلط (مغالطه یا سفسطه) مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از: قیاس استثنایی (انتزاع)، قیاس منفی (نقیض انتزاع)، هم‌وزنی منفی و هم‌وزنی (inverse ,converse)

۳-۳-۷ مشکلات مهم دانش‌آموزان دبیرستانی با استدلال استنتاجی کدامند؟

روشن است که دانش‌آموزان دبیرستانی مشکلات قابل توجهی در مورد استفاده از الگوهای استنتاجی معتبر دارند.

- بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستانی مشکل به‌کارگیری استدلال صوری برای کشف نتایج الزامی در الگوهای استنتاجی درگیر با عبارت‌های اگر- آنگاه (غیر از اقتباس استنتاجی) دارند.
- غالباً دانش‌آموزان عبارت «اگر- آنگاه» را مثل «اگر و تنها اگر» تعبیر می‌کنند. بسیاری از آنها ارزشمندی الگوی استنتاجی قیاس استنتاجی منفی (نقیض انتزاع) را نمی‌شناسند.
- بسیاری از دانش‌آموزان الگوهای استدلالی نامعتبر وارونه و معکوس را نمی‌شناسند.
- مشکل آنها به عبارت‌های شرطی منفی مربوط است.

۳-۳-۸ دلائل اصلی خطاهای استدلال استنتاجی چیست؟

پژوهش‌های انجام‌شده طی سال‌های اخیر شواهد مؤثری برای مواردی که خطاهای حساب منطق تنها مربوط به قسمتی از خطاهای استدلال استنتاجی است، ارائه می‌کند. این‌گونه خطاها همچنین می‌توانند نتیجه دشواری حفظ اثر اطلاعات و نبودن نشانه‌های معنایی است (معنی‌شناسی) معناشناسی که می‌تواند نشانه‌ای از یک تفسیر معین باشد.

دلایل اشتباهات در استدلال استنتاجی برگرفته از چندین مطالعه در زیر جمع‌بندی شده است.

- **خطاها در استدلال استنتاجی به‌وسیله افزودن، جرج و تعدیل یا چشم پوشیدن مواردی از مقدمات به‌وجود می‌آیند.**

اشتباهات به‌وسیله پذیرفتن (تصویب کردن) محتوای واقعی (حقیقی) به‌جای الگوی استنتاجی به‌وجود آمده‌اند. الگوهای سنتی سخنرانی (مباحثه) روزمره اغلب منطق را از بین می‌برد (باطل می‌کند).

دلائل دیگر اشتباهات، مشکلات زبانی هستند. تعداد و مکان منفی‌ها، طول کلمه و جمله و سرریز شدن شناختی از آن جمله هستند.

ناتوانی در پذیرش فرضیه، و استفاده مناسب از آن گونه‌ای از علت‌های دیگر خطاها می‌باشد.

۳-۳-۹ آیا توانایی‌های استدلال استنتاجی از راه آموزش بهبود می‌یابد؟

برخی از مطالعات انجام‌شده آشکار می‌کند که آموزش با استفاده از مواد و وسایل دست‌ورزی انتخاب شده، تأثیر مثبت روی توسعه توانایی استدلال منطقی کودکان سال دوم و سوم دارد. پژوهش‌های انجام‌شده نشانگر آن است که یک‌چهارم دانش‌آموزان سال پنجم و ششم ابتدایی می‌توانند مقدمات اصلی منطق را در سطح ۸۵ درصد از آنچه که دانشـــجویان دانشگاه به آن دســـت می‌یابند، در مطالعه یکسان به‌کار گیرند و بیش از یک فاصله زمانی بلندمدت آن‌را گسترش دهند. به‌عبارت دیگر، منطق کلاسی می‌تواند با موفقیت برای دانش‌آموزان ۱۱ و ۱۲ ساله آموزش داده شـــود اما این آموزش به دانش‌آموزان کمک نمی‌کند تا الگوهای نامعتبر را کشف و شناسایی کنند. این امر واضح اســـت که معلم معمولی (طبیعی) که از زبان و ایده‌های شـــرطی در کلاس درس استفاده می‌کند، می‌تواند تأثیر مثبتی بر رشد توانایی استدلالی دانش‌آموزان داشته باشد. به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

- دوره قبل از بلوغ کودکان (۹ تا ۱۲ سالگی) می‌تواند برای توسعه بعضی از انواع توانایی‌ها، استدلال استنتاجی به‌وسیله تجربیات (آزمایشات) به‌طور دقیق طرح‌شده به‌کار رود.
- استدلال کلاسی (مجموعه‌ای) را می‌توان در اوایل دوره بلوغ آموزش داد اما موفقیت آموزشی مهم در بهبود و اصلاح توانایی‌هایی قبل از ۱۶ سالگی دوره بلوغ برای شناخت روش‌های استنتاجی نامعتبر گزارش نشده است.
- همبستگی مثبت بین رشد توانایی استدلال و به‌عمل درآمدن در کلاس درس، جایی‌که یک معلم اغلب به‌طور طبیعی ایده‌ها و زبان استدلالی اگر- آنگاه را به‌کار می‌برد، وجود دارد.

تلاش برای اثبات صوری آنچه به شـــهود دیده شـــده و دیدن شهودی آنچه که به شکل صوری به اثبات رسیده، یک تمرین تقویت‌کننده عقلی و ذهنی است.

متأسفانه بیشتر معلمین ریاضی اظهار می‌دارند که در کلاس درس همیشـــه وقت کافی برای این‌کار وجود

ندارد. ولی باید توجه داشـت که تعلیم و تربیت ریاضی همانا دادن فرصت کافی به دانش‌آموزان اسـت تا روی مسأله‌های ریاضی و پدیده‌های ریاضی‌گونه تأمل کنند تا ضمن تمرین حدسیه‌سازی، تفکر شهودی و استدلال منطقی به کشف روابط و ویژگی اشیاء نایل آیند.

۳-۳-۱۰ استدلال راهبردی

استدلالی است که نه به‌عنوان قطعی و نهایی بلکه تنها به‌عنوان وجه‌نما و موقتی درنظر گرفته می‌شود. هدف چنین استدلالی کشف کردن راه‌حل مسأله حل‌کردنی است. غالباً به آن نیازمندیم که از استدلال اکتشافی و راهبردی استفاده کنیم. هنگامی به یقین کامل می‌رسیم که تمام راه‌حل مسأله را پیدا کرده باشیم ولی پیش از دست یافتن به قطعیت غالباً باید خود را با یک حدس موجه‌نما قانع سازیم. ممکن است پیش از رسیدن به حل نهایی به یک حل موقتی احتیاج داشته باشیم و هنگامی به استدلال راهبردی نیاز داریم که بخواهیم یک برهان قطعی را بسـازیم. بدان‌گونه که برای برپا داشـتن و ساختن یک پل نخست به چوب‌بست‌ها نیازمندیم. اسـتدلال راهبردی، غالباً بر پایه اسـتقراء یا تمثیل بنا می‌شـود. تمثیل عبارت است از مثال‌های ساده از یک پدیده که در راسـتای هم هسـتند و حقیقتی را در باب آن شیء یا پدیده دربردارند. در بخش ۳-۵ به اختصار به‌شـرح اسـتقراء در علوم طبیعی و همچنین استقراء ریاضی می‌پردازیم؛ گو اینکه یقین داریم دانشجویان در درس مبانی ریاضیات با این موضوع به‌قدر کافی آشنایی پیدا کرده‌اند.

۳-۴ آنالیز چیست؟

همچنان‌که قبلاً گفته شـد آنچه که اصطلاحاً راهیابی خوانده می‌شود، به اختصار مجموعه‌ای از آموزه‌ها است و برای اسـتفاده کسانی نوشته شده که پس از یادگیری اصول متعارفی، خواستار به‌دست آوردن مهارت بیشتر در حل مسـائل ریاضی هسـتند و کاربرد آن تنها برای چنین کسانی سـودمند است. این فن ساخته سه نفر است؛ اقلیدس مؤلف کتاب اصول، آپولونیوس برگایی، و ارسطاپوس‌اکبر. این فن در واقع متضمن تعلیم روش‌های آنالیز (تجزیه) و سنتز (ترکیب) می‌باشد.

در تجزیه از آنچه مطلوب و مجهول اسـت آغاز می‌کنیم و آن‌را مسـلم می‌گیریم تا نتایجی از آن بتوانیم اسـتخراج کنیم و سـپس نتایجی از نتایج به‌دست‌آمده و سـرانجام به نقطه‌ای می‌رسیم که می‌توانیم آن‌را به‌عنوان نقطه آغاز ترکیب به‌کار گیریم. در واقع در آنالیز چنان فرض می‌کنیم که آنچه مطلوب است از پیش به‌دست آمده است. در آن تحقیق می‌کنیم که از کدام امر مقدم آنچه را که می‌خواهیم می‌توانیم به‌دسـت آوریم، سپس به تحقیق در این‌باره می‌پردازیم که مقدم بر چیست و با ادامه این کار، تا آنکه بعد از گذشتن از مقدمی به مقدم دیگر، سرانجام به چیزی برسیم که پیشتر دانسته بوده است یا بنا به فرض صحت داشته است. این روش را به‌نام تجزیه یا تحلیل یا حل رو به علت یا استدلال قهقرایی می‌نامیم.

اما در ترکیب (سنتز) فرآیند را معکوس می‌کنیم و آخرین نقطه‌ای را که در تحلیل به آن رسیده بودیم نقطه آغاز قرار می‌دهیم؛ و این چیزی از پیش دانسته یا بنا به فرض دارای صحت و حقیقت است. و از آن آنچه را که در تجزیه و تحلیل بر آن مقدم بوده است استنتاج می‌کنیم و با پیش رفتن و استنتاج‌هایی متوالی بار دیگر گام‌های خود را ترسیم می‌کنیم و بالاخره به آنچه مطلوب است می‌رسیم. این روش را سنتز یا حل ساخته‌شدنی یا استدلال پیش‌رونده می‌نامیم.

متأسفانه در حل مسائل ریاضی به روش سنتی، معلمین تنها به ارائه ترکیب حل مسأله می‌پردازند و از اینکه این ترکیب چگونه حاصل شده است سخنی به میان نمی‌آورند. در واقع بخش آنالیز (تجزیه) حل مسأله را پنهان می‌سازد. نتیجه این امر آن است که شاگردان حل یک مسأله خاص و مطرح‌شده را از معلم فرامی‌گیرند لکن در حل مسأله و فرآیند حل مسأله مهارت نمی‌یابند. به‌عبارت دیگر حل یک مسأله خاص را یاد می‌گیرند ولی «مسأله حل کردن» را کمتر یاد می‌گیرند.

فصل سوم

راهیابی در مقابل واژه استراتژی گفته می‌شود و آن فرایندی است که در نتیجه تجزیه و تحلیل و سپس ترکیب حاصل می‌شود؛ ترکیب نیز زنجیره‌ای از اعمال متوالی است که با شروع از آخرین نقطه تحلیل و طی مراحل لازم به مطلوب و مجهول مسأله می‌رسیم.

۳-۴-۱ انواع مسایل ریاضی

در شرح پاپوس از راهیابی‌ها به‌جای مسائل ریاضی، مسائل هندسی، ذکر شده است. لکن روش‌های توصیف‌شده به‌وسیله پاپوس به هیچ‌وجه محدود به مسائل هندسی نیست؛ در واقع باید بگوییم که این روش‌ها حتی محدود به مسائل ریاضی نیز نمی‌باشد. در مثالی که در ذیل مطلب خواهد آمد به این گفته اشاره بیشتری خواهد شد.

مسائل ریاضی بر دو گونه‌اند:

مسائل یافتنی: در این‌گونه مسائل از ما خواسته شده است که مجهول یا مجهولاتی چون x (و y....) را پیدا کنیم که به‌صورتی روشن شرط یا شرایط بیان‌شده‌ای را تحقق بخشند. ممکن است چنین مجهولی اصلاً وجود نداشته باشد. برای نمونه به مثال‌ها و مسائل زیر توجه می‌کنیم:

• آیا یک گروه نامتناهی وجود دارد که هر عضو آن از مرتبه متناهی باشد؟ در صورتی‌که جواب شما مثبت است، یک مثال ارائه دهید و در صورتی‌که فکر می‌کنید مسأله فاقد جواب است با استدلال ادعای خود را ثابت کنید.

• X را چنان بیابید که در معادله زیر صدق کند:

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

• یک گروه غیرآبلی پیدا کنید که همه زیرگروه‌های آن آبلی باشند.

• آیا عدد اولی وجود دارد که از هر عدد اول دیگر بزرگتر باشد؟ ارائه دهید یا با استدلال رد کنید.

• یک حلقه بخشی پیدا کنید که ضرب آن جابه‌جایی نباشد.

مسائل یافتنی می‌توانند به‌صورتی صریح و به گونه‌ای که وجود شیء مورد نظر قطعی است مطرح شوند؛ و یا آنکه می‌توانند به گونه‌ای مطرح شوند که حدس وجود یا عدم وجود شیء مورد نظر را به شاگردان محول سازند. نباید فراموش کرد که **آشنایی با حدسیه‌سازی یکی از اهداف مهم تعلیم و تربیت ریاضی است**. برخی از مسائل پیدا کردنی سال‌ها وقت ریاضیدانان حرف‌های را به خود مشغول داشته است، تا سرانجام به حل آن نایل شده‌اند؛ مثال اخیر فوق‌الاشاره از آن‌گونه می‌باشد که همیلتون[1] پس از ۱۸ سال تفکر توانست یک حلقه بخشی بسازد که فاقد خاصیت جابه‌جایی باشد.

۳-۴-۲ آنالیز مسایل یافتنی

اگر یک مسأله یافتنی داشته باشیم و در آن از ما خواسته شده است که مجهولی همچون X که به‌صورتی روشن شرط بیان‌شده‌ای را تحقق بخشد به‌دست آوریم، هنوز نمی‌دانیم که آیا چیزی که بتواند چنین شرطی را محقق سازد ممکن است یا نه؟ ولی چنان فرض می‌کنیم که یک X موافق با شرطی مفروض وجود دارد و از آن مجهول دیگر y را استخراج می‌کنیم که باید شرطی وابسته به آن‌را تحقق بخشد. سپس y را به مجهولی دیگر پیوند می‌زنیم و به همین‌گونه پیش می‌رویم تا به آخرین مجهول مانند Z برسیم که شرط خواسته‌شده در آن تحقق پیدا می‌کند. اگر واقعاً یک z بدان صورت وجود داشته باشد که شرط تحمیل‌شده بر آن‌را تحقق بخشد، یک X نیز وجود خواهد داشت که شرط اصلی را تحقق بخشد، به شرط آنکه همه استنتاج‌های متوالی ما برگشت‌پذیر باشند. نخست Z را پیدا می‌کنیم، سپس با معلوم بودن z مجهول مقدم بر آن‌را به‌دست می‌آوریم و به‌همین ترتیب پیش می‌رویم تا سرانجام پس از دانستن y از روی آن X را به‌دست می‌آوریم و بدین‌ترتیب به هدف خود می‌رسیم. ولی اگر چیزی نباشد که شرط تحمیل‌شده بر z را تأمین کند، مسأله مربوط به X جواب نخواهد داشت (مشروط بر آنکه همه استنتاج‌ها بازگشت‌پذیر باشند). اکنون به مثال جبری فوق برمی‌گردیم.

X را چنان به‌دست آورید که در معادله زیر صدق کند.

$$۸(۴^x + ۴^{-x}) - ۵۴(۲^x + ۲^{-x}) + ۱۰۱ = ۰$$

این یک مسئله یافتنی است که حل آن برای شخص مبتدی چندان آسان نیست. باید آن شخص با اصول آنالیز ریاضی آشـــنا باشـــد؛ البته مقصود کلمه «آنالیز» نیست بلکه اندیشه رســیدن به هدف از راه تحویل‌های مکرر مقصود است. علاوه‌بر این باید با ساده‌ترین گونه‌های معادلات آشنا باشد. حتی با مقداری شناخت، اندیشه‌ای نیک و اندکی یاری بخت و مقداری نیروی اختراع لازم اســت تا بر وی معلوم شــود که چون $۴^x = (۲^x)^۲$ و $۴^{-x} = (۲^x)^{-۲}$ بهتر است چنان فرض کند که $y = ۲^x$ که چون این فرض را وارد صورت مسئله کنیم چنین خواهیم داشت:

$$۸(y^۲ + \frac{۱}{y^۲}) - ۵۴(y + \frac{۱}{y}) + ۱۰۱ = ۰$$

که ساده‌تر از معادله نخستین به‌نظر می‌رسد؛ ولی کار ما هنوز به پایان نرسیده است. هنوز به اختراع کوچک دیگری به‌صورت:

$$z = y + \frac{۱}{y}$$

نیازمند است که شرط را بدین شکل درمی‌آورد:

$$۸z^۲ - ۵۴z + ۸۵ = ۰$$

و در اینجا آنالیز به پایان می‌رسد، به شرط آنکه حل‌کننده مسئله با حل معادلات درجه دوم آشنایی داشته باشد.

۳-۴-۳ سنتز چیست؟

اجرا کردن گام به گام محاســباتی که امکان آنها به‌وســیله آنالیز پیش‌بینی شــده بود. حل‌کننده مسئله برای پایان دادن به کار حل مسئله به اندیشه‌ای تازه نیاز ندارد، تنها برای محاسبه مجهول‌های گوناگون باید حوصله و دقت داشته باشد. ترتیب محاسبه برعکس ترتیب اختراع است؛ نخست z را به‌دست می‌آوریم $(z = ۵/۲)$ سپس y را $(y = ۲, ۱/۲, ۴, ۱/۴)$ و سرانجام مجهول اصلی x را $(x = ۱, -۱, ۲, -۲)$. سنتز گام‌های آنالیز را دوباره ترسیم می‌کند و در حالت حاضر به آسانی می‌توان دید که چرا چنین می‌کند.

۳-۴-۴ تجسم غیرریاضی:

یک انسان ابتدایی می‌خواهد از یک نهر عبور کند، ولی نمی‌تواند به طریقی که دیروز از آن می‌گذشت امروز بگذرد، بدان جهت که شب گذشته سطح آب در آن بالا آمده است. بنابراین عبور کردن موضوع یک مسئله می‌شود: «گذشتن از نهر» عبارت از x در مسئله اصلی است. ممکن است آن مرد به‌خاطر بیاورد که زمانی از نهر دیگری با گذشتن از روی تنه درختی که بالای نهر قرار داده بودند گذشته بوده است. به اطراف نگاه می‌کند تا ببیند که آیا درخت افتاده‌ای می‌بیند یا نه که این خود مجهول تازه یعنی مثل y او خواهد شد. درخت افتاده‌ای پیدا نمی‌کند، ولی درخت‌های فراوانی را در امتداد نهر سرپا ایستاده می‌بیند؛ خواسته او آن است که یکی از این درخت‌ها افتاده باشد. آیا می‌تواند درختی را بر روی نهر بیندازد؟ این اندیشه‌ای بزرگ است و مجهول سوم را تشکیل می‌دهد؛ به چه وسیله می‌تواند درخت را کج کند و بر روی نهر قرار دهد؟

اگر بخواهیم اصطلاحات پاپوس را به‌کار بریم، این رشته اندیشه‌ها را باید آنالیز (تحلیل) بنامیم. اگر انسان ابتدایی بتواند کار آنالیز خود را به پایان برساند، مخترع پل و تبر خواهد شد. سنتز (ترکیب) چیست؟ ترجمه و تعبیر کردن اندیشه‌ها به‌صورت اعمال است. پایان کار سنتز عبور کردن بر یک درخت قرار گرفته بر روی یک نهر است.

چیزهای واحدی آنالیز و سنتز را پر می‌کند. در آنالیز عقل مرد را به‌کار می‌اندازد و در سنتز ماهیچه‌های او را، آنالیز در اندیشه‌ها است و سنتز در کارها و کردارها، تفاوت دیگری نیز وجود دارد و آن بدین معنی است که ترتیب معکوس می‌شود. گذشتن از نهر نخستین میلی است که با آن آنالیز آغاز می‌شود و آخرین کاری است که با آن سنتز به پایان می‌رسد.

به‌گونه‌ای دیگر می‌توانیم به ارتباط طبیعی میان آنالیز و سنتز اشاره کرد. این ارتباط پس از مثالی که آوردیم آشکار می‌شود. آنالیز طبیعتاً نخست می‌آید و سنتز پس از آن؛ آنالیز اختراع است و سنتز اجرا و عمل، آنالیز طرحی را ترسیم می‌کند و سنتز به اجرای آن نقشه و طرح می‌پردازد.

۳-۴-۵ مسائل نمونه‌ای:

در این بخش به حل مسأله‌هایی می‌پردازیم که در آن تحلیل (analysis) نقشی اساسی دارد.

۱. تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $f(a)=A$ و $f(b)=B$ ثابت کنید:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_A^B f^{-1}(x)dx=Bb-Aa \qquad (*)$$

حل: می‌دانیم $f^{-1}(x)$ تابع معکوس تابع $f(x)$ موجود است. f تابعی است که دارای شرایط مسأله است اما دلخواه است. لذا هیچ‌یک از انتگرال‌ها جداگانه قابل محاسبه نمی‌باشد.

آیا مسأله یا قضیه‌ای شبیه این مسأله را قبلاً دیده‌ایم؟

در بین مسائل قبلی خیر.

به قضیه‌ها رجوع می‌کنیم. با توجه به اینکه طرف دوم تساوی (*) عددی ثابت است، فکر می‌کنیم که این مسأله شبیه قضیه تعمیم‌یافته انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء (ص ۳۱ مرجع [۸]) است.

اگر f و α هر دو صعودی باشند و $f \in R(\alpha)$، آنگاه $\alpha \in R(f)$ و

$$\int_a^b f(x)dx + \int_A^B f^{-1}(x)dx = Bb - Aa$$

لذا عبارت $Bb - Aa$ یعنی $f(b)b - f(a)a$ در واقع شبیه $f(b)\alpha(b) - f(\alpha)a$ در قضیه مذکور است. $\alpha(x) = x$ اختیار می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b xd(f(x)) = bf(b) - af(a) \qquad (۱)$$

می‌بینیم طرف دوم (*) ظاهر می‌شود.

چگونه می‌توانیم $\int_a^b xd(f(x))$ را با $\int_A^B f^{-1}(x)dx$ یکی کنیم؟ اگر در این انتگرال تغییر متغیر $f(x) = u$ بدهیم چه می‌شود؟

$$f(x) = u \Rightarrow x = f^{-1}(u) \qquad (۲)$$

$$\int_a^b xd(f(x)) = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(u)du$$

$$= \int_A^B f^{-1}(x)dx$$

با استفاده از (۲) در (۱) تساوی (*) به‌دست می‌آید.

G.۲ یک گروه $H \le G$ و $K \le G$ به طوری‌که $H \subseteq K$. ثابت کنید هرگاه $(G:K)$ و $(K:H)$ متناهی باشند، $(G:H)$ نیز متناهی بوده و $(G:H) = (G:K)(K:H)$

حل: (تحلیل) گیریم $(K:H) = n, (G:K) = m$. لذا

(۱)

مجموعه همدسته‌های K در G $\{a_iK \mid a_i \in G, i = ۱, ۲, \ldots, m\}$

(۲)

$\{b_jH \mid b_j \in K, j=1,2,\ldots,n\}$ مجموعه همدسته‌های H در K

چگونه می‌توانیم از این همدسته‌ها، همدسته‌های H را در G بسازیم؟ اگر چنین کاری ممکن باشد تعداد این همدسته‌ها چقدر است؟

(نگاه به مجهول): تعداد همدسته‌های H در G باید برابر nm باشد. پس از همدسته‌های (۱) و (۲) که در دست‌اند می‌بایست به تعداد nm همدسته H در G بسازیم. این ایده به حل مسأله منجر می‌شود. آری

(۳)

$$\{a_ib_jH \mid i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n\}$$

ظاهراً این همدسته‌ها که دقیقاً به تعداد nm هستند همه همدسته‌های H در G هستند زیرا $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ تغییر می‌کند. مسأله حل شده است؟ یک مشکل بروز می‌کند. ممکن است در این همدسته‌ها تکرار رخ دهد. ادعا می‌کنیم که این مجموعه‌ها مجزایند:

$$a_pb_qH = a_rb_sH \quad s \le n, r \le m$$

$$a_pb_qb_s^{-1}a_r^{-1} \in H$$

$$a_pb_qb_s^{-1}a_r^{-1} = h \in H$$

$a_pb_qb_s^{-1}a_r^{-1} \in K \quad H \subseteq K$ اما

$a_pb_qK = a_rb_sK \quad b_q, b_s \in K$ چون

$$a_pK = a_rK$$

اما a_iK متمایزند، $p=r$ و $b_qK = b_sK$ در نتیجه $q=s$ پس a_ib_jHها متمایزند.

از کجا معلوم است که a_ib_jHها همه همدسته‌های H در G هستند؟ فرض کنیم hX یک همدسته دلخواه H در G باشد که $x \in H$. داریم (i ی هست)

$$xK = a_iK$$

$$x \in a_iK$$

$$x = a_ik \quad k \in K$$

اما Hk یک همدسته (چپ) H در K است. پس j ی هست که:

$$KH = b_jH$$

برای $1 \le j \le n$ و $1 \le i \le m$ ، $xH = a_i kH = a_i b_j H$. در نتیجه $a_i b_j H$ همه همدسته‌های متمایز H در G هستند. پس $(G:H) = mn$.

۳-۵ استقراء و استقراء ریاضی

قبلاً گفتیم که استقراء عبارت است از فرآیند اکتشاف قوانین کلی از طریق ملاحظه و ترکیب کردن نمونه‌های جزئی که در همه علوم و حتی در ریاضیات مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. استقراء ریاضی در ریاضیات تنها برای قضایایی از گونه خاص به‌کار می‌رود. مشترک بودن نام استقراء ریاضی و استقراء در سایر علوم مایه تأسف است، بدان جهت که ارتباط منطقی بسیار اندکی میان دو فرایند وجود دارد. با این همه ارتباطی عملی مشاهده می‌شود؛ گاه هر دو روش را با هم به‌کار می‌بریم. هر دو را با یک مثال نمایش می‌دهیم.

۱. ممکن است بر حسب تصادفی نیک متوجه آن شویم که:

$$1+8+27+64=100$$

که با توجه به مجذورها و مکعب‌ها می‌توان به آن شکل بسیار جالب توجه زیر را داد:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

آیا چگونه چنین چیزی اتفاق افتاده است؟ آیا غالباً اتفاق می‌افتد که مجموع مکعب‌های متوالی یک مربع (مجذور) باشد؟

در طرح این سؤال به طبیعی‌دانی می‌مانیم که در تحت‌تأثیر دیدن یک گیاه شگفت‌انگیز یا یک ساختمان زمین‌شناختی شگفت‌انگیز، به طرح یک سؤال کلی می‌پردازد. پرسش کلی ما مربوط به مجموع مکعب‌های متوالی $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ است که مسئله ما با «نمونه خاص» $n=4$ آن طرح شده است.

در برابر پرسش خودمان چه می‌توانیم کرد؟ همان کاری که طبیعی‌دان می‌کند؛ می‌توانیم حالات خاص دیگر را مورد تحقیق قرار دهیم. حالات خاص $n=2,3$ ساده‌تر است، و حالت $n=5$ حالت بعدی است. بهتر است برای مراعات یکنواختی و کامل بودن حالت $n=1$ را نیز اضافه کنیم. چون همه این حالات را مرتب کنیم، به همان‌گونه که زمین‌شناس نمونه‌های یک کانی معدنی را مرتب می‌کند، جدول ذیل را به‌دست خواهیم آورد:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 &&= 1^2\\
1+8 &= 9 &&= 3^2\\
1+8+27 &= 36 &&= 6^2\\
1+8+27+64 &= 100 &&= 10^2\\
1+8+27+64+125 &= 225 &&= 15^2
\end{aligned}
$$

باور کردن این مطلب دشوار است که همه این حاصل جمع‌های متوالی مکعب‌ها تنها برحسب تصادف محض صورت مربع پیدا کرده باشند. در حالت مشابهی طبیعی‌دان کمترین شکی در صحت قانون کلی القاشده به توسط حالت‌های خاص که بیشتر مورد ملاحظه قرار گرفته است نمی‌کند، این قاعده کلی تقریباً با استقراء به ثبوت رسیده است. ریاضیدان نظر خود را با محافظه‌کاری بیشتر ابراز می‌دارد، هر چند البته اساساً وی نیز به همان‌گونه فکر می‌کند. وی خواهد گفت که قضیه زیر به‌وسیله استقراء القاء شده است:

حاصل جمع نخستین n مکعب یک مربع است.

۲. بدین‌ترتیب به حدسی جالب توجه و به یک قانون که تا اندازه‌ای اسرارآمیز به‌نظر می‌رسد دست یافتیم. چرا باید مجموعه‌های مکعب‌های متوالی برابر با یک مربع شود؟ ولی ظاهراً چنین است. طبیعی‌دان هنگام روبه‌رو شدن با چنین وضعی چه می‌کند؟ وی به آزمایش حدس خود ادامه می‌دهد. با این کار ممکن است به راه‌های گوناگون پژوهش و تحقیق برسد. امکان آن هست که مدارک تجربی دیگری نیز به‌دست آورد؛ اگر ما هم بخواهیم همین کار را بکنیم، لازم است حالات دیگر $n = ۶, ۷, \cdots$ و غیر آن‌را بیاموزیم. طبیعی‌دان واقعیت‌هایی را که راهنمای او برای رسیدن به حدس بوده است دوباره امتحان می‌کند، آنها را به دقت با یکدیگر در معرض مقایسه قرار می‌دهد و در آن می‌کوشد که از میان آنها نظم‌های ژرفتر و تمثیل‌های بیشتر استخراج کند. بهتر است این خط تحقیق را دنبال کنیم.

فرض کنید که می‌خواهیم حالت‌های $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ را که در جدول خود مرتب کردیم دوباره مورد آزمایش قرار دهیم. چرا همه این حاصل جمع‌ها مربع (مجذور) است، مبناهای آنها ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ است. درباره این مبناها چه می‌شود گفت؟ آیا نظم ژرفتر و شباهت و تمثیل بیشتر وجود دارد؟ به هر صورت، به‌نظر نمی‌رسد که افزایش آنها بسیار بی‌قاعده باشد. چگونه افزایش پیدا می‌کنند؟ اختلاف میان دو جمله متوالی این سلسله خود در حال افزایش است.

$$3-1=2,\quad 6-3=3,\quad 10-6=4,\quad 15-10=5$$

که این حاصل تفریق‌ها آشـــکارا صورت منظم دارد. در اینجا با شباهتی شگفت‌انگیز میان مبناهای آن مربع‌ها را پیدا می‌کنیم، و نظم جالب توجهی در میان اعداد ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ می‌بینیم:

$$۱=۱$$

$$۳=۱+۲$$

$$۶=۱+۲+۳$$

$$۱۰=۱+۲+۳+۴$$

$$۱۵=۱+۲+۳+۴+۵$$

اگر این قاعده و نظم کلی باشد که باور داشتن به ضد آن دشوار است قضیه‌ای که به آن گمان برده‌ایم صورت دقیق‌تر پیدا می‌کند، برای $n=۱,۲,۳,...$ این قانون صادق است.

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳=(۱+۲+۳+\cdots+n)^۲$$

۳. قانونی که هم‌اکنون به آن اشـــاره کردیم برمبنای اســـتقراء بنا شـــده است و روشـــی که بنابر آن این قاعده ساخته شـد، ما را به اندیشه‌ای درباره اسـتقراء رهبری می‌کند که لزوماً یک‌جانبه و غیرکامل است ولی پیچ و تاب خورده و از حالت طبیعی بیرون آمده اســت. اســتقراء در آن می‌کوشـد که در آن سـوی ملاحظات و مشـهودات به نظم و انسجام برسد. آشکارترین اسباب کارهای آن عبارت است از تعمیم و تخصیص و تمثیل. تعمیم آزمایشـی با تلاشی آغاز می‌شـود که به منظور فهم واقعیت‌های مشاهده‌شده صورت می‌گیرد، بر پایه تمثیل بنا شده و برمبنای حالات خاص بیشتر تأیید یافته است.

از سـخن گفتن بیشـتر درباره اسـتقراء خودداری می‌کنیم که از این جهت عدم توافق گسـترده‌ای در میان فیلسـوفان وجود دارد. ولی این نکته را باید اضافه کنیم که بسیاری از نتایج ریاضی نخست بر پایه استقراء بنا شده و سپس به اثبات رسیده است. **ریاضیاتی که با دقت و استحکام عرضه می‌شود یک علم استنتاجی منظم است ولی ریاضیاتی که در حال سازندگی است علمی آزمایشی و استقرایی است.**

۴. در ریاضیات همچون علوم فیزیکی از مشاهده و استنتاج منطقی برای اکتشاف قوانین کلی استفاده می‌شود ولی در اینجا تفاوتی وجود دارد. در علوم فیزیکی، ملاک قدرت و اعتباری بالاتر از مشـاهده و اسـتنتاج وجود ندارد، ولی در ریاضیات چنین قدرت و اعتباری وجود دارد و آن اثبات دقیق است.

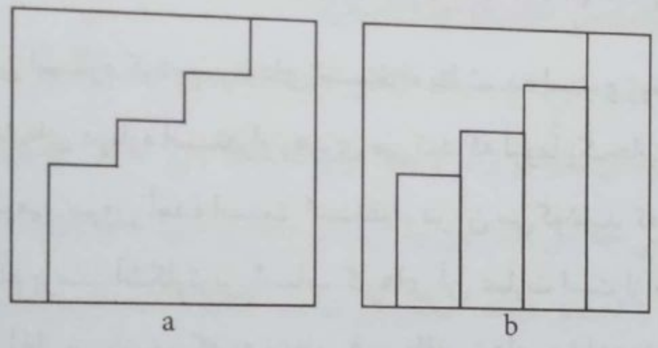
پس از آنکه مدتی به‌صورت آزمایشی کار کردیم، بهتر آن است که اکنون دیدگاه خود را تغییر دهیم و دقیق باشیم. نتیجه‌ای جالب توجه کشف کردیم ولی دلیلی که آن‌را تأیید می‌کرد تنها موجه‌نما و آزمایشی و موقتی و راهیابانه بود، حال می‌خواهیم آن‌را به‌صورت قطعی از طریق اثبات و استدلال استقرار بخشیم.

اکنون به یک «مسئله ثابت‌کردنی» رسیده‌ایم: می‌خواهیم نتیجه‌ای را که پیشتر به آن رسیدیم (به شماره ۲ بالا رجوع کنید) ثابت کنیم یا آن‌را به‌صورت قطعی رد کنیم.

به ساده‌تر کردن کوچکی می‌پردازیم. ممکن است بدانیم که:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

به هر صورت ثابت کردن این مطلب آسان است. یک مربع مستطیل را درنظر بگیرید که ضلعی از آن n است و ضلع دیگرش $n+۱$ و آن‌را با خطی پلکانی چنانکه در شکل ۸a می‌بینید به دو قسمت برابر تقسیم کنید که با آن حالت $n=۴$ مجسم شده است. وسعت سطح هر یک از این دو نیمه مستطیل برابر است با $۱+۲+۳+\cdots+n$ که برای $n=۴$ اندازه آن $۱+۲+۳+۴$ می‌شود. (شکل ۸b). مساحت تمام مستطیل عبارت از $n(n+۱)$ است که هر شکل پلکانی نیمی از آن‌را تشکیل می‌دهد.



شکل ۳-۴

می‌توانیم نتایجی را که از راه استنتاج به‌دست آورده‌ایم، بدین‌صورت بنویسیم:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

۵. اگر اندیشه‌ای درباره اثبات این نتیجه نداشته باشیم، دست‌کم می‌توانیم آن‌را امتحان کنیم. نخستین حالتی را که نیازموده‌ایم و براساس $n=۶$ است امتحان می‌کنیم. برای این اندازه n فرمول بدین‌صورت درمی‌آید:

$$۱+۸+۲۷+۶۴+۱۲۵+۲۱۶=\left(\frac{۶\times۷}{۲}\right)^۲$$

و پس از محاسبه معلوم می‌شود که این معادله درست و هر یک از دو طرف آن برابر با ۴۴۱ است. می‌توانیم فرمول را به صورتی مؤثرتر در معرض آزمایش قرار دهیم. به احتمال قوی این فرمول به‌صورت کلی و برای هر اندازه n صحت دارد. آیا اگر برای n درست باشد آیا برای $n+۱$ هم درست است؟ همراه با فرمول بدان

صورت که پیشتر نوشته شده نیز می‌توانیم چنین داشته باشیم:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$$

و اکنون تنها به یک وارسی و امتحان ساده نیاز داریم. چون از این فرمول، فرمول پیشین را کم کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$(n+1)^3=(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2-(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

که امتحان کردن آن آسان است. طرف راست معادله را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$(\frac{n+1}{2})^2[(n+2)^2-n^2]=(\frac{n+1}{2})^2[n^2+4n+4-n^2]$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4)$$

$$=(n+1)^2(n+1)=(n+1)^3$$

که با این آزمایش فرمول از بوته امتحان گذشت و صحت آن به اثبات رسید.

حال می‌خواهیم به روشنی ببینیم که معنی این آزمایش چیست. بدون شک ثابت کردیم که:

$$(n+1)^3=(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2-(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

ولی هنوز نمی‌دانیم که آیا

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)^2}{2})$$

صحیح است یا نه. ولی اگر می‌دانستیم که این فرمول درست بوده است، می‌توانستیم با افزودن معادله‌ای که صحت آن‌را بدون شک اثبات کرده بودیم، چنین استنتاج کنیم که:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$$

نیز صحت دارد که همان ادعای صحت برای $n+1$ است. اکنون عملاً می‌دانیم که حدس ما برای $n=1,2,3,4,5,6$ درست است. برحسب آنچه هم‌اکنون گفتیم، چون حدس برای $n=6$ صادق است،

لازم است برای $n = 7$ نیز صادق باشد، و چون برای $n = 7$ صادق باشد لازم می‌آید که برای $n = 8$ نیز صادق باشد، و پس از ۸ برای ۹، و همچنین برای دیگر اعداد. چون صحت آن برای هر n به اثبات رسیده، کلیت آن به اثبات رسیده است.

۶. راه اثباتی که گذشت می‌تواند همچون الگویی برای بسیاری از حالت‌های مشابه مورد استفاده واقع شود. خطوط اساسی این الگو چگونه است؟

ادعایی که می‌خواهیم آن‌را به اثبات برسانیم، باید پیشتر به‌صورتی دقیق بیان شده باشد. ادعا باید مبتنی بر عدد صحیح n باشد.

ادعا باید به اندازه کافی «صریح» باشد، بدان‌سان که امکان آزمودن اینکه آیا با گذشتن از عدد n به عدد صحیح بلافاصله پس از آن یعنی $n+1$ نیز صحت آن برقرار می‌ماند وجود داشته باشد.

اگر در این آزمایش کامیاب شویم، می‌توانیم تجربه‌ای را که در فرایند آزمایش به‌دست آورده‌ایم مورد استفاده قرار دهیم و چنین نتیجه بگیریم که اگر ادعا برای n صحت داشته باشد برای $n+1$ نیز صحیح است. چون به این حد برسیم، کافی است بدانیم که ادعا برای $n = 1$ صادق است، پس از آن برای $n = 2$ صادق خواهد بود، سپس برای $n = 3$ با گذشتن تدریجی از یک عدد صحیح به عدد صحیح بعدی صحت ادعا برای هر عدد قابل تصور است و بنابراین کلی بودن آن به اثبات می‌رسد.

این فرایند چندان فراوان به‌کار می‌رود که شایسته است نامی به آن بدهیم. می‌توانیم آن‌را «دلیل از n به $n+1$» یا به‌صورت ساده‌تر «عبور به عدد صحیح بعدی» بنامیم. بدبختانه نام اصطلاحی آن «استقراء ریاضی» گذاشته شده است. این نام بنابر اقتضای اوضاع و احوالی اتفاقی به‌وجود آمده است. ادعای معینی که باید به اثبات برسد، از منبعی سرچشمه می‌گیرد و از لحاظ منطقی این مطلب مهم نیست که آن منبع چه بوده باشد. در بسیاری از حالات همچون حالتی که به تفصیل در اینجا مورد بحث قرار گرفت، منبع استقراء است و ادعا به‌صورت تجربی به‌دست آمده است و به همین جهت اثبات همچون مکملی ریاضی برای استقراء تصور شده است و این خود توضیحی برای نام است.

۷. در اینجا نکته دیگری تا اندازه‌ای باریک وجود دارد که برای هر کس خواستار یافتن دلایل اثباتی باشد اهمیت دارد. در آنچه گذشت از طریق مشاهده و استقراء، با دو ادعا، یکی پس از دیگری روبرو شدیم که از اولی در شماره ۱ بحث کردیم، از دومی در شماره ۲؛ دومی دقیق‌تر از اولی بود. با بحث درباره ادعای دوم متوجه امکان عبور از n به $n+1$ شدیم و از این راه توانستیم به دلیلی از طریق «استقراء ریاضی» برسیم هنگام بحث درباره ادعای نخست، با بی‌خبر بودن از صحت و دقتی که با ادعای دوم به آن افزوده می‌شود،

به‌ندرت می‌بایستی بتوانیم به چنین دلیلی دسترسی پیدا کنیم. در واقع، ادعای اول دقت کمتر دارد و «صراحت» و «ملموس» بودن آن اندک است و کمتر از ادعای دوم می‌تواند آزمون‌پذیر باشد. گذشتن از اولی به دومی، و از ادعای کمتر دقیق و صحیح به ادعای دقیق‌تر و صریح‌تر، گام آماده کننده مهمی برای رسیدن به دلیل نهایی بود.

این وضع یک جنبه معمایی و محال‌نما دارد. ادعای دوم محکم‌تر است؛ بلافاصله ادعای اول را شامل می‌شود، در صورتی که ادعای تاحدی «مه‌آلود و مبهم» اولی نمی‌تواند مشتمل بر ادعای «روشن و صریح» دوم باشد. بدین‌گونه دست یافتن به قضیه محکم‌تر آسان‌تر از دست یافتن به قضیه ضعیف‌تر است و محال‌نمای مخترع همین است.

۳-۶ نقش اشکال در حل مسأله

در بسیاری موارد، به‌ویژه مسأله‌های هندسی و حسابان می‌توانیم داده‌های مسأله را با رسم یک شکل نمایش دهیم. رسم شکلی برای مسأله، غالباً ارتباط داده‌ها و مفروضات مسأله را بهتر نمایان می‌سازد. با کار کردن روی شکل بهتر می‌توانیم طرحی برای حل مسأله پی‌ریزی کنیم. رسم یک شکل برای حل مسأله، خود یک راهیابی محسوب می‌شود، لیکن از آنجا که این راهیابی به نظر مهمتر از سایر راهیابی‌ها جلوه می‌کند، آن‌را جداگانه به بحث گذاشته‌ایم. متأسفانه بسیاری از دبیران و حتی استادان ریاضی از رسم شکل برای حل مسأله اکراه دارند. رسم شکل مناسبی برای یک مسأله نه تنها مستلزم تسلط بر موضوع مسأله، بلکه محتاج هنرنمایی معلم در ارائه راه‌حل و برهان مسأله است. تجربیات نشان داده است که وقتی از رسم شکل برای مسأله‌های آنالیز و حسابان استفاده می‌کنیم راه‌حل مسأله آسان‌تر به‌دست می‌آید. ذکر این نکته را نیز باید یادآور شویم که رسم شکل فقط مختص مسأله‌های هندسی و حسابان نمی‌باشد؛ در این موارد به ناچار از رسم شکل هستیم همچنان‌که ارشمیدس برای محاسبه مساحت دایره، به روش افنا، عمل کرد و با رسم چندضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی خطای محاسبه را به‌تدریج کم کرد و در نهایت عدد π را کشف کرد. ایده بسیاری از مسأله‌های مهم مباحث مجردی نظیر جبر مجرد نیز با رسم نموداری برای مسأله آسانتر حاصل می‌شود. در واقع اشکال نه تنها موضوع بحث مسائل هندسی را تشکیل می‌دهند بلکه همچنین کمک مهمی به حل همه‌گونه مسائلی می‌کنند که در آغاز هیچ ارتباطی با هندسه ندارند. دو دلیل عمده برای توجه به اشکال در حل مسائل وجود دارد که ذیلاً توضیح می‌گردد.

۱. اگر مسئله ما یک مسئله هندسی بوده باشد، باید برای آن یک شکل درنظر بگیریم. این شکل ممکن است در ذهن و تخیل ما باشد یا بر روی یک برگ کاغذ ترسیم شده باشد. در پاره‌ای از موارد، بهتر و مطلوب‌تر آن است که شکل را تخیل کنیم بی‌آنکه نمونه‌ای از آن‌را بر روی کاغذ بکشیم، ولی اگر بخواهیم همه جزئیات را یکی پس از دیگری آزمایش کنیم، نمی‌توانیم همه آنها را همزمان در خاطر بگیریم، بلکه ملاحظه آنها پس از آنکه بر روی کاغذ ترسیم شده باشند امکان‌پذیر است. یک کیفیت جزئی که در تخیل ما نقش بسته باشد ممکن است فراموش شود، ولی اگر بر روی کاغذ بیاید باقی می‌ماند و چون به آن بازگردیم ما را به یاد ملاحظات قبلی می‌اندازد و از بعضی از ناراحتی‌هایی که در امر به یاد آوردن ملاحظه قبلی حاصل می‌آید ما را خلاص می‌کند.

۲. اکنون به‌صورت خاص استفاده از شکل‌ها را در مسائل از گونه ساختمان هندسی مورد بحث قرار می‌دهیم. ملاحظه تفصیلی چنین مسئله را با رسم کردن شکلی مشتمل بر مجهول و داده‌ها آغاز می‌کنیم که در آن همه این عوامل بدان‌سان که در صورت مسئله‌ای بیان شده جمع آمده است. برای آنکه مسئله را به‌صورتی مشخص و متمایز بفهمیم، لازم است که هر داده و هر جزء از شرط را جداگانه مورد مطالعه قرار دهیم، سپس همه اجزاء را دوباره به‌هم می‌پیوندیم و شرط را به‌صورت یک کل ملاحظه می‌کنیم و در آن می‌کوشیم که پیوندهای گوناگونی را که مسئله مستلزم آنها است همزمان درنظر بگیریم و آنها را ببینیم. به‌ندرت امکان آن هست که بدون رسم کردن شکل بر روی کاغذ بتوانیم همه این جزئیات را از هم جدا سازیم و بار دیگر آنها را با هم ترکیب کنیم.

از سوی دیگر، پیش از آنکه مسئله را به‌صورت قطعی حل کرده باشیم، امکان اینکه بتوانیم چنین شکلی را ترسیم کنیم مشکوک است. آیا ممکن است با همه شرایط تعیین‌شده در صورت مسئله سازگار باشد؟ پیش از آنکه به جواب قطعی دست یافته باشیم نمی‌توانیم در پاسخ این پرسش «آری» بگوییم؛ با وجود اینکه به رسم کردن شکلی می‌پردازیم و چنان فرض می‌کنیم که در آن ارتباط مجهول با داده‌ها چنان است که صورت مسئله آن‌را بیان می‌کند، چنان به‌نظر می‌رسد که با کشیدن شکل، به ساختن یک فرض بدون تضمین صحت آن پرداخته‌ایم.

نه، چنین نکرده‌ایم. هنگامی‌که مسئله خود را می‌آزماییم، به‌صورت غیرصحیح عمل نمی‌کنیم؛ این امکان را درنظر می‌گیریم که چیزی در آنجا وجود دارد که شرط مقررشده برای مجهول را تأمین می‌کند و با همه داده‌ها، روابط خواسته‌شده را دارد. بدان شرط که امکان محض را با قطعیت اشتباه نکنیم. یک قاضی در آن هنگام که پس از سؤال و جواب با طرف دفاع این فرض را درنظر می‌گیرد که دفاع‌کننده مرتکب جنایت

موضوع بحث شده، در صورتی کارش صحیح است که خود را تسلیم این فرض نکند. ریاضیدان و قاضی هر دو می‌توانند یک امکان را بدون پیش‌داوری مورد ملاحظه قرار دهند، و بیان حکم را برای هنگامی بگذارند که ملاحظه و آزمایش به نتیجه‌ای قطعی رسیده باشد.

حل یک مسئله هندسه ساختمانی را با ترسیم طرحی بر روی کاغذ آغاز کردن که در آن، بنابه فرض، شرط مسئله تأمین شده باشد، به هندسه‌دانان یونانی بازمی‌گردد. در جمله‌ای از پاپوس تا حدی به‌صورتی معمایی به آن چنین اشاره شده است: چنان فرض کن که آنچه انجام دادن آن خواسته شده به همان صورت انجام شده باشد. سفارش ذیل به آن اندازه موجز نیست ولی روشن‌تر است. یک شکل فرضی رسم کن که مفروض چنان است که در آن همه شرط مسئله با همه جزئیات آن تأمین شده است.

این سفارشی در خصوص هندسه ساختمانی است ولی در اینجا نیازی به آن نیست که خود را به این‌گونه مسئله محدود کنیم. ممکن است این توصیه را بر همه «مسائل» یافتنی گسترش دهیم و آن‌را به‌صورت کلی ذیل بیان کنیم: آن وضع فرضی را درنظر بگیر که در آن شرط مسئله بنابه فرض تأمین شده باشد.

۳-۶-۱ چند نکته مهم

اکنون به بحث درباره نکاتی مربوط به رسم عملی اشکال می‌پردازیم.

(I) آیا شکل‌ها را باید درست رسم کنیم یا تقریبی، و این کار با اسباب‌های ترسیم صورت بگیرد یا با دست بدون اسباب؟

هر دو گونه شکل مزایای مخصوص به خود را دارند. اشکال صحیح اصولاً در هندسه همان نقش را دارند که اندازه‌گیری‌های صحیح در فیزیک دارند، ولی در عمل اهمیت اشکال صحیح از اندازه‌های صحیح کمتر است، بدان سبب که قضایای هندسی به‌صورتی گسترده‌تر از قوانین فیزیکی در معرض تحقیق و اثبات قرار می‌گیرند. با وجود این، تازه‌کاران باید بسیاری از اشکال را به اندازه‌ای که می‌توانند صحیح ترسیم کنند تا از این راه یک شالوده خوب تجربی برای ترسیم‌های بعدی خود به‌دست آورند، و اشکال صحیح همچنین ممکن است برای کندکاران وسیله‌ای برای القاء و پیشنهاد کردن قضایای هندسی شود. با این همه، برای استدلال، اشکال که با دقت توسط دست و بدون یاری گرفتن از اسباب‌های ترسیم کشیده شده باشد، معمولاً به اندازه کافی خوب است و ترسیم آنها بسیار سریع‌تر صورت می‌گیرد. البته شکل نباید چنان باشد که بی‌معنی و ناموجه به‌نظر برسد، خط‌هایی که بنابه فرض مستقیم است نباید موجدار کشیده شود، و آنها که دایره را معرفی می‌کند نباید به شکل سیب‌زمینی کشیده شده باشد.

یک شکل نادرست گاه ممکن است القاکننده یک نتیجه نادرست شود، ولی این خطر بزرگ نیست و می‌توانیم به وسایل گوناگون و مخصوصاً با تغییر دادن شکل خود را از شر آن برهانیم. اگر توجه خود را بر روی ارتباط‌های منطقی متمرکز سازیم و این نکته را درنظر بگیریم که شکل یک وسیله کمکی است و به هیچ‌وجه مبنای نتیجه‌گیری‌ها نیست، خطری از جانب شکل متوجه ما نمی‌شود، ارتباط‌های منطقی مبنای حقیقی استنتاج‌ها است. [این نکته به‌صورتی آموزنده توسط بعضی از محال‌نماهای مشهود که در آنها به شکلی زیرکانه از نادرستی عمدی بعضی از اشکال ترسیم شده مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد، مجسم شده است.]

(II) آنچه مهم است این است که عناصر و اجزا در روابط خواسته‌شده جمع آمده باشد، ولی اینکه به چه ترتیب آنها ساخته شده‌اند، اهمیت ندارد. بنابراین همیشه ترتیب مناسب‌تر و راحت را انتخاب کنید. مثلاً، برای مجسم ساختن اندیشه تقسیم زاویه به سه جزء برابر، لازم است زاویه‌های α و β را چنان ترسیم کنید که $\alpha = 3\beta$ باشد. چون کار خود را با یک α که برحسب اتفاق انتخاب کرده‌اید آغاز کنید نمی‌توانید β را با خط‌کش و پرگار به‌دست آورید. بنابراین β را به‌اندازه کافی کوچک انتخاب می‌کنید، که پس از آن ساختن α آسان است.

(III) شکل شما نباید هیچ خصوصیت ناخواسته‌ای را تلقین کند. اجزاء مختلف شکل نباید از ارتباط‌هایی ظاهری خبر دهد که در صورت مسئله خواسته نشده است. در آن‌صورت که خط‌هایی نسبت به یکدیگر برابر یا عمود نیستند نباید به شکلی ترسیم شوند که برابر بودن یا عمود بودن را نمایش دهند. هنگامی که مثلثی بنابه فرض مسئله متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه نیست، نباید به این صورت‌ها ترسیم شود. مثلثی با زوایای $45^\circ, 50^\circ, 75^\circ$ مثلثی است که از خطر قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین جلوه‌گر شدن هر دو مصون است. لذا رسم مثلثی که قائم‌الزاویه یا متساوی‌الساقین به‌نظر برسد گمراه‌کننده خواهد بود. اما اگر بحث شما کلی است می‌توانید مثلثی «کلی» و «بدون تخصیص» بکشید، و در چنین صورتی رسم مثلثی با اضلاع و زاویه‌های دلخواه بلااشکال است.

(VI) برای تأکید درباره نقش‌های متفاوت خطوط مختلف، ممکن است از خط‌های ستبر و نازک یا پر و نقطه‌چین یا از قلم‌های به رنگ‌های متفاوت استفاده کنید. اگر کاملاً تصمیم نگرفته‌اند که خطی را به‌عنوان خط کمکی مورد بهره‌برداری قرار دهید، آن‌را کمرنگ بکشید. می‌توانید اجزاء و عناصر داده شده را با مداد سرخ رسم کنید و رنگ‌های دیگر را برای قسمت‌های مورد تأکید اختصاص دهید، همچون یک جفت مثلث متشابه و نظایر آن.

آیا برای مجسم ساختن اشکال هندسه فضایی باید نمونه‌های سه‌بعدی را به‌کار بریم یا از ترسیم اشکالی بر روی کاغذ استفاده کنیم؟

داشتن نمونه‌هایی سه‌بعدی مطلوب است، ولی ساختن آن پرزحمت و بهای خریدن ساخته‌های آن گران است. بنابراین باید معمولاً به رسم این‌گونه اشکال بر روی کاغذ قانع شویم، هر چند مؤثر و نمایان جلوه‌گر ساختن آنها آسان نیست. مقداری تجربه کردن با نمونه‌های مقوایی خودساخته برای مبتدیان مطلوب و مفید است. اشیاء محیطی زندگی روزانه را برای نمایش مفاهیم و اشکال هندسی مورد استفاده قرار دادن بسیار به فهم این‌گونه چیزها کمک می‌کند. مثلاً یک جعبه یا یک آجر یا کلاس درس ممکن است برای تجسم مکعب مستطیل سودمند واقع شود و چنین است یک مداد برای نمایش استوانه و یک گلدان برای نمایش مخروط ناقص.

(V): اشکال ترسیم‌شده بر روی کاغذ به‌آسانی ساخته می‌شود و به‌آسانی منظور از آنها به‌دست می‌آید و نیز آسان به‌خاطر سپرده می‌شود. مخصوصاً اشکال مسطح برای ما به‌خوبی شناخته شده است و مسائل مربوط به آنها را به‌صورتی خاص در دسترس داریم. ممکن است از این وضع بهره‌گیری کنیم و قابلیت مواجه شدن با اشکال را در مواجهه با اشیاء غیرهندسی مورد استفاده قرار دهیم، به‌شرط آنکه بتوانیم برای اشیاء غیرهندسی یک نمایش هندسی مناسب درنظر بگیریم.

نمایش‌های هندسی و اشکال و نمودارهای گوناگون در همه علوم، و نه تنها در فیزیک و شیمی و علوم طبیعی بلکه در علم اقتصاد و حتی روانشناسی، به‌کار می‌رود. با کاربرد یک نمایش هندسی مناسب، در آن می‌کوشیم که همه چیزها را به زبان اشکال بیان کنیم و هرگونه مسئله را به شکل مسائل هندسه درآوریم.

X بدین‌ترتیب، حتی اگر مسئله شما یک مسئله هندسه نیست، می‌توانید کوشش کنید تا برای آن یک شکل بکشید. یافتن یک نمایش هندسی روشن برای یک مسئله غیرهندسی برداشتن گامی مهم به جانب حل آن مسئله است.

۳-۷ تمرین

۱. یکی از قضیه‌های مهم جبر مجرد قضیه اساسی یک‌ریختی گروه‌ها می‌باشد. همچنان‌که می‌دانیم بیان این قضیه به‌صورت زیر است:

قضیه اساسی:

فرض کنیم G و G' دو گروه و $f:G\to G'$ یک هم‌ریختی گروه با هسته N باشد. در این‌صورت:

$$\frac{G}{N}\cong G'f$$

یعنی گروه خارج‌قسمتی دامنه بر هسته با گروه تصویر یک ریخت است. شکلی برای توضیح شهودی این نتیجه رسم کرده و تشابه آن‌را با عمل تقسیم که در ابتدایی آموخته‌اید تبیین کنید.

قضیه اساسی یک‌ریختی گروه‌ها، بعداً در باب حلقه‌ها و همچنین مدول‌های جبری عیناً بیان و اثبات می‌گردد، با این تفاوت که به‌جای مفهوم هم‌ریختی گروه، هم‌ریختی حلقه و یا هم‌ریختی مدول لحاظ می‌گردد.

۲. اصل ضرب را بیان کرده و برای آن شکلی رسم کنید.

۳. (قضیه) فرض کنیم F تابعی پیوســـته و مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشد. نقطه‌ای مانند $a<c<b$ هست که مماس در نقطه به طول C موازی وتر مار بر نقاط به طول A و B می‌باشد. شکلی برای این مسأله رسم کنید. سپس استدلال درستی مسأله را با عنایت به شکل راهیابی کنید.

۴. فرض کنیم تابع F بر $[a,b]$ پیوســـته و لذا انتگرال‌پذیر باشـــد. در مورد مقدار انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ چه می‌توان گفت؟ با رسم شکل توضیح دهید. سپس آن‌را ثابت کنید!

۳-۸ راهیابی‌های حل مسأله

در این بخش تکنیک‌ها و ابتکارهای معمول برای حل مســـائل ریاضی را که از آن به‌عنوان «راهیابی» نامبرده می‌شـــود، تشـــریح می‌گردد. طی پژوهش‌ها و مطالعات ریاضی، ســـالیانه بیش از ۱۰۰،۰۰۰ قضیه و مسأله جدید ریاضی کشـــف می‌گردد. این در حالی اســـت که هرگاه بخواهیم وضعیت ریاضیات کلاسیک حاضر را در شـــاخه‌های گوناگون به حســـاب بیاوریم، خواهیم دید که حداقل یک میلیارد از مســـائل فهرست‌شده در عالم ریاضیات وجود دارد. خوشـــبختانه این‌گونه نیســـت که هر مســـأله ریاضی راه‌حلی مستقل و مخصوص به خود داشـــته باشـــد، اگرچه این‌گونه بود، آموزش و یادگیری ریاضیات امری ناممکن و غیرمســـتعمل جلوه می‌کرد. شگردها و روش‌های برخورد با مسأله‌های ریاضی گوناگون محدود و شناخته‌شده هستند. در این بخش به اهم این راهیابی‌ها اشـــاره می‌کنیم. باید این نکته را نیز متذکر شـــویم **که حل مسأله ریاضی مستلزم تمرین و ممارست و احاطه به محتوای موضوعی مربوطه می‌باشد.** در کنار تسلط به محتوای ریاضی مربوط است که آشـــنایی با این راهبردها و راهیابی‌ها می‌تواند بســـیار سودمند افتد. در این رابطه به نقل گفته‌ای از بولسانو (۱۸۴۸-۱۷۸۱) منطقی و ریاضیدانان که ســـهم عمده‌ای از کتاب منطقی شناخت‌شناســـی خود را به موضوع راهیابی اختصاص داده است می‌پردازیم.

«من اصلاً چنان نمی‌اندیشم که بتوانم در اینجا روشی از پژوهش و تحقیق را ارائه دهم که مدت‌های طولانی پیـــش از این به‌نظر مردمان هنرمند و ریاضیدانان قبلی نرســـیده باشـــد، و اصـــلاً چنین وعده‌ای نمی‌دهیم که بتوانیـــد در ایـــن کتاب چیز کاملاً تازه‌ای از این‌گونه پیدا کنید. ولی زحمـــت بیان این مطلب را بر خود هموار می‌ســـازم که قواعد و راه‌های تحقیقی را که همه مردان شایســـته از آن پیروی کرده‌اند، و غالباً حتی آگاهی از

این پیروی نداشته‌اند، با کلماتی روشن بیان کنم. با آنکه از این پندار فارغم که باید حتی در انجام این کار به کامیابی برسم، امید آن داریم اندکی که در اینجا ارائه شده بتواند مطبوع خاطر بعضی از مردمان بشود و بعداً مورد استعمالی پیدا کند.»

۳-۸-۱ به مجهول نگاه کنید:

این یک اندرز قدیمی اســت. در حل بســیاری از مسأله‌های ریاضی، توجه به مجهول خود راهنمای حل است. بســیاری از دانش‌آموزان و دانشــجویان از این نظر «حل یک مســأله یا قضیه ریاضی عاجزند، که توجهی به مجهــول ندارند، یا آنکه به درســتی نمی‌دانند به دنبال چه باید باشــند. در ادبیــات یادگیری ریاضیات، غالب معلمین باوجدان این توصیه‌ها را به شاگردان خود می‌کنند.»

به پایان نگاه کن

منظور خود را به خاطر داشته باش

هدف را فراموش مکن

درباره چیزی بیندیش که می‌خواهی آن‌را به چنگ آوری

چشم از چیزی که مطلوب است برمتاب

آنچه را که برای آن تلاش می‌کنی از یاد مبر

به مجهول نگاه کن. (برای مسائل یافتنی)

به نتیجه نگاه کن (برای مسائل ثابت‌کردنی)

بدین‌ترتیب با متمرکز ســاختن توجه خود بر روی هدف و معطوف داشــتن اراده به جانب آن، در صدد یافتن راه‌ها و وســایلی برای رســیدن به هدف و مقصود برآییم. اما وسایل رسیدن به این هدف چیست؟ این ایده‌ها به ذهن متبادر می‌گردد:

- چگونه می‌توانیم نتیجه‌ای از این‌گونه به‌دست آوریم؟
- از کدام سبب‌ها این نتیجه حاصل می‌شود؟
- در کجا دیده‌ایم چنین نتیجه‌ای به‌دست آمده باشد؟
- آیا مسأله‌ای مشابه با همین مجهول را به خاطر می‌آوریم؟
- آیا قضیه‌ای آشنا سراغ داریم که همین نتیجه یا نتیجه‌ای مشابه آن دربرداشته باشد؟

شناخت واژه‌های کلیدی در حل و درک مسأله نقش اساسی دارد.

واژه‌های کلیدی اشــاره به مفاهیم بنیادی دارند که مســأله در خصوص ارتباط این مفاهیم طراحی شده است. قطعاً بدون درک درســت مفاهیم وابسته به واژه‌های کلیدی درک مسأله میسر نمی‌باشد؛ و بدون آنکه ادراک درستی از مسأله داشته باشیم نباید انتظار یافتن راه‌حلی برای آن داشته باشیم.

بیشــتر دانش‌آموزان و دانشــجویانی که برای حل یک مســأله به معلم خود مراجعه می‌کنند، وقتی از آنها در خصوص تعریف مفاهیم مسأله پرسش می‌کنیم بی‌جواب می‌مانند.

در مقاله‌های علمی مرســوم اســت که واژه‌های کلیدی آن در آغاز مقاله ذکر گردد، تا کســانی که می‌خواهند مقاله را مطالعه کنند، راهنمایی شوند که ابتدا باید تعاریف واژه‌های کلیدی را جستجو کرده و آنها را به‌درستی درک کنند.

اکنون به‌عنوان نمونه مســأله‌هایی که در آن راهیابی «نگاه به مجهول» بیشتر کارساز است حل می‌کنیم. حل این مسأله جنبه تشریحی و آموزشی دارد.

مسأله ۱ (آنالیز ۲ رشته ریاضی):

فرض کنید توابع f و g بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار باشند. ثابت کنید تابع gf بر $[a,b]$ نیز با تغییر کراندار بوده و

$$v_{fg} \le M_1 v_f + M_2 v_g \qquad (۱-۳)$$

که در آن M_1 و M_2 به‌ترتیب سوپرموم $|g|$ و سوپرموم $|f|$ بر بازه $[a,b]$ اند.

حل: ابتدا با تحلیلی ســاده مجهول مسأله را مشخص می‌کنیم. (مجهول چیست؟) اینکه تابع حاصل‌ضرب gf با تغییر کراندار اســت، یعنی با نمادهای معمولی. $\sum(P)$ برای هر افزار P، محدود به یک کران بالاست و اینکه سوپرموم این اعداد نیز نابیشتر از $M_1 v_f + M_2 v_g$ است؛ و این مجهول دیگر مسأله است که به‌صورت یک نامساوی عرضه شده است. $\sum(P)$ را برحسب تابع gf می‌نویسیم:

$$\sum(P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta(fg)_k|$$

بنابراین به محاسبه $\Delta(fg)_k$ می‌پردازیم.

$$\Delta(fg)_k = f(x_k)g(x_k) - (f(x_{k-1})g(x_{k-1})$$

نموهای توابع f و g را در سمت راست ظاهر می‌کنیم. چرا؟ نامساوی (۳-۱)، یعنی مجهول مسأله درگیر v_f

و v_g است، $(v_g)v_f$ نیز حاصل‌جمع قدرمطلق‌های این نموها است. (نگاه به مجهول):

$$\Delta(fg)_k = f(x_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))-g(x_{k-1})(f(x_k)-f(x_{k-1}))$$
$$= f(x_k)\Delta g_k - g(x_{k-1})\Delta f_k$$

اما $\sum(P)$ ها درگیر قدرمطلق نموها هستند:

(۳-۲)

$$|\Delta(fg)_k| \le |f(x_k)||\Delta g_k| + |g(x_{k-1})||\Delta f_k|$$

نگاهی دیگر به مجهول، راهنمای کار است:

$|f(x_k)| \le M_2$ همواره

$|g(x_k)| \le M_1$ همواره

لذا (۳-۲) می‌شود:

$$|\Delta(fg)_k| \le M_2|\Delta g_k| + M_1|\Delta g_k|$$

از جمع نامساوی‌ها نتیجه می‌شود:

$$\sum \le M_2\sum + M_1\sum$$

نگاهی دیگر به مجهول و استفاده از مفاهیم تمام‌کننده محاسبات و رسیدن به مجهول است.

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta(fg)_k| \le M_2 v_g + M_1 v_f$$

طرف دوم عددی است ثابت و این بیانگر آن است که تابع gf با تغییر کراندار است. با سوپرموم‌گیری نیز تغییر کلی این تابع جایگزین شده و نامساوی (۳-۱) حاصل می‌شود.

مسأله ۲ (نظریه مجموعه‌ها):

برای هر دسته از اعداد حقیقی a , b , c و d ثابت کنید: $[a,b]\sim[c,d]$

یعنی مجموعه نقاط یک پاره‌خط به طول $b-a$ با مجموعه نقاط یک پاره‌خط به طول $d-c$ هم‌ارز است. (یکی است) [مبانی ریاضیات، حساب اعداد اصلی].

حل: هم‌ارزی دو مجموعه به چه اعتباری برقرار است؟

مفهوم هم‌ارزی مستلزم آن است که تابعی ۱-۱ و پوشا، یعنی دوسویی، بین دو مجموعه برقرار باشد. با این

توضیحات: مجهول چیست؟

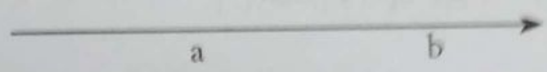
تابعی مانند f پیدا کنیم که:

$$f:[a,b]\to[c,d]$$

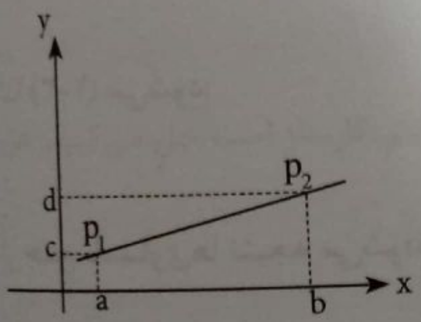
و f دوسویی باشد. پس دامنه و همدامنه f معلوم است. چه چیزی از f مجهول است؟ ضابطه f را باید تعریف کنیم چگونه؟ چیزی (جز دامنه و همدامنه) در دست نداریم. چگونه ضابطه f را بسازیم؟ (به مجهول بار دیگر نگاه می‌کنیم)

f باید دوسویی باشد. آیا می‌توانیم شکلی برای مسأله تصور کنیم؟

هر بازه از اعداد نظیر یک پاره‌خط روی محور خط حقیقی است. آیا این کمکی می‌کند؟



سپس هدفمان «جور کردن» نقاط بازه $[a,b]$ با نقاط بازه $[c,d]$ است. شاید بتوانیم با یک محور اعداد این کار را انجام دهیم ولی ظاهراً از دو محور (عمود) استفاده کنیم مناسب‌تر است:



طبیعی‌تر آن است که نقطه **a** را متناظر نقطه c و نقطه **b** را متناظر نقطه **d** بدانیم. اما چگونه؟ از نقطه به طول **a** عمودی بر محور **x** و از نقطه به عرض c عمودی بر محور **y** رسم می‌کنیم. لذا نقطه P_1 در صفحه مختصات به مختصات $(a\,,\,c)$ حاصل می‌شود. همین کار را برای یافتن نقطه P_2 به مختصات $(b,\,d)$ انجام می‌دهیم.

اما بعد؟

مجهول چیست؟

جور کردن نقاط بازه $[a,b]$ با نقاط بازه $[c,d]$.

نقاط P_1 و P_2 را به‌هم وصل می‌کنیم. خط (Δ) حاصل می‌شود. معادله این خط چه نقشی دارد؟

معادله هر خط رابطه بین مختصات نقاط آن یعنی رابطه بین **x** و **y** است. اما $x\in[a\,,\,b]$ و $y\in[c,d]$ و این یعنی جور کردن نقاط $[a,b]$ با نقاط $[c,d]$. (به فصل ۴ همین کتاب صفحه ۱۲۹ و ۱۳۰ مراجعه شود.)

اما معادله (Δ) چگونه است؟ معادله خط راستی که دو نقطه آن معلوم است.

$$\frac{y-c}{x-a}=\frac{d-b}{c-a}$$

$$y=\frac{d-b}{c-a}x-a\frac{d-b}{c-a}+c$$

برای آسانی، $\frac{d-b}{c-a}=m$ می‌نامیم.

$$y=mx-am+c$$

ولی می‌توانیم y را که وابسته به x است، به $f(x)$ نشان دهیم:

$$f(x)=mx-am+c$$

این فرمول را ضابطه f می‌گیریم، به‌آسانی معلوم است که f یک تابع است، یک به یک بودن و پوشا بودن آن نیز به‌آسانی ثابت می‌شود. به‌علاوه وقتی $a\le x\le b$، $a\le f(x)\le d$ (چرا؟)

پس تحدید این تابع به دامنه $[a,b]$ یک تابع دوسویی بر این مجموعه به روی مجموعه $[c,d]$ تعریف می‌کند. چیزی که در تعقیب آن بودیم.

در حل این مسأله، توجه داریم که:

توجه به مجهول، خود راهنمای حل مسأله است

تبصره: بسیاری از مسأله‌های مهارتی- مفهومی کلاسیک آشنا، براساس «نگاه به مجهول» به‌آسانی حل و فصل می‌شوند. در دنباله این بحث، به‌عنوان چندین قضیه (مسأله) از ریاضیات کلاسیک را حل تشریحی می‌کنیم.

مسأله ۳ ([۸] ق ۱ . ۲ . ۱۱):

فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و α بر $[a,b]$ پیوسته باشد. ثابت کنید $f\in R(\alpha)$.

حل: مسأله به ظاهر یک مسأله ثابت‌کردنی است. با یک تحلیل ساده متوجه می‌شویم که مسأله را می‌توان یک مسأله یافتنی نیز تلقی کرد. برای اینکه ثابت کنیم $f\in R(\alpha)$ می‌توانیم به چندین محک و ضابطه متوسل شویم. ابتدا محک ریمان (شرط ریمان) را انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم f و α در شرط منطقی زیر صدق می‌کنند:

$$\forall\varepsilon\exists P_\varepsilon\forall P(P_\varepsilon\subseteq P\Rightarrow U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon)$$

$\varepsilon>0$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. بنابراین باید افرازی مانند P_ε پیدا کنیم که برای هر افراز $P_\varepsilon\subseteq P$.

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon \qquad (*)$$

لذا ملاحظه می‌کنیم که در اینجا مسأله به یک مسأله یافتنی تبدیل یافته است. مجهول چیست؟ افرازی مانند P_ε که در شرایط بالا صدق کند. چگونه P_ε را پیدا کنیم؟

اندکی محاسبه راهنمای است:

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{1}^{n}M_i\Delta\alpha_i-\sum_{i}^{n}m_i\Delta\alpha_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i$$

که در آن M_i سوپرموم و m_i اینفیموم تابع f بر بازه جزء i ام است. برای چه افرازی؟ محاسبه فوق برای هر افرازی است.

پس افرازی باید پیدا کنیم که برای آن افراز و هر افراز ظریف‌تر از آن.

$$\sum_{i=n}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i<\varepsilon$$

باشد، مفروضات مسأله چه کمکی می‌تواند بکند؟

تابع f بر $[a,b]$ پیوسته است. لذا پیوسته یکنواخت است. تابعی که پیوسته یکنواخت باشد می‌تواند دامنه نوسانات مقادیر آن، مشروط به کوچک کردن دامنه تغییرات x ها، به دلخواه کوچک شود:

$$\forall\varepsilon_1\exists\delta\forall x\forall y(|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon_1) \qquad (**)$$

(**به نقش درک مفهوم توجه کنید.**) چه ارتباطی بین M_i-m_i و $|f(x)-f(y)|$ها وجود دارد؟ (سنتز)

طبق قضیه‌ای که از قبل داشتیم:

$$M_i-m_i=\sup_{x,y\in I_i}|f(x)-f(y)|$$

به [ص۸] رجوع کنید.

لذا طبق (**)، I_i را چنان می‌گیریم که $|I_i|<\delta$. در نتیجه برای هر $|x-y|<\delta, x,y\in I_i$.

پس طبق (**)،

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon_1$$

در نتیجه:

برای هر i، $M_i - m_i \le \varepsilon_1$

در $\Delta\alpha_i$ ضرب و جمع می‌کنیم،

$$\sum_{1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\alpha_i \le \varepsilon_1 \sum_{1}^{n}\Delta\alpha_i = \varepsilon_1(\alpha(b) - \alpha(a))$$

برای آنکه از همه این محاسبات استفاده کنیم (برقرار باشند) باید افراز P_ε را چنان درنظر بگیریم که $|P_\varepsilon| < \delta$. این نامساوی بالبداهه، نامساوی‌های

برای هر i، $|I_i| < \delta$

را تضمین می‌کند. در نتیجه:

$$U(P, f, \alpha) - L(P_\varepsilon, f, \alpha) \le \varepsilon_1(\alpha(b) - \alpha(a))$$

سنتز کرده و جمع‌بندی $\varepsilon > 0$ مفروض است. نظیر ε_1 که وابسته به ε است، به‌دلیل پیوستگی یکنواخت δ ی مربوط وجود دارد. برای چنین δ، افراز P_ε انتخاب می‌شود که $|P_\varepsilon| < \delta$. بدیهی است برای هر افراز $P \subseteq P_\varepsilon$، چون

$$U(P, f, \alpha) - L(P_\varepsilon, f, \alpha) \le U(P_\varepsilon, f, \alpha) - L(P_\varepsilon, f, \alpha)$$

کافی است:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(\alpha(b) - \alpha(a))}$$

اختیار شود. افراز نظیر ε_1، جواب (مجهول) مسأله است.

۳-۹ تمرین

۱. قضیه ۱. ۵. ۶ ص [۸] را حل تشریحی کنید.

۲. قضیه هیچه/ رتبه مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی را حل تشـریحی کنید. مجهول را در هر مرحله مشخص کنید:

هرگاه:

$$T : V \to W$$

یک تبدیل خطی از فضای برداری V با بعد متناهی **n** باشد،

$$\dim \ker(T) + \dim(\operatorname{im}(T)) = \dim V$$

۳. فرض کنیم G و G' دو گروه (ضربی) و $f:G\to G'$

یک هم‌ریختی پوشـای گروه باشـد، یک گروه خارج‌قسمتی از G بسازید که با G' یک ریخت باشد (ساختار خود را به تفصیل) توضیح دهید.

۴. فرض کنیم f تابعی پیوسته و مثبت بر $[a,b]$ باشد. همچنین

$$M=\sup\{f(x)\mid a\le x\le b\}$$

ثابت کنید

$$M=\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}}$$

راهیابی‌های حل مسأله را در هر مرحله توضیح دهید.

۵. مسأله ۴ را تعمیم دهید.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)\varphi(x)dx\right]^{\frac{1}{n}}=M$$

که φ یک تابع انتگرال‌پذیر دلخواه است.

۶. فرض کنیم f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ بوده و

$$f(a)f(b)<0$$

ثابت کنید نقطه‌ای مانند $a<c<b$ است به قسمی که $f(c)=0$

راهیابی‌های به‌کار گرفته‌شده را در حل خود توضیح دهید. (قضیه بولزانو- آنالیز ۱)

۷. (مسـأله پروژه‌ای). ما در بخش ۳-۷-۱ و قبل از آن برخی از مهمترین راهیابی‌های حل مسـأله را ذکر کرده‌ایم. مجدداً فهرسـتی از این راهیابی‌ها را تهیه کنید. ضمن بررسـی و مطالعه پروژه‌ای، پرسش از سایر دانشجویان، دبیران، استادان و یا تجزیه و تحلیل راه‌حل‌ها و راهیابی‌های مسأله‌های گوناگون، این فهرست را کامل‌تر کرده و با مدرس خود در میان بگذارید.

۳-۹-۱ مسأله‌های چالشی:

مسـأله‌های چالشـی به مسـأله‌هایی اطلاق می‌شـود که در نظر اول، راهیابی خاصی نمی‌توان برای حل آنها پیشنهاد کرد. در برخی موارد فرض و مجهول مسأله با هم تلفیق و پنهان شده است. در این بخش ضمن طرح و حل تشریحی برخی از این مسأله‌ها، راهیابی‌های حل آنها را تا حدودی روشن می‌کنیم.

به‌عنوان نمونه از مسأله‌های چالشی موارد ذیل را ذکر می‌کنیم:

الف) پیدا کنید

$$\left[\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\frac{۳}{۴!}+\cdots+\frac{n}{(n+۱)!}\right]$$

ملاحظه می‌کنید که مفروضات در عبارت مورد بحث وجود دارد که خود نقش مجهول را داراست.

ب) پیدا کنید

$$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\cdots+n(n+۱)$$

ج) هرگاه $\{a_i\}_{i=۱}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد، برای هر عدد طبیعی n

$$\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}\leq\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}$$

به عبارت دیگر $G\leq M$ که در آن G میانگین هندسی و M میانگین عددی n عدد می‌باشد.

د) برای هر x :

$$|\cos x+\sin x|\leq\sqrt{۲}$$

مسأله‌های چالشی مسأله‌های آموزشی معمولی نیستند و در جهت طراحی آزمون‌های مدرسه‌ای در انتخاب آنها باید احتیاط کرد. لکن به‌عنوان مسأله‌های مسابقه هفتگی یا مسابقات بین مدرسه‌ای، منطقه‌ای و ملی مناسب‌تر است.

برای نمونه حل برخی از مسأله‌های فوق را تشریح می‌کنیم:

الف) عبارت مورد محاسبه را A_n می‌نامیم:

$$A_n=\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\frac{۳}{۴!}+\cdots+\frac{n}{(n+۱)!}$$

انتخاب نماد، به‌ویژه نماد مناسب، برای حل مسأله‌ها و عبارت‌ها کار محاسبات نوشتاری را سهل‌تر و تفکر نمادی را تسهیل می‌کند. به طرفین عبارت

$$B_n=\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}+\frac{۱}{۵!}+\cdots+\frac{۱}{(n+۱)!}$$

را اضافه می‌کنیم (چرا؟)

$$A_n + B_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \frac{5}{5!} + \cdots + \frac{n+1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$A_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

در نتیجه:

$$A_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

ب) ابتدا می‌توانیم با عدد n به‌دنبال یک الگو بگردیم:

$T_1 = 2$

$T_2 = 8$

$T_3 = 20$

$T_4 = 40$

$T_5 = 70$

ملاحظه می‌کنیم که این روش جستجو برای الگو دارای محدودیت‌های خاص خود می‌باشد و هیچ الگویی، حداقل در موارد اولیه، ظاهر نمی‌گردد.

در اینجا به روش «خطای اجباری» اقدام می‌کنیم، روشی که از آن می‌توانیم به‌عنوان راهیابی **«خطای اجباری»** نیز یاد کنیم.

چگونه؟ چرا؟

چگونه می‌توانیم از این حقیقت که جملات متوالی عبارت دارای عامل مشترک هستند استفاده کنیم؟

اقدام به نوشتن می‌کنیم:

$$T_n = 2(1+3) + 3(2+4) + 4(3+5) + \cdots + n((n-1)+(n+1)) \qquad (*)$$

البته این یک تساوی نادرست است. برای مثال جمله ۳ × ۲ دو بار نوشته شده است. همچنان‌که جملات ۴×۳ و بقیه نیز چنین‌اند. تنها جمله‌هایی که دو بار رخ نداده‌اند، جمله اول و جمله آخر هستند.

بنابراین در حالی‌که تأکید می‌داریم که تساوی (*) غلط می‌باشد، این تساوی‌گونه مبین ایده‌ای برای ما می‌باشد.

از اشتباهمان یاد می‌گیریم.

یک‌بار دیگر می‌نویسیم:

$$۲(۱+۳)+۳(۲+۴)+۴(۳+۵)+\cdots+n[(n-۱)+(n+۱)]$$

$$=۲[۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\cdots+n(n+۱)]-۱\times۲-n(n+۱)$$

پس با تفاضل ۲×۱ و $n(n+۱)$ از تساوی (*) یک تساوی صحیح به‌دست آوردیم. بنابراین داریم:

$$۲\times۴+۳\times۶+۴\times۸+\cdots+n\times۲n=۲T_n-۲-n(n+۱)$$

به عبارت دیگر:

$$۲[۲^۲+۳^۲+۴^۲+\cdots+n^۲]=۲T_n-(n^۲+n+۲) \qquad (**)$$

اما حاصل‌جمع سمت چپ، حاصل‌جمعی است که ما آن‌را از قبل می‌شناسیم:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{۲n^۳+۳n^۲+n}{۶}$$

از این‌رو

$$۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{۲n^۳+۳n^۲+n-۶}{۶}$$

که با جایگزینی این در (**) به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۲n^۳+۳n^۲+n-۶}{۳}=۲T_n-(n^۲+n+۲)$$

با حل این برای T_n:

$$T_n=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$$

و این پایان برهان ما است.

۱. حاصل‌جمع زیر را محاسبه کنید.

$$۱\times۲\times۳+۲\times۳\times۴+۳\times۴\times۵+\cdots+n(n+۱)(n+۲)$$

۲. کدامیک از دو عدد

$$\alpha=(۱+۰/۰۰۰۰۰۱)^{۱,۰۰۰,۰۰۰},۲$$

بزرگتر است؟

۳. کدامیک از دو عدد

$$۱۰۰۰^{۱۰۰۰},۱۰۰۱^{۹۹۹}$$

بزرگتر است؟ (راهنمایی: نامساوی برنولی)

۴. k یک عدد صحیح مثبت است. حساب کنید.

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{(k-۱)k}+\frac{۱}{k(k+۱)}$$

۵. θ یک زاویه دلخواه است. ثابت کنید

$$\cos\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۴}\cos\frac{\theta}{۸}=\frac{\sin\theta}{۸\sin(\theta/۸)}$$

۶. ثابت کنید

$$\sum_{k=۱}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{nx}{۲}\cos(n+۱)\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

۷. مسأله‌های (ج) و (د) صفحه ۱۳۳ را به طور تشریحی حل کنید.

۸. سرگرمی ریاضی: توضیح دهید که جدول‌های (۲) و (۳) چگونه از جدول مربعی (۱) به‌دست آمده‌اند.

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

۲)

۷	۵	۳
۲	۹	۴
۶	۱	۸

۳)

۹	۴	۲
۱	۸	۶
۵	۳	۷

۳-۱۱ مدل پولیا

جرج پولیا برای حل یک مسأله ریاضی چهار مرحله قائل شده است که می‌بایست به‌ترتیب انجام گیرد تا مسأله حل گردد. ابتدا این چهار مرحله را به اختصار شرح می‌دهیم و ارتباط نموداری آن‌را که به مدل پولیا مشهور است ارائه خواهیم داد.

مرحله اول- ادراک مسأله:

درک درست یک مسأله شرط لازم و اساسی برای فکر کردن در جهت حل مسأله است. قطعاً وقتی قادر به حل یک مسأله می‌شویم که قبل از آن درک درستی از مفاهیم مسأله، مفروضات آن و مجهول مسأله داشته باشیم. با مطالعه مکرر محتوای مسأله و مراجعه به مطالب قبلی، قضیه‌ها و تعاریف در صورت نیاز، از دانش‌آموزان می‌خواهیم که مسأله را به‌درستی درک کنند. به زبان نمادی و یا زبان ساده محاوره‌ای آن‌را بیان کنند. باید بتوانیم مسأله‌ای را که به زبان نمادی بیان شده است، به زبان مادری خود نیز بیان کنیم؛ برعکس مسأله‌ای را که به زبان کلامی عرضه شده است، به زبان نمادی بیان کنیم. در حالت اخیر انتخاب حروف و متغیرهای مناسب برای داده‌ها و مجهول یا مجهولات مسأله بسیار ضروری است. مرسوم است که از حروف آخر انگلیسی برای مجهولات و حروف آغازین آن برای داده‌ها استفاده گردد. یک درک عمیق از محتوای مسأله به‌قدری اهمیت دارد که برخی آن‌را هم‌ارز «میانه‌راه» برای حل کامل مسأله تلقی کرده‌اند.

مرحله دوم- تهیه طرحی برای حل مسأله:

ضمن درک درست مسأله و شناختی که از زمینه مسأله دریافت می‌کنیم، راهیابی‌هایی را برای حل مسأله جستجو کرده تا به یک ایده‌ای برای حل مسأله دست یابیم. از این ایده اولیه، به‌عنوان طرح یاد می‌کنیم. چنین طرحی ممکن است چنان باشد که با اجرای اجزای آن به حل مسأله نایل شویم یا آنکه پس از اجرا

متوجه شویم که طرحمان ارتباط چندانی با حل مسأله ندارد، و یا آنکه ارتباط با حل مسأله داشته لکن نیازمند تغییر و تبدیل می‌باشد.

مرحله سوم- اجرای طرح:

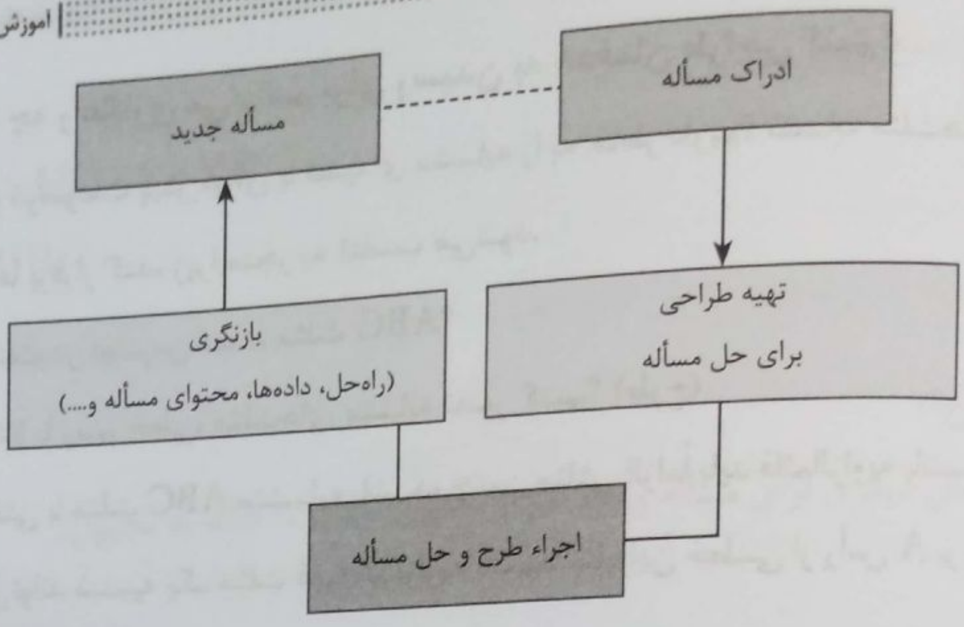
وقتـی الگـو یا طرح مورد نظرمان را به‌کار می‌گیریم این فرصت به‌دسـت می‌آید تـا اوضاع و موقعیت داده‌ها، ارتباط آنها را بهتر متوجه شـد. و در صورتی‌که طرح مناسـب حل مسـأله باشد منجر به حل مسأله می‌گردد. در صورتی‌که اجرای طرح به حل مسـأله منجر نگردد، به ناچار از تعویض طرح، تغییر و اصلاح آن اقدام کرده و ضمن به‌کارگیری الگوها و راهیابی‌های دیگری در واقع طرح جدیدی برای حل مسـأله ساماندهی می‌کنیم. طرح جدید را اجرا می‌کنیم، یا آنکه به حل مسأله نایل می‌شویم و یا بار دیگر مجبور می‌شویم آن‌را اصلاح و یا طرحی نو دراندازیم. این فرایند آنقدر ادامه می‌یابد تا به حل مسأله منجر گردد. انگیزه کافی برای حل مسأله، اراده لازم و پشـتکار کافی سـرمایه هر کس برای حل مسأله مورد نظر می‌باشد، **و این واقعیت خاص مسأله ریاضی نمی‌باشد، بلکه در مواجهه با هر مسأله دیگری صحت دارد.**

مرحله چهارم- بازنگری:

با حل یک مسـأله کار پایان نمی‌یابد. بازنگری فرایند حل مسـأله به دانش‌آموزان فرصت می‌دهد تا به تقویت مهارت‌هایی بپردازند که ممکن اسـت برای حل مسـأله‌های دیگر مفید واقع شوند. به‌عنوان مثال، فهرستی از راه‌های متنوع حل مسـأله و ضبط اطلاعات به‌طور نظام‌دار که فرصت دیدن راهیابی‌ها و الگوهای جدید را به دانش‌آموز بدهد برای حل مسأله و مسأله‌های دیگر بسیار مفید می‌باشد.

بازنگری حل مسأله می‌تواند منجر به طرح و خلق مسأله‌ای دیگر شود، مسأله‌ای که ممکن است تعمیمی از مسأله اولیه بوده باشد و یا آنکه با اطلاعات و داده‌های دیگری طراحی گردد. در صورت طراحی چنین مسأله‌ای، مرحله‌های اول، دوم و سوم، برای مسأله جدید اتفاق می‌افتد و در واقع دور جدیدی شروع می‌شود که آن‌را «**لوپ حل مسأله**» یا «**لوپ یادگیری**» می‌نامیم.

بسـیاری از مسأله‌های ریاضیات کلاسـیک به‌دنبال هم و در جریانی شبیه «لوپ یادگیری» سیر تکاملی خود را پیموده‌اند. مسأله‌های پژوهشی که دانشجویان تحصیلات تکمیلی بدان مشغولند ماهیتاً به‌دنبال مسأله‌های حل‌شـده‌ای بازنگری شـده‌اند که در خور مطالعه و پژوهش می‌باشـند. ذیلاً مدل جرج پولیا برای حل مسأله، به‌همراه لوپ آن (تکرار دور) نمایان شده است.



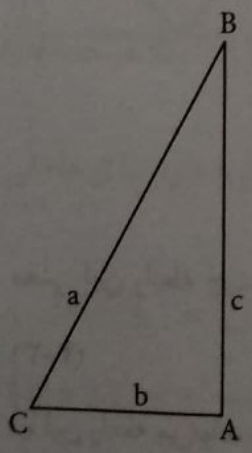
لوپ حل مسأله- مدل خلق ریاضیات نو

اکنون به حل یک مسأله از ریاضیات کلاسیک می‌پردازیم. به خاطر داریم که هر قضیه ریاضی نیز یک مسأله می‌باشد، مسأله‌ای که کاربردهای بیشتری در ریاضیات و سایر دروس دارد.

۳-۱۱-۱ مسأله (قضیه فیثاغورث):

ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر است.

حل: قطعاً ناچاریم که شـــکلی برای مســـأله تصور کنیم. مسأله ما یک مسأله ثابت کردنی و یک حکم کلی در خصوص هر مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد. بنابراین یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه رسم می‌کنیم.



طول وتر را به a، ضلع مقابل به زاویه C را به c و ضلع مقابل به زاویه B را به b نشان می‌دهیم. (نمادگذاری)

مجهول چیست؟ یک رابطه بین طول اضلاع مثلث، یعنی رابطه‌ای بین a , b و c که در حکم مسأله عرضه شده است:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{۳-۳}$$

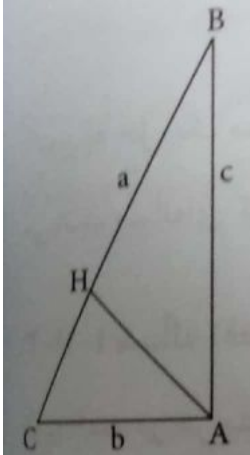
(درک مسأله) چه راهکاری می‌توانیم برای رسیدن به هدفمان طراحی کنیم؟

زمینه مسأله و موضوعات پیش از آن یا قضیه‌ای مشابه را به خاطر داریم؟ تشابه مثلث‌ها می‌تواند رابطه‌ای طولی در مثلث‌ها برقرار کند، زیرا منجر به تناسب می‌شود.

اما، فقط یک مثلث در دسترس است، مثلث ABC؟

آیا می‌توانیم، مثلاً با رسم خطی، مثلث‌های متشابه تصور کنیم؟ (طرح)

اگر بخواهیم مثلثی با مثلث ABC متشابه باشد، چنین مثلثی الزاماً باید قائم‌الزاویه باشد؛ زیرا یک مثلث قائم‌الزاویه نمی‌تواند شبیه یک مثلث غیرقائم‌الزاویه باشد. بنابراین خطی از رأس A بر ضلع مقابل عمود می‌کنیم، یعنی ارتفاع وارد بر وتر را رسم می‌کنیم:



دو مثلث AHC ، ABC چگونه‌اند؟

متشابه‌اند. زیرا هر دو قائم‌الزاویه بوده و در یک زاویه C مشترکند. نسبت اضلاع متناظر برابرند:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{HC}$$

$$BC\times HC=\overline{AC}^{2}$$

معنی این رابطه چیست؟ مربع ضلع CA برابر حاصل‌ضرب طول وتر در تصویر CA روی وتر (طول CH) (۳-۴)

$$b^{2}=a\times HC$$

آیا این رابطه می‌تواند برای برقراری تساوی (*) به‌کار آید؟ (مسأله کمکی) در مورد سایر مثلث‌ها چه می‌توان گفت؟ وضعیت قبل در مورد مثلث‌های قائم‌الزاویه BHA و CBA نیز صادق است. دو مثلث متشابه بوده و با نوشتن تساوی نسبت‌ها رابطه‌ای نظیر ۳-۵ به‌دست می‌آوریم:

(۳-۵)

$$c^{2}=a\times HB$$

اگر ۳-۴ و ۳-۵ را جمع کنیم، شاید

$$b^2+c^2=a\times HC+a\times HB$$

$$=a(HC+HB)$$

$$b^2+c^2=a\times a=a^2$$

(اجرای موفق طرح؟)

بازنگری: آیا راه‌حل دیگری برای مسأله وجود دارد؟ حکم ما چیست؟ (نگاه به مجهول)

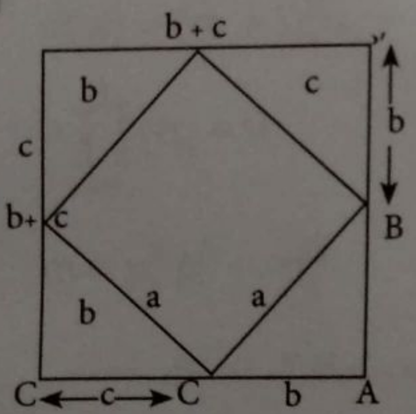
$$b^2+c^2=a^2$$

به‌نظر شبیه اتحادهای جبری است؟ اما چطور؟ (طرح)

$$b^2+c^2+2bc=a^2+2bc$$

$$(b+c)^2=a^2+2bc$$

با شکل چطور؟



مربعی به طول ضلع $b+c$ می‌سازیم. با درنظر گرفتن زاویه‌های مکمل، می‌بینیم که زاویه‌های شکل داخلی قائمه بوده، در نتیجه این شکل مربعی به طول ضلع a است. در شکل چه می‌بینیم؟

چهار برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویه + مساحت مربع به طول a= مساحت مربع بزرگتر و یا به زبان نمادی:

$$(b+c)^2=a^2+4(\frac{1}{2}bc)=a^2+2bc$$

$$b^2+c^2=a^2$$

(اجرای طرح)

ادامه **بازنگری:** اگر مثلث موردنظرمان قائم‌الزاویه نباشد، آیا باز هم رابطه‌ای بین اضلاع آن وجود دارد؟

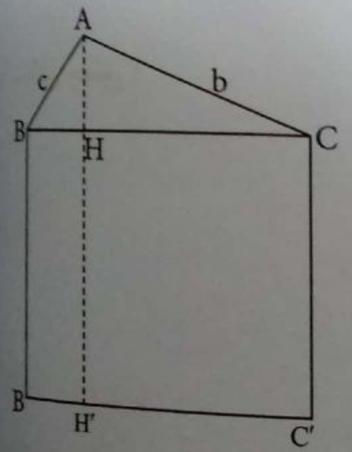
ملاحظه می‌کنید که پروژه می‌تواند ادامه یابد. حل مسأله موردنظر منجر به خلق مسأله‌ای جدیدتر شده است.

در راه‌حل اول، ابتدا این نتیجه را به‌دست آوردیم که

در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع هر ضلع برابر است با طول وتر در تصویر آن ضلع روی وتر. از این حکم در برخی از کتاب‌ها به‌عنوان مسأله‌ای دیگر با قضیه پیش‌نیاز یاد می‌شود. ممکن است از این نتیجه به عنوان لم نیز یاد گردد. به هر حال مسأله اصلی، همان مسأله فیثاغورث است که برای حل آن به ناچار از طرح مسأله‌ای دیگر و حل آن قبل از حل مسأله فیثاغورث شده‌ایم. این همان راهیابی است که به‌نام «راهیابی مسأله کمکی» مشهور است. در بسیاری از موارد مهم، چه بسا برای حل یک مسأله، ناچار شویم چندین مسأله کمکی طرح و اجرا کنیم. سپس با تلفیق آنها حل مسأله موردنظر امکان‌پذیر گردد. پروژه‌ها و مسأله‌های دوره‌های عالی‌تر ریاضیات نظیر دوره دکترا چنین وصفی دارند.

مسأله (ادامه بازنگری)

آیا راه‌حل دیگری برای قضیه فیثاغورث می‌توانیم طراحی کنیم؟



می‌توانیم مربعی روی وتر مطابق شکل بسازیم. مساحت این مربع می‌بایست برابر عدد $b^2 + c^2$ باشد. چگونه این سطح را افراز و تقسیم‌بندی کنیم؟

شاید طبیعی‌ترین راه استفاده از ارتفاع وارد بر وتر باشد (طرح) آیا مساحت مستطیل‌های حاصله برابر c^2 و b^2 است؟

مسأله: فرض کنیم n عددی طبیعی و

$$n = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$$

تجزیه n به عامل‌های اول باشد (قضیه اصلی علم حساب). تعداد مقسوم‌علیه‌ها n را برحسب n یا اجزای آن پیدا کنید.

حل: ابتدا با استدلال استقرایی و بررسی حالت‌های خاص سعی می‌کنیم حدسیه‌ای برای جواب به‌دست آوریم (راهیابی ساده کردن مسأله در حالت خاص و راهیابی استقرا)

$$n = ۴ = ۲^۲$$
$$d_۱ = ۱, d_۲ = ۲, d_۳ = ۴(= ۲^۲) \Rightarrow \pi(n) = ۳$$
$$n = ۳^۵$$
$$d_۱ = ۱, d_۲ = ۳, d_۳ = ۳^۲, d_۵ = ۳^۴, d_۶ = ۳^۵, \pi(n) = ۶$$

تعمیم: هرگاه $n = p^\alpha$ ، $\pi(n) = \alpha + ۱$ زیرا p^β وقتی $۰ \le \beta \le d$ مقسوم‌علیه n است و n فاقد مقسوم‌علیه دیگری است (چرا؟)

تعمیم: هرگاه

$$n = P_۱^{\alpha_۱} P_۲^{\alpha_۲} \cdots P_k^{\alpha_k}$$

آنگاه:

$$\pi(n) = (\alpha_۱ + ۱)(\alpha_۲ + ۱) \cdots (\alpha_k + ۱)$$
$$= \prod_{i=۱}^{k} (\alpha_i + ۱)$$

مسأله کمکی: هرگاه

$$m = p_۱^{\beta_۱} p_۲^{\beta_۲} \cdots p_k^{\beta_k}$$

و m یک مقسوم‌علیه n باشد، آنگاه برای هر $۰ \le i \le k$ ، $۰ \le \beta_i \le \alpha_i$ و این شرط لازم و کافی است.

اکنون حل مسأله اصلی با استفاده از مسأله کمکی و اصل ضرب به‌آسانی نتیجه می‌گردد.

نکته مهم

توجه داشته باشیم که وقتی حل مسأله ریاضی برایمان آسانتر می‌شود که بتوانیم به طرح مسأله و مسأله‌سازی در موقعیت‌های مقتضی مبادرت کنیم.

۳-۱۲ تمرین

۱. پنج مسأله ریاضی، ترجیحاً در سطح ریاضیات متوسطه، بیان کنید که در حل آنها از مسأله کمکی استفاده می‌شود.

۲. پنج مسأله ریاضی بیان و حل کنید، به گونه‌ای که حل آنها، با بازنگری، منجر به طرح مسأله‌های دیگری شود.

۳. پنج مسأله ریاضی بیابید که با راهیابی، استدلال استقرایی و بررسی حالت‌های خاص حل و فصل شوند.

۴. سه مسأله ریاضی بیان کنید که با راهیابی برهان خلف حل‌شده باشند، لکن راه‌حل مستقیم نداشته باشند.

۵. پنج مسأله ریاضی بیان کنید که هم راه‌حل برهان خلف و هم راه‌حل مستقیم داشته باشند. راه‌حل‌ها را مقایسه کنید و در مورد آنها نظر دهید.

۶. در داخل یک مثلث نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا سه رأس مثلث می‌نیمم باشد. (راهیابی: مسأله را ابتدا در ساده‌ترین حالت آن حل کنید.)

۷. ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد منفی یک عدد مثبت است (در سطح راهنمایی.)

راهنمایی: از این قضیه جبر ۱ دانشگاهی استفاده کنید: در هر حلقه

$$a(-b) = (-a)(b) = -(ab)$$

و اینکه $(a^{-1})^{-1} = a$ در نماد ضربی و یا $-(-a) = a$ در نماد جمعی گروه‌ها.

خواندنی: تمرین ریاضیات در منزل

معلمین و دبیران ریاضی برای ارتقاء مهارت‌های دانش‌آموزان و دانشجویان غالباً به ارائه پرسش‌ها و مسأله‌هایی مبادرت می‌کنند تا در منزل حل کرده و به معلم خود تحویل دهند. این عمل به‌ویژه در دوره دبستان، وقت زیادی را از دانش‌آموزان گرفته و اگر احساس کنند که از حل و پاسخگویی تمرینات برنمی‌آیند از والدین خود کمک می‌گیرند.

متخصصین آموزش و یادگیری ریاضیات را عقیده بر این است که در دوره دبستانی نباید تمرین و مسأله‌هایی به دانش‌آموزان داد تا در منزل به پاسخگویی آن بپردازند.

دلایل تربیتی این امر را می‌توان به اجمال چنین بیان کرد:

۱. چنانچه دانش‌آموزان از حل و پاسخگویی به پرسش‌ها عاجز باشند که غالباً چنین است، این امر موجبات نگرانی و اضطراب آنها در امر تحصیل می‌شود و این به‌نوبه خود باعث سرخوردگی و فرار از یادگیری مؤثر ریاضیات در دوره‌های بعدی می‌گردد.

۲. اگر تعلیم و تربیت ریاضی شغلی تخصصی است پس نباید انتظار داشته باشیم که والدین وظیفه معلمین و دبیران را در منزل به‌عهده گرفته و به تعلیم و تربیت فنی و آموزشی بچه‌ها به‌درستی مشغول شوند.

۳. ارائه پرسش‌ها و تمرینات انبوه به دانش‌آموزان جهت کار در منزل باعث افت کارآیی معلمین شده و عدم موفقیت دانش‌آموزان را نتیجه عدم همکاری آموزشی والدین تلقی کرده و بدین‌نحو کاستی‌های خود را پوشش می‌دهند.

۴. بچه‌ها در دوره دبستانی روحیه حساسی دارند. با دلگرمی و اشتیاق فراوان پا به مدرسه گذاشته‌اند، لیکن در اثر تحمیل بیش از حد تمرین، مسأله و پرسش به آنها به‌تدریج اشتیاق آنها به یادگیری کاهش یافته و چه بسا از مدرسه گریزان شوند.

اما در دوره دبیرستان، ارائه تمرین منزل (Homwork) به دانش‌آموزان می‌تواند سهمی مهم در امر یادگیری و توسعه توانایی‌های آنها داشته باشد. ارائه تمرین و کار در منزل در همه کشورهای پیشرفته علمی در دوره دبیرستان امری معمول و مرسوم است. لکن ارائه کار در منزل در مقطع ابتدایی امری است که اگر ممنوع نباشد، به هیچ‌وجه توصیه نمی‌گردد. اما ارائه کارهای پژوهش‌گونه در این مقطع توصیه می‌گردد.

هدف‌های کار در منزل در مقطع دبیرستان را می‌توانیم چنین تبیین کنیم:

• مسأله‌های ارائه‌شده با «راهنمایی» کافی همراه باشد تا موجب ارتقاء و گسترش درک دانش‌آموزان از روند حل مسأله گردد.

• بازخورد این کار می‌تواند به تصویری روشن از ارائه درس دبیر گردد: چه بخش‌هایی از درس را باید توسعه داد و چه بخش‌هایی را باید تعویض کرد.

• به شناخت استعدادها و تفاوت‌های دانش‌آموزان کمک می‌کند. (اولویت شماره ۳)

• نمرات اوراق منزل ثبت شده و برای ارزیابی‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

• هرگاه پاسخ‌های آنها با تأخیر توأم گردد می‌تواند موردقبول واقع شود، لکن این امر باید ثبت گردد و یا به دانش‌آموزان تذکر داده شود.

• پاسخ مسأله‌ها و تمرین‌ها همواره باید برای هفته بعد توسط دبیران به دانش‌آموزان ارائه گردد.

شما در این خصوص چه نظری دارید؟

کمیت و کیفیت ارائه تمرین منزل در مقاطع مختلف تحصیلی:

نظرتان در قسمت سفید زیر ارائه دهید.

فصل چهارم

کلیاتی درباره بررسی کتب درسی

هدف‌های آموزشی و رفتاری

دانشجویان پس از مطالعه این فصل باید بتوانند:

- مفاهیم بررسی، بررسی انتقادی را توضیح داده و به‌درستی درک کنند.
- انواع بررسی را شرح داده و از عهده بررسی یک متن درسی به‌خوبی برآیند.
- هدف‌های بررسی متون درسی را توضیح دهند.
- به‌عنوان یک کار پروژه‌ای، فصلی از یک کتاب درسی را تحت‌نظر مدرس خود، انتخاب کرده و آن‌را بررسی انتقادی کنند.

۴-۱ اهداف بررسی

هدف از بررسی یک کتاب درسی چیست؟ شکی نیست که یک معلم و با یک دبیر آگاه، قبل از رفتن به کلاس، در مورد موضوع درس که می‌خواهد تدریس کند مطالعه می‌کند. غرض وی از مطالعه، تسلط بر موضوع مورد نظر و آماده‌سازی خویش برای ارائه هرچه بهتر آن و تنظیم یک طرح درس جهت اجرای تدریس است. همانند هنرپیشه‌ای که متناسب با یک سناریو قطعات نقش را به توالی اجرا می‌کند، معلم نیز به‌خاطر ارائه منظم و هدفدار درس مجبور است از یک طرح و سناریو از پیش نوشته‌شده پیروی کند. ممکن است این طرح درس نوشته نشده باشد ولی به‌هر حال در ذهن معلم است. البته معلم در مقایسه با یک هنرپیشه، هم سناریونویس است هم مجری و هم کارگردان، در حالی‌که هنرپیشه الزاماً سناریونویس یا کارگردان نیست.

در میان منابع مهم مورد مطالعه معلم کتب درسی قرار دارند. مطالعه معلم یک مطالعه معمولی نیست، مطالعه‌ای نیست که برای یادگیری مطلبی و آماده‌سازی جهت پاسخگویی و یا شرکت در آزمونی باشد بلکه

- مطالعه‌ای است جهت آماده‌سازی برای اجرای نقشی مهم به‌عنوان مدرس کتاب
- مطالعه‌ای است جهت آشنا شدن به نکات قوت و ضعف یک کتاب درسی
- مطالعه‌ای است جهت تهیه نوشته‌ای مکمل که برای رده خاص از دانش‌آموزان تدوین می‌گردد.
- مطالعه‌ای است برای تدوین سؤالاتی متنوع و طرح مسائلی احیاناً بدیع و باانگیزش.

شاید بهتر است بگوییم که یک معلم، دبیر و یا استاد دانشگاه یک کتاب را بررسی می‌کند.

۴-۲ انواع بررسی

با توجه به آنچه که در فصل قبل در باب اهداف و روش تدریس ریاضیات ذکر گردید، مهمترین انواع بررسی را به اختصار شرح می‌دهیم.

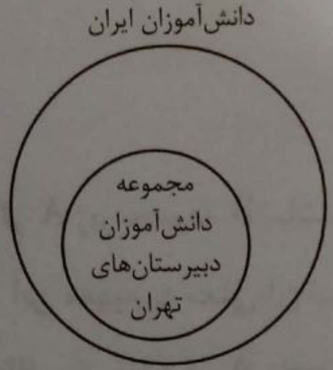
۱. بررسی محتوایی:

در این بررسی، هدف تشخیص اهداف جزئی موضوع مطرح شده می‌باشد و اینکه تا چه اندازه تحقق اهداف جزئی مربوطه در کتاب تأمین شده است. به‌عبارت دیگر، هدف دبیر از این‌گونه بررسی آن است که دریابد موارد مطرح‌شده در درس چیست. برای روشن‌تر شدن مطلب مثال‌هایی ذکر می‌کنیم.

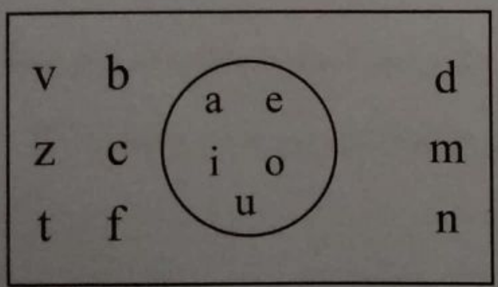
مثال: به متن ذیل که از صفحات یک کتاب درسی دبیرستانی است توجه کنید.

زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

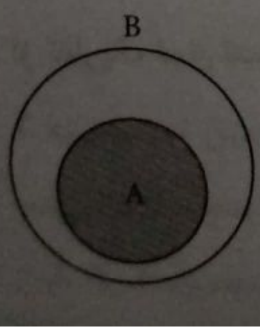
هر یک از دانش‌آموزان دبیرستان‌های تهران یکی از دانش‌آموزان دبیرستان‌های ایران نیز می‌باشند.



هر حرف صدادار انگلیسی یکی از حروف الفبای انگلیسی نیز هست.



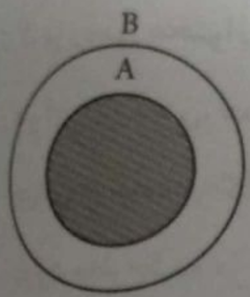
اگر B نمایش مجموعه ۳۲ مهره از شطرنج و A نمایش مجموعه ۱۶ مهره پیاده آن باشد، روشن است که هر یک از عضوهای مجموعه A یکی از عضوهای مجموعه B نیز می‌باشد.



تعریف: مجموعه A را زیرمجموعه B نامند. هرگاه هر عضو A، عضو B نیز باشد.

به‌عبارت دیگر، مجموعه A زیرمجموعه B است. هرگاه برای هر $x \in A$ نتیجه می‌شود که $x \in B$، اگر A زیرمجموعه B باشد می‌نویسیم: $A \subset B$

و نمایش هندسی آن به‌صورت شکل زیر می‌باشد:



و تعریف آن با زبان ریاضی به‌صورت زیر است:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

مثال‌های مفهوم زیر مجموعه را روشن‌تر می‌سازند.

$$\{a,e,i\} \subset \{a,e,i,o,u\}$$

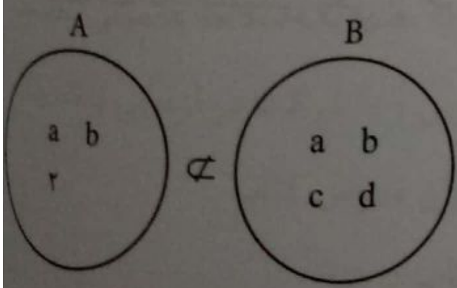
$$\{۱,۲,۳\} \subset \{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

$$\{\square,\triangle\} \subset \{\square,\triangle,▱,\bigcirc\}$$

اگر A زیرمجموعه B نباشد می‌نویسند: $A \not\subset B$

و این مفهوم به معنی آن است که:

لااقل یک عضو در A وجود دارد که در B نیست.



و با زبان ریاضی:

$$(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists x \in A, x \notin B\}$$

از تعاریف فوق نتیجه می‌شود که:

۱. هر مجموعه زیرمجموعه خودش است.

یعنی، اگر A مجموعه دلخواهی باشد داریم: $A \subset A$

زیرا، اگر A زیرمجموعه A نباشد، $A \not\subset A$

در این‌صورت، در A باید عضوی وجود داشته باشد که در A نباشد و این نشدنی است.

۲. مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه است.

یعنی، اگر A مجموعه دلخواهی باشد داریم: $\varnothing \subset A$

زیرا، اگر $\varnothing$ زیرمجموعه A نباشد، در این‌صورت، در $\varnothing$ باید عضوی وجود داشته باشد که در A نباشد و چون در مجموعه تهی عضوی وجود ندارد، لذا این نشدنی است.

مثال ۱: دو مجموعه $A=\{۵,۶,۷\}$ و $B=\{۱,۲,۵,۶\}$ را درنظر بگیرید. آیا A زیرمجموعه B است؟

مثال ۲: تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را بنویسید.

حل:

الف) طبق آنچه گفته شد $\varnothing$ زیرمجموعه A است.

ب) زیرمجموعه‌های یک عضوی عبارت‌اند از: $\{a\},\{b\},\{c\}$

ج) زیرمجموعه‌های دو عضوی عبارت‌اند از: $\{b,c\},\{a,b\},\{a,c\}$

د) تنها زیرمجموعه سه عضوی خود مجموعه یعنی $\{a,b,c\}$ می‌باشد.

در این مثال عده عضوهای A برابر ۴ و تعداد زیرمجموعه‌های آن ۸ یعنی $۲^۳$ می‌باشد.

اکنون این سؤالات را در رابطه با متن فوق مطرح می‌کنیم.

الف) اهداف کلی ریاضیات که در محتوای این درس نهفته است کدامند؟

ب) اهداف جزئی (ریزمواد) تشکیل‌دهنده این درس کدامند؟

در پاسخ به سؤال (الف) موارد ذیل را می‌توان مطرح کرد.

می‌دانیم آشنایی با نظریه مقدماتی مجموعه‌ها برای مطالعه سایر دروس ریاضی، همانند جبر و آنالیز ضروری است.

لذا یک هدف کلی این درس آموزش ریاضی مورد نیاز برای مطالعه سایر موضوعات درسی است. (هدف ۱. ۳)

یک هدف کلی این درس پرورش قوه تفکر ریاضی است. (هدف ۲. ۱)

دانش‌آموزان را برای تحصیلات بعدی آماده می‌سازد (هدف ۳. ۱)

دانش‌آموزان را با زبان ریاضی آشنا می‌سازد. (هدف ۴. ۳)

در پاسخ به سؤال (ب) اهداف جزئی این درس را می‌توان چنین مطرح کرد:

ارائه مفهوم «زیرمجموعه»

ساختن زیرمجموعه‌های یک مجموعه مفروض

معرفی نماد «جزئیت مجموعه‌ای»

اینکه $\varnothing$ جزء هر مجموعه‌ای است.

اینکه هر مجموع جزء خودش است.

آماده‌سازی برای بیان قاعده تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه متناهی.

تمرین: صفحات ۲۶ تا ۴۶ کتاب ریاضیات ۲ نظری را در باب «رابطه و تابع» مطالعه و بررسی محتوایی آن‌را بنویسید. (**به سؤالات الف و ب فوق‌الذکر درباره این درس پاسخ دهید**).

۲. بررسی انتقادی[1]

معلمین و دبیران خبره و آگاه، معمولاً به محتوای کتاب درسی بسنده نمی‌کنند. برای بهتر ارائه کردن یک درس آگاهی از اهداف آموزشی ریاضی و روش‌های نوین تدریس ضروری و شایان توجه است. یک بررسی انتقادی به بررسی‌ای گفته می‌شود که به استناد اهداف آموزش ریاضیات و اصول روش تدریس فعال آگاهانه و مسئولانه انجام می‌گیرد. باید متوجه بود که مؤلف یا مؤلفین کتاب درسی فرصت پاسخگویی به نقد درسی کتاب خویش را ندارند، بنابراین در ارائه این‌گونه بررسی‌ها باید محتاطانه و با صداقت عمل نمود.

یک بحث انتقادی از یک متن درسی ریاضی می‌تواند بر پایه اصول ذیل انجام گیرد.

الف) متن درسی تا چه اندازه تحقق اهداف آموزش ریاضیات را تضمین می‌کند؟

ب) متن درسی تا چه اندازه بر پایه روش تدریس فعال ارائه شده است؟

ج) متن درس تا چه اندازه از حیث هنری و طراحی آموزشی مناسب است؟

فصل چهارم

به‌عنوان مثال متن درس قبلی را که در بخش بررسی محتوایی مورد بررسی قرار دادیم، مورد بررسی انتقادی قرار می‌دهیم.

مثال ۱:

درس با مثال‌هایی ملموس از زیرمجموعه‌های حروف انگلیسی و زیرمجموعه مهره‌های پیادگان از مهره‌های شطرنج، پس از آن مفهوم تعریف زیرمجموعه ارائه و فرمول‌بندی شده است.

(*) در مقایسه با روش تدریس فعال، درس فاقد انگیزه کافی برای یادگیری است.

درس می‌توانست با ارائه «سؤال» شروع شود. به‌عنوان نمونه مطلب را می‌توان چنین آغاز نمود:

به مثال‌های ذیل از مجموعه‌ها توجه کنید:

(حروف انگلیسی) $A=\{a,b,c,d,\cdots,x,y,z\}$

(حروف صدادار انگلیسی) $A_1=\{a,e,i,o,u\}$

[1] Critical Review.

مجموعه مهره‌های شطرنج $= B$ مجموعه مهره‌های پیاده شطرنج $= B_1$

در مورد A و A_1 چه می‌توان گفت؟

در مورد B و B_1 چه می‌توان گفت؟

آیا می‌توانید مجموعه‌های دیگری بسازید که اعضایشان در A باشند؟ سه تا از این‌گونه مجموعه‌ها را بنویسید. حتماً متوجه شده‌اید که تعداد زیادی از اینگونه مجموعه‌ها می‌توان نوشت. هر یک از این مجموعه‌ها را یک زیرمجموعه از مجموعه A می‌نامیم. در اینجا دو تا از آنها را می‌نویسیم.

$$A_2 = \{a,b,c\}\ ,\ A_3 = \{a,b,d,f\}$$

تمرین کلاسی: یک مجموعه سه عضوی اختیار کنید. همه زیرمجموعه‌های آن‌را بنویسید. چند زیرمجموعه به‌دست می‌آورید. آیا اگر یک مجموعه سه عضوی دیگر انتخاب می‌کردید باز همین تعداد زیرمجموعه برای آن به‌دست می‌آمد؟

ملاحظه می‌کنید که مطلب را می‌توان با سؤالات تحقیق گونه‌ای که هم ساده هستند و هم انگیزه لازم را به‌عنوان سرگرمی به دانش‌آموز می‌دهند آغاز نمود.

(*) دومین نکته در مورد متن «نحوه القاء زبان ریاضی» است.

وقتی تعریف زیرمجموعه به‌صورت:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

ارائه شده، آن‌را تعریف مفهوم زیرمجموعه به زبان ریاضی نامیده است. در اینکه این گزاره دو شرطی تعریف مفهوم زیرمجموعه است بحثی نیست. اما در هیچ جای کتاب مربوطه این مطلب که «یک تعریف ریاضی اساساً یک گزاره دوشرطی است» ذکر نشده است.

به‌جای آن مؤلف می‌توانست بر مفهوم زیرمجموعه تکیه بیشتری داشته باشد و همین گزاره «A زیرمجموعه B است» با نماد «$A \subset B$» نشان داده شده است. خود باعث آشنایی دانش‌آموزان با زبان ریاضی است چرا که استفاده از نماد و علامت‌ها به‌جای عبارت و جملات فارسی جزئی از زبان ریاضی است.

(*) نماد جزئیت مجموعه‌ای «$\subset$» نامناسب است. چون جزئیت عام تعریف شده است (که در آن ممکن است دو مجموعه مساوی نیز باشند) بهتر است از نماد «$\subseteq$» استفاده شود.

در مورد ادامه مطلب در صفحات بعد کتاب، از جمله نقد رابطه جزئیت مجموعه‌ای (از $B \subset C$ و $A \subset B$ نتیجه می‌شود که $A \subset C$) نکاتی را می‌توان یادآور شد که نقد این قسمت را به دانشجویان محول می‌کنیم.

پروژه: با راهنمایی مدرس خود یک مطلب از درس ریاضی دبیرستانی انتخاب کرده و ابتدا آن‌را نقد و بررسی کنید. در صورتی‌که آمادگی دارید، مطلبی را تدوین نموده که بتواند جایگزین مطلب نقدشده بوده و با اهداف آموزش ریاضی و روش تدریس فعال هماهنگی بیشتری داشته باشد.

مطالب پروژه‌ای می‌تواند یکی از مطالب ذیل انتخاب شود.

- حد و پیوستگی
- قوانین دمورگان در باب مجموعه‌ها
- تناظر یک به یک در باب مجموعه‌ها
- لگاریتم
- دستگاه معادلات جبری

اکنون به عنوان مثالی دیگر، صفحات ۱۲۶ تا ۱۳۱ از کتاب ریاضیات ۱ (۱۳۸۸) دوره دبیرستان را عیناً نقل کرده‌ایم. به‌دقت مطالعه نمایید و به نقد و بررسی آن در ادامه مطالب توجه نمایید.

مثال ۲: معادله خط

اگر مقدارهای دو متغیر با هم رابطه خطی داشته باشند و آنها را با x و y نشان داده باشیم، بیان ریاضی این رابطه به‌صورت $y = mx + b$ است که در آن m و b اعداد ثابتی هستند. نمودار این معادله، یک خط است.

فعالیت:

۱. خط به معادله $y = ۳x + ۴$ را رسم کنید.

۲. هر یک از نقاط زیر را در صفحه مشخص کنید و از روی شکل بگویید کدامیک از این نقاط روی خط به معادله بالا قرار دارند؟

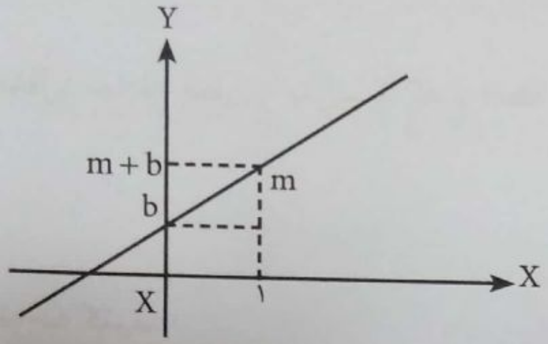
$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

۳. با جایگذاری مختصات هر نقطه در معادله خط، پاسخ خود را بررسی کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر نقطه‌ای روی خط قرار داشته باشد، با جایگذاری مختصات آن در معادله خط، تساوی برقرار می‌شود.

برای به‌دست آوردن شیب یک خط کافی است دو نقطه روی آن خط پیدا کنیم. خط به معادله $y = mx + b$ را درنظر بگیرید. جایی‌که این خط محور yها را قطع می‌کند، نقطه‌ای است که طول آن صفر است. با جایگذاری $x = ۰$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $y = b$، b را عرض از مبدأ این خط می‌نامند. پس، $\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ یک نقطه از

این خط است. با جایگذاری $x = ۱$ در معادله این خط نتیجه می‌شود $y = m + b$. پس $\begin{bmatrix} ۱ \\ m+b \end{bmatrix}$ یک نقطه دیگر از این خط است.



بنابراین شیب این خط برابر است با $m = \dfrac{m+b-b}{۱-۰}$. توجه کنید که شکل صفحه قبل برای حالتی رسم شده که $m > ۰$ و $b > ۰$. برای سایر حالات m و b، خودتان شکل مناسب را رسم کنید.

اگر معادله خطی به‌صورت $y = mx + b$ باشد، شیب آن برابر m است.

مثال: معادله خطی را بیابید که شیب آن ۳ است و از نقطه $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

اگر شیب خطی m باشد، معادله آن به‌صورت $y = mx + b$ است. پس، معادله این خط به‌صورت $y = ۳x + b$ است. با جایگذاری مختصات نقطه A در معادله، می‌توان مقدار b را پیدا کرد.

$$۲ = ۳ \times ۱ + b$$

$$b = ۲ - ۳ = -۱$$

با جایگذاری مقدار b در معادله خواهیم داشت: $y = ۳x - ۱$.

فعالیت:

۱. معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۲. معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۳. معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

۴. معادله خطی که شیب آن m است و از نقطه $D = \begin{bmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

معادله خطی به شیب m که از نقطه $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن (-۲) است.

$$y - ۲ = -۲(x - ۳)$$

$$y = -۲x + ۸$$

توجه کنید:

در خط به معادله $۲y = x + ۲$، شیب برابر ۱ نیست، چرا؟

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

ابتدا شیب این خط را حساب می‌کنیم. چون A و B دو نقطه از این خط هستند، شیب آن برابر است با:

$$m = \frac{۳ - ۲}{۵ - (-۱)} = \frac{۱}{۶}$$

پس معادله این خط به‌صورت زیر است:

$$y - ۲ = \frac{۱}{۶} \times (x - (-۱)) = \frac{۱}{۶}(x + ۱)$$

$$y - ۲ = \frac{۱}{۶}x + \frac{۱}{۶}$$

$$y = \frac{x}{۶} + ۲\frac{۱}{۶};$$

بیندیشیم: در مثال بالا، آیا برای نوشتن معادله خط، می‌توانستیم از نقطه B استفاده کنیم؟

تمرین در کلاس:

الـف) خط‌های به معادله‌های $y = ۲x + ۱$, $y = ۲x - ۱$, $y = ۲x + ۳$ و $y = ۲x - ۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب) وضعیت این خط‌ها نسبت به‌هم چگونه است؟

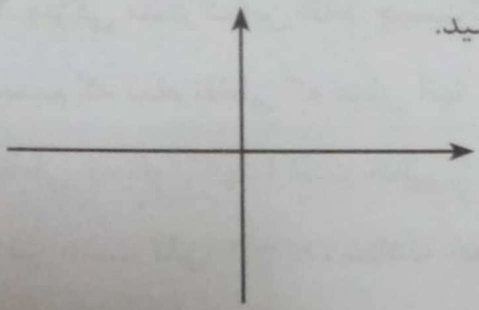
ج) شیب این خط‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

د) در حالت کلی در ارتباط با توازن چند خط با یکدیگر و رابطه بین شیب آنها چه حدسی می‌زنید؟

خط‌هایی که شیب یکسان دارند با هم موازی‌اند.

فعالیت:

۱. خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات مقابل رسم کنید.



$y = ۳x + ۲$

$y = ۲x + ۲$

$y = x + ۲$

$y = ۰/۵x + ۲$

۲. با بررسی و مقایسه وضعیت خط‌های بالاتر در مورد وضعیت خط به معادله $y = ۰ \times x + ۲ = ۲$ چه حدسی می‌زنید؟

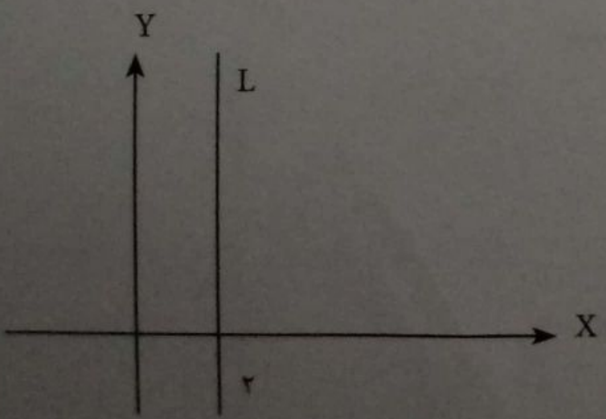
۳. پنج نقطه دلخواه روی خط $y = ۲$ درنظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

	A	B	C	D	E
x					
y					

۴. ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

۵. با توجه به آنچه انجام داده‌اید، توضیح دهید وضعیت خط $y = b$ (b می‌تواند هر عدد ثابتی باشد) چگونه است و در مورد طول و عرض نقاط روی این خط چه می‌توان گفت؟

۶. خط L موازی محور yها به شکل زیر رسم شده است. پنج نقطه دلخواه روی آن‌را درنظر بگیرید و جدول زیر را تکمیل کنید.

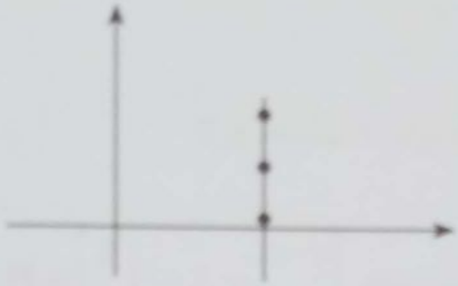


	A	B	C	D	E
x					
y					

۷. ویژگی مشترک این نقاط چیست؟

دیدیم که تمام نقاطی که عرض آنها ۲ بود خطی را می‌ساختند که معادله آن $y = ۲$ بود. در اینجا نیز تمام نقاطی که طول آنها ۲ است خطی را می‌سازند که معادله آن‌را $x = ۲$ درنظر می‌گیریم.

در حالت کلی $x = b$، معادله خطی است موازی محور yها که طول همه نقاط آن برابر b است.



معادلـه کلی یک خط دلخـواه در صفحه را می‌توان به‌صورت $ax + by + c = ۰$ درنظر گرفت. در حالتی که $b \neq ۰$، این معادله را به شـکل اسـتاندارد $y = mx + d$ می‌توان نوشت که در آن m شیب این خط است. در حالت $b = ۰$ این معادله به‌صورت $x = d$ می‌آید که خطی عمود بر محور x هاست.

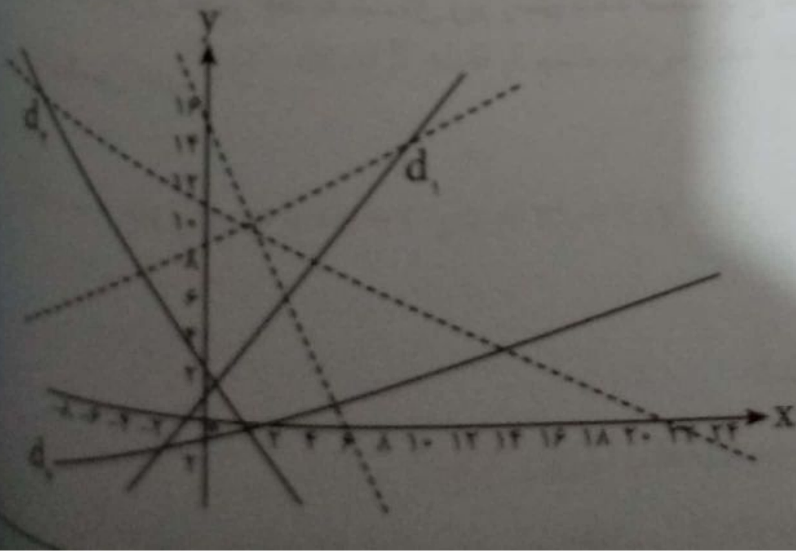
خط‌های عمود بر هم

فصل چهارم

دیدیم که موازی بودن خط‌ها را می‌توانیم از طریق شیب آنها تشخیص دهیم. در این بخش می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا عمود بودن دو خط را هم می‌توانیم از طریق شیب آن دو خط تشخیص دهیم.

فعالیت:

در شکل زیر سه خط d_1, d_2 و d_3 و خطوط عمود بر آنها رسم شده‌اند.



۱. دو نقطــه روی هــر خط عمود را درنظر بگیرید و به‌کمک خط‌کش، بــا اندازه‌گیری طول و عرض این نقاط، شیب هر یک از این خط‌ها را به‌دست آورید.

جدول زیر را کامل کنید.

معادله خط	$d_1 : y = 2x + 1$	$d_2 : y = 2x + 2$	$d_3 : y = \frac{1}{3}x - 1$	$d_4 : y = x - 3$
شیب خط				
شیب خط عمود				

۲. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای بین شیب‌های دو خط عمود بر هم وجود دارد؟

شرط عمود بودن دو خط با شیب‌های m و m'، آن است که $mm' = -1$.

تمرین

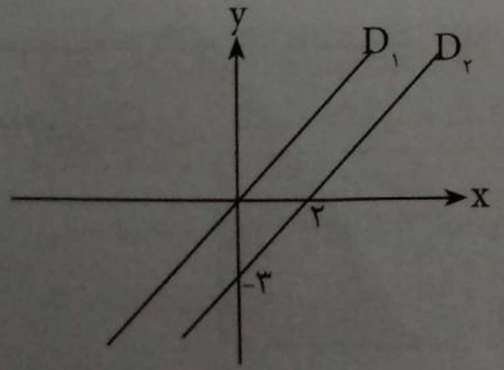
۱- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و شیب آن ۲ است.

۲- معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

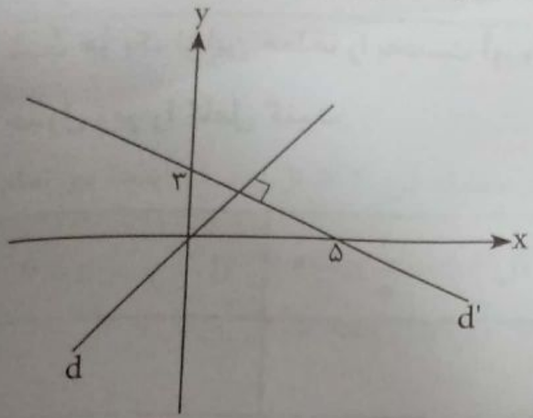
۳- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و با نیمساز ربع اول $(y = x)$ موازی است.

۴- وضعیت دو خط به معادله‌های $x + y = 1$ و $2x + 2y = 5$ نسبت به‌هم چگونه است؟

۵- معادله دو خط موازی D_1 و D_2 را در شکل زیر بنویسید.



۶- خط d بر ′d عمود است. با توجه به شکل زیر معادله خطوط d و ′d را بنویسید.



بررسی مثال ۲

هدف این درس معرفی و شـناخت معادله خط راسـت می‌باشـد. همچنین هدف‌های جزئی درس معرفی و شناخت شیب خط و شناخت خطوط موازی و عمود بر هم با استفاده از معادله خط است.

در دروس قبلی که در واقع پیش‌نیاز این درس اسـت، دانش‌آموزان با صفحه مختصات و شـیب خط به‌خوبی آشنا شده‌اند.

در این درس معادله خط به‌صورت زیر تعریف شده است:

نکته مهم

اگر مقدارهای دو متغیر با هم رابطه خطی داشـته باشـند و آنها را با x و y نشان داده باشیم، بیان ریاضی این رابطه به‌صورت $y = mx + b$ است که در آن m و b اعداد ثابتی هستند. نمودار این معادله، یک خط است.

بعد از این تعریف، به روش فعال پرسـش‌هایی از دانش‌آموزان شـده اسـت تا ضمن کار روی این پرسش‌ها به درک بیشتر مفهوم معادله خط نایل شوند.

به‌طرزی زیبا توضیح گردیده اسـت که اگر نقطه‌ای روی خط قرار داشـته باشد با جایگذاری مختصات آن در معادله خط، تساوی برقرار می‌گردد.

سپس به توضیح بیشتر شیب خط پرداخته شده است. در ادامه ضمن تمرین‌های کار در کلاس از دانش‌آموزان خواسـته می‌شـود تا با داشتن یک نقطه و شیب خط معادله خط را بنویسند. (تمرین‌های ۱ تا ۴ صفحه ۲۴)

به‌عنوان نتیجه این فعالیت ذکر شده است که:

معادله خطی به شیب m که از نقطه $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

پــس از حل چند تمرین دیگر در کلاس زمینه‌ســازی برای معرفی خطوط خــاص، یعنی خطوطی که موازی محورهای x و یا y اند در صفحات ۲۵، ۲۶ و ۲۷ ارائه گردیده است.

معادله خطوط افقی، به‌عنوان تعمیمی از معادله کلی خطوط (با جایگزینی $m = 0$) به‌عنوان خطوطی با شیب صفر معرفی شده‌اند.

$$y = 0 \times x + b = b$$

اما معادله خطوط قائم به روش هندســی و اینکه هرگاه خطی عمود بر محور x باشــد، نقاط آنچه ویژگی‌های مشترکی دارند، در صفحه ۲۷ معرفی شده‌اند.

در صفحه ۲۸ به روش تجربی و فعال برای درک ویژگی خطوط موازی زمینه‌ســازی شــده است. در پایان (صفحه ۲۸) تمرینات مناسبی، به‌عنوان تمرینات خانه آورده شده است تا دانش‌آموزان ضمن کار بیشتر به تعمیق مطالب این درس بپردازند.

نقد مثال ۲

ارائه این درس به روش فعال از مزیت‌های اساسی این کتاب درسی به‌شمار می‌رود. با پرسش‌های طراحی‌شده، تکمیل جدول داده‌ها و توجه به نمودارها از دانش‌آموزان خواســته می‌شود تا به پرسش‌های مشخص مفهومی پاسخ داده و به مفهوم‌سازی بپردازند. تمرین‌های کلاسی از مزایای دیگر این درس است. تدریس دبیر به‌صورت فعال رفت و برگشــتی انجام می‌گیرد. صفحه‌بندی کتاب و رســم نمودارهای رنگی از دیگر مزایای طراحی این درس به‌شمار می‌رود.

اما به‌لحاظ مفهوم‌سازی کاستی‌هایی ملاحظه می‌شود که ذیلاً به نقد آن می‌پردازیم.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، عنوان درس «معادله خط» است و هدف اصلی نویسندگان معرفی معادله خط می‌باشد. در ذیل عنوان درس تعریف معادله خط به‌صورت زیر آمده است:

نکته مهم

اگر مقدارهای دو متغیر با هم رابطه خطی داشــته باشــند و آنها را با x و y نشان داده باشیم، بیان ریاضی این رابطه به‌صورت $y = mx + b$ است که در آن m و b اعداد ثابتی هستند. نمودار این معادله یک خط است.

در اینجا در تعریف معادله خط از مفاهیم متغیر و رابطه خطی اســتفاده می‌شــود که قبل از این به روشــنی تعریف نشده‌اند. در واقع منظور نویسندگان از متغیرها همان مختصات (طول و عرض) نقطه‌ها است که هرگاه

عرض نقطه‌ها برحسب طول از طریق یک عبارت درجه اول یعنی $(mx + b)$ ارائه گردد، چنین بیانی را معادله خط می‌نامیم.

در حالی که در صفحات قبل ضمن آشنایی دانش‌آموزان با صفحه مختصات دکارتی از مختصات نقاط به شکل $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ یاد شده است، در این تعریف با توسل به رابطه‌ای صرفاً جبری، به تعریف معادله خط پرداخته شده است. آیا بهتر نیست معادله خط (راست) را ضمن بیان مختصات نقاط آن معرفی کنیم، در واقع یک اشکال اساسی تعریف فوق و کلاً این درس ارتباط ضعیف این درس با دروس پیشین آن است. در مواجهه با معادلات خطوط خاص رویکرد دیگری مطرح شده است.

تعریف معادله خط قائم (صفحه ۲۸) براساس تبیین ویژگی مشترک نقاط آن ارائه شده است. از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا با توجه به صفحه دکارتی همه نقاطی را که واجد ویژگی مشترک $x = ۲$ (و نظایر اینها) هستند مشخص کرده و شکل هندسی این نقاط را مشخص کنند. ملاحظه می‌کنیم که این تعریف معادله خطوط قائم (و تا اندازه‌ای خطوط افقی) هیچ‌گونه هماهنگی با تعریف اصلی معادله خط «به‌عنوان رابطه خطی بین **x** و **y**» ندارد.

اما با اندک تأملی درمی‌یابیم که معادله یک خط راست را می‌توان به‌عنوان یک مکان هندسی که ویژگی مشترک همه نقاط آن‌را بیان می‌دارد عرضه کرد.

در دنباله این نقد پیشنهادهای مبنی بر این رویکرد که اساساً یک رویکرد هندسی است، ارائه می‌دهیم تا آنکه نقد انجام‌شده سازنده بوده و بدون پیشنهاد باقی نماند.

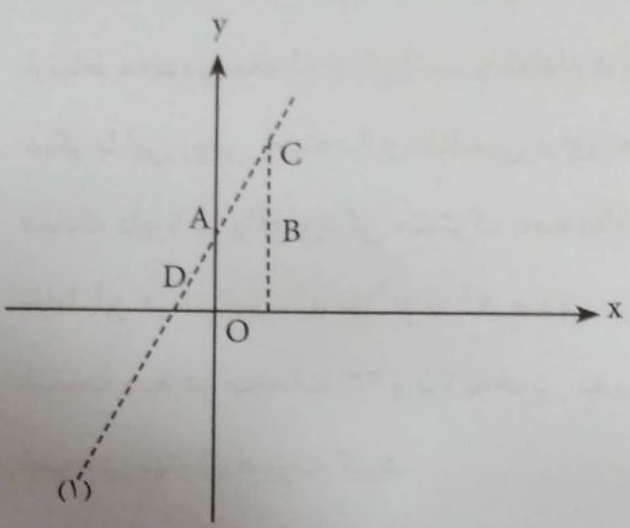
پیشنهاد جایگزین:

یک راه معرفی «معادله خط» براساس ساختارگرایی مفهومی و روانشناسی مفهوم می‌تواند به روش زیر ارائه گردد.

فعالیت:

نقاط زیر را در یک دستگاه محورهای مختصات مشخص کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$



سه نقطه مشخص کنید که بر روی یک خط (راست)واقع باشند.

به‌آسانی متوجه می‌شوید که نقاط $A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۷ \end{bmatrix}$ روی یک خط راست واقع‌اند، اما نقطه $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بر این خط قرار ندارد.

سه نقطه A ،D و C چه ویژگی مشترکی دارند که نقطه B این ویژگی را ندارد؟

راهنمایی: در صورت نیاز اعداد مربوط به طول و عرض این نقاط را با هم مقایسه کنید.

هرگاه طول نقطه را ۳ برابر کرده و ۴ واحد به آن اضافه کنیم، عرض آن نقطه به‌دست می‌آید.

اما نقطه B این ویژگی را ندارد!

آیا نقطه‌های دیگری در خط (۱) نیز این ویژگی را دارند؟

نتیجه: هرگاه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ یک نقطه دلخواه روی خط (۱) باشد، **y** یعنی عرض این نقطه برابر $۳x + ۴$ است.

پس می‌توانیم ویژگی مشترک نقاط خط (۱) را چنین بیان کنیم:

$$y = ۳x + ۴$$

چنین تساوی را که در واقع صفت مشترک همه نقاط واقع بر خط (۱) است، معادله خط (۱) می‌نامیم.

اکنون مبدأ مختصات (**o**) را به **B** وصل کنید و ادامه دهید تا یک خط راست حاصل شود. می‌توانید معادله این خط را بنویسید؟

راهنمایی: یک نقطه دیگر به دلخواه خودتان، روی این خط بگیرید و ببینید که این نقطه و نقطه B چه ویژگی مشترکی دارند. آیا نقطه O نیز این ویژگی را داراست؟

یادآوری می‌شود که زمینه‌سازی این روش در صفحات قبلی کتاب درسی ارائه گردیده است.

ارتباط مفهومی معادله خط راست و معادله دایره (یا حتی بیضی) نیز می‌تواند به‌درستی حفظ گردد؛ به‌عبارت دیگر با این روش زمینه‌سازی مناسبی برای تعریف و کشف معادله دایره در دروس بعدی انجام می‌گیرد. معادله دایره در واقع ویژگی مشترک همه نقاط آن است. اگر دایره‌ای به شعاع a داشته باشیم مختصات همه نقاط آن در تساوی $x^۲ + y^۲ = a^۲$ صدق می‌کند؛ و این ویژگی مشترک نقاط دایره‌ای به شعاع a می‌باشد. شـیب خط در صفحات ۲۴ و ۲۵ به‌خوبی مفهوم‌سـازی شـده اسـت. لیکن این امر نیز می‌توانست به روش تصویری بهتری صورت گیرد.

دانشـجو- معلمان باید توجه داشته باشند که معادله خط در واقع اطلاعات مربوط به خط را به‌صورتی جبری به‌دسـت می‌دهد بدون آنکه نیازی به رسـم آن خط بوده باشد و این نکته قوت هندسه مختصاتی و معادلات جبری اشکال هندسی نظیر خط، صفحه، دایره، بیضی و نظایر اینهاست[1].

در صفحه ۱۲۷ کتاب درسی گفته شده است که:

«اگر معادله خطی به‌صورت $y = mx + b$ باشد، شیب آن برابر m است.»

در صفحه قبل از آن نیز این مفهوم به‌صورت شهودی نمایان شده است. همچنان‌که در شکل نشان داده شده است، می‌بایست توضیح گردد که:

شیب خط، برای ناظری که به‌سوی مثبت محور x ها می‌نگرد، افزایش (کاهش) ارتفاع خط از نقطه‌ای به نقطه دیگر است به ازای افزایش یک واحد طول به طول نقطه اول.

بهتر بود به مقدار b نیز توجه بیشـتری می‌گردید. b در واقع عرض از مبدأ خط نامیده شـده اسـت. b و m مشخص‌کننده هر خط هستند. بهتر می‌بود پرسش می‌شد مثلاً در دو خط به معادلات:

$$y = ۳x - ۲$$
$$y = ۳x + ۲$$

که دارای شیب یکسان‌اند، وضعیت هندسی آنها چگونه است؟

اختلاف آنها در چیست؟

چگونه به‌آسانی (و با کمک m و b) می‌توانند ترسیم شوند؟

۱. گفته می‌شود که دکارت ریاضیدان و فیلسوف معروف فرانسوی، اولین بار به‌کمک روابط جبری به تبیین هندسه پرداخته است. در واقع رنه دکارت واضع هندسه تحلیلی و هندسه جبری می‌باشد.

معمولاً هر خط با یک m و b کاملاً مشخص می‌شود. در ادامه پرسش‌هایی نظیر:

۱. خطی که موازی محور عرض است، مشخصه آن به‌لحاظ معادله خط چگونه است؟

۲. خطی که موازی محور طول است، چگونه مشخص می‌شود؟

به حالات خاص معادله خط (خطوط خاص) پرداخته می‌شود همچنان‌که در کتاب ذکر شده است.

۳. بررسی آماده‌سازی:

یکی دیگر از اهداف بررسی یک موضوع درسی آماده‌سازی جهت تدریس آن موضوع است. شکی نیست دبیری که با آمادگی قبلی به کلاس می‌رود از توانایی بیشتری در ارائه درس و پاسخگویی به سؤالات دانش‌آموزان برخوردار است. دانش‌آموزان ذهنی فعال و پویا دارند. باید مجال یابند تا با طرح سؤالات خود در فرایند یادگیری سهیم شوند. یک دبیر خوب، نه تنها به سؤالات درسی دانش‌آموزان پاسخ می‌دهد بلکه آنها را تشویق به سؤال کردن می‌کند.

هر موضوع ریاضیات شامل مسائل گوناگونی است. ولی مسائل کتاب که از جمله اساسی‌ترین و بنیادی‌ترین مسائل موضوع هستند از اهمیت بیشتری برخوردارند. بررسی قبلی مسائل درس و حل آنها باعث می‌شود تا از اعتماد بیشتری جهت ارائه درس برخوردار بوده، وقت کمتری از کلاس گرفته شود و به بهترین نحو دانش‌آموزان از مسائل حل‌شده در کلاس بهره‌مند گردند.

پروژه: با راهنمایی استاد درس خود، فصلی از کتاب هندسه را بررسی آماده‌سازی نموده و مسائل آن‌را حل کنید.

۴. بررسی خلاصه‌نویسی[1]:

نوع دیگری از بررسی یک موضوع، بررسی به‌منظور دوره کردن و خلاصه کردن آن است. خلاصه کردن یک درس، یک مقاله علمی و یا یک موضوع به‌منظور تسریع در استفاده از آن در مراجعات و تحقیقات بعدی امری است که به‌ویژه در تحقیقات علمی امروز نقش مهمی را ایفا می‌کند.

اولین هدف خلاصه‌نویسی آن است که به خواننده کمک کند تا بتواند تصمیم بگیرد که آیا مراجعه به مأخذ اصلی برای مقاصد وی مفید است یا نه؟ قصدمان این نیست که یک کار خلاصه‌نویسی جانشینی برای مقاله یا کتاب اصلی باشد. در واقع یک کار خلاصه‌نویسی، گزارشی مختصر از یک مقاله یا یک کتاب می‌باشد. یک متن خلاصه ممکن است شامل چند خط و یا یک و یا دو صفحه تایپ‌شده باشد.

۱. Review

خلاصه[1] به چکیده مطلب پی برده و دریابند که به کار تحقیقات و مطالعات آنها مربوط است یا خیر؟

مـورد بحـث در کار خویش را به‌صورت دوره‌ای از مطلب تدوین می‌کننـد تا خوانندگان بتوانند با مطالعه این

اغلب نویسـندگان کتاب‌های علمی، مقاله‌ها و رساله‌های علمی خود در آغاز کار خلاصه‌ای از محتوای موضوع

- یک خلاصه علمی باید دارای دو خصوصیت ذیل باشد:
  - الف) قصد نویسنده را از کتاب یا مقاله مشخص سازد.
  - ب) چنانچه لازم باشد بتواند ارتباط محتوای کار نویسنده را با کارهای مربوطه دیگر آشکار سازد.

۳-۴ طرح چند سؤال:

اکنون به‌عنوان تمرین، نمونه‌هایی از خلاصه‌نویسی مطالب درسی را اینجا ذکر می‌کنیم.

سؤال ۱:

متن ذیل از یک کتاب درسـی دبیرستانی بازنویسی شده است. آن‌را به دقت بخوانید سپس ذیل مفاهیم آن‌را خط بکشـید و آنگاه خلاصه‌ای از آن‌را ارائه داده و در پایان نقدی بر آن بنویسـید. سعی کنید خلاصه آن‌را در نصف صفحه ارائه دهید!

۱. تابع:

فرض کنیم که مجموعه A مجموعه بانوان متأهل ساکن تهران و B مجموعه آقایان ساکن این شهر باشند. در این‌صورت هر عضو مجموعه A که یک بانوی متأهل است به یک عضو منحصربه‌فرد از مجموعه B که همسر او باشد وابسته است. این وابستگی را یک تابع از A به B گوییم. لذا به‌طور کلی می‌توان گفت:

تعریف: فرض کنیم دو مجموعه A و B داشته باشیم و بر طبق قانون معینی به هر یک از عضوهای مجموعه A یک عضو منحصربه‌فرد از مجموعه B را نسبت دهیم. چنین ارتباطی را که بین کلیه عضوهای مجموعه A از یک طرف و بعضی عضوهای مجموعه B از طرف دیگر برقرار است تابعی از A به B می‌نامند و با علامت f نمایش می‌دهند و به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$f: A \to B$$

و می‌خوانیم f تابعی از A به B است. مجموعه A را دامنه و مجموعه B را هم‌دامنه تابع f می‌نامند. اگر a عضو مجموعه A باشد عضوی از B که با a وابسته است به‌صورت $f(a)$ نوشته آن‌را تصویر a می‌گویند و «اف a» می‌خوانند. تصویرهای تمام عضوهای A مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که آن‌را برد تابع می‌نامند.

---
۲. Abstruct

فصل چهارم

به مثال‌های زیر توجه نمایید

مثال ۱: فرض کنیم به هر یک از عناصر شیمیایی عدد اتمی آن‌را نسبت دهیم در این‌صورت تابعی خواهیم داشت که دامنه آن نام عنصرهای شیمیایی و برد آن عددهای اتمی آن عنصرها یعنی مجموعه اعداد طبیعی از «۱ تا ۱۰۴» است. عدد متناظر گوگرد ۱۶ است و می‌توان نوشت:

f (گوگرد) = ۱۶

مثال ۲: فرض کنیم به هر یک از حروف الفبای فارسی تعداد نقطه‌های آن‌را نسبت دهیم. در این‌صورت تابعی داریم که دامنه آن مجموعه حروف الفبای فارسی است و برد آن مجموعه $B=\{۰,۱,۲,۳\}$ باشد بنابراین تابعی از مجموعه حروف الفبا به عددها داریم و می‌توانیم بنویسیم:

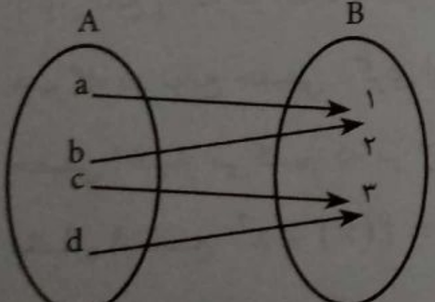
f (ر) = ۰ و f (ت) = ۲ و f (ژ) = ۳ و f (ن) = ۱

مثال ۳: مجموعه اعداد درست و مجموعه اعداد درست نامنفی را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم قانون f به هر یک از اعداد درست، مربع آن‌را از مجموعه اعداد درست نامنفی نظیر نماید. پس تابعی از مجموعه اعداد درست (Z) در مجموعه اعداد درست نامنفی (S) داریم و می‌توانیم بنویسیم:

$$f:Z\to S$$

$f(-۲)=۴$ و $f(۲)=۴$ و $f(۰)=۰$ یا بطور کلی $f(x)=x^{۲}$

مثال ۴: می‌توان تابع را با شکل تعریف نمود. مثلاً مجموعه‌های $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ را درنظر می‌گیریم و تابع $f:A\to B$ را مطابق شکل زیر تعریف می‌کنیم.



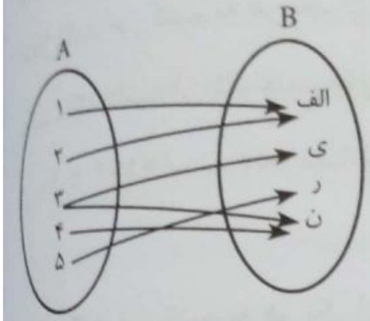
در این‌صورت داریم: $f(a)=f(b)=۱$ و $f(c)=f(d)=۳$

بنابر آنچه گفته شد در یک تابع دو مجموعه A و B و یک قانون که برطبق آن هر عضو مجموعه A، تنها با یک عضو از مجموعه B متناظر می‌شود وجود دارد. گاه ممکن است مجموعه A با مجموعه B یکی باشد. در این‌صورت به هر یک از عضوهای مجموعه A برطبق قانون تابع f عضوی از همین مجموعه نسبت داده می‌شود و می‌توان نوشت:

$$f:A\to A$$

فصل چهارم

در شکل زیر قانونی که به هر عضو از A عضوی یا عضوهایی از B نسبت می‌دهد یک تابع نیست. زیرا مثلاً به عدد ۳ دو حرف ی و ن نسبت داده شده‌اند.



تمرین

مجموعه مردها را M و مجموعه زن‌ها را W می‌گیریم. رابطه خواهری f را از W به M درنظر می‌گیریم. آیا این رابطه یک تابع است؟

۲. تابع‌های حقیقی:

از ایـــن پـــس عموماً تابع‌هایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که دامنه و برد آنهـــا زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی هستند.

اگـــر عضـــو دلخواهـــی از دامنه را با x نمایـــش دهیم و تابع f عدد x را به عدد y وابســـته کند، می‌نویسیم: $y = f(x)$.

قانون تابع را که در اینجا به‌صورت معادله $y = f(x)$ داده شده است، معادله تابع می‌خوانیم.

هـــر گاه در توابع حقیقی ذکری از مجموعه دامنه به میان نیامده باشـــد آن‌را بزرگترین زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی اختیار می‌کنیم که در ازای هر عضو از آنها، قانون تابع دارای معنی باشد.

مثـــال ۱: تابـــع $y = f(x) = x^۲$ به هر یک از اعداد حقیقی مربع آن‌را نســـبت می‌دهد. پـــس دامنه f همه عددهای حقیقی است.

مثال ۲: تابع $y = f(x) = \frac{۱}{x}$ به هر یک از اعداد حقیقی غیر از صفر عکس آن عدد را نسبت می‌دهد یعنی مثلاً:

$$x = \sqrt{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad x = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow y = -۳ \quad \text{و} \quad x = ۲ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}$$

در این تابع صفر نمی‌تواند عضو دامنه باشـــد زیرا قانون تابع به‌صورت $\frac{۱}{۰}$ درآمده که بی‌معنی است. بنابراین دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی به‌جز صفر است یعنی: $R - \{۰\}$

۳. تابع‌های مساوی:

دو تابع f و g را مساوی می‌گوییم و می‌نویسیم $f = g$ در صورتی که دامنه آنها یکی بوده و اگر a عضو دلخواهی از این دامنه باشد[1] داشته باشیم:

$$f(a) = g(a)$$

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2$ که دامنه آن اعداد حقیقی است با تابع $g(x) = x^2$ که دامنه آن اعداد طبیعی است درنظر می‌گیریم. این دو تابع مساوی نیستند زیرا دامنه آنها یکی نیست.

مثال ۲: دو تابع $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ در مجموعه اعداد حقیقی مساوی هستند زیرا دامنه هر دو یکی است به‌علاوه برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$f(x) = g(x)$$

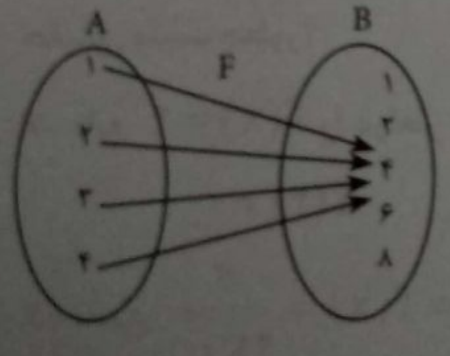
مثال ۳: دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x$ با دامنه $\{0, 1, -1\}$ با هم برابر نیستند.

۴. تابع ثابت:

اگر تابع $f(x)$ چنان باشد که برد آن درست یک عضو داشته باشد آن‌را تابع ثابت می‌خوانیم. به‌ویژه تابع f را در مجموعه اعداد حقیقی ثابت می‌خوانیم. هرگاه یک عدد ثابت a چنان باشد که: $\forall x \in R \Rightarrow f(x) = a$

مثال ۱: تابع $f(x) = 2$ در مجموعه اعداد حقیقی یک تابع ثابت است.

مثال ۲: تابع $f : A \to B$ که در شکل نشان داده شده یک تابع ثابت است زیرا برد آن تنها یک عضو دارد که ۴ می‌باشد.



۱. بعضی از مؤلفین برابری دو تابع را با اندکی اختلاف به‌گونه‌ای دیگر تعریف می‌کنند. آنها شرط برابر هم‌دامنه‌ها را نیز اضافه می‌کنند.

تمرین

۱- مجموعه $A=\{x|$ یکی از حروف الفباست $x\}$ و $B=\{0,1,2,3,4\}$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم f تابعی از A به B باشد. به قسمی که هر عضو مجموعه A تعداد نقاط آن‌را از مجموعه B نظیر نماید.

الف) تساوی‌های زیر را کامل کنید.

f(س) =   f(چ) =   f(ت) =   f(پ) =

ب) برد تابع f را تعیین کنید. آیا این برد با مجموعه B مساوی است؟

ج) دامنه این تابع چند عضو دارد؟ همچنین هم‌دامنه این تابع دارای چند عضو است؟

۲- تابع $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ را درنظر می‌گیریم. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$f(0)=$ $\quad f(\sqrt{2})=$ $\quad f(-3)=$ $\quad f(a)=$ $\quad f(\dfrac{1}{a})=$

۳- آیا قانون $f(x)=2x^2+\dfrac{1}{2}$ در مجموعه اعداد حقیقی یک تابع را مشخص می‌کند؟ در مجموعه اعداد طبیعی چطور؟ چرا؟

۴- تابع $f(x)$ را که به‌صورت $\begin{cases} f(x)=\sqrt{3}-x\ ,\ x\geq 0 \\ f(x)=\sqrt{3}+x\ ,\ x<0 \end{cases}$ تعریف شــده اسـت، درنظر می‌گیریم تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$f(2-\sqrt{3})=$ $\quad f(\sqrt{3}-2)=$ $\quad f(\sqrt{3})=$ $\quad f(-\sqrt{3})=$

۵- آیــا دو تابع $y=\sqrt{x^2}$ و $y=x$ در مجموعه اعداد حقیقی مســاویند؟ چرا؟ در مجموعه اعداد حقیقی مثبت چطور؟

۶- تابع $f(x)=4$ را درنظر بگیرید و تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$f(4)=$ $\quad f(-3)=$ $\quad f(2)=$ $\quad f(-1)=$ $\quad f(16)=$

۷- تابــع $y=f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$ کــه دامنــه آن $A=\{1,2,3,4,5\}$ اســت را درنظــر می‌گیریم. مجموعه زیر را با ذکر عضوها بنویسید.

$B=\{(x,y)\,|\,x\in A, y=f(x)\}$

۸- دامنه مشــترک برای دو تابــع $f(x)=x^2-2x$ و $g(x)=x-2$ را طوری بیابید که در این دامنه دو تابع f و g برابر شوند.

سؤال ۲:

متن ذیل فصلی از یک کتاب درسی دبیرستانی است. آن‌را به دقت مطالعه نموده و خلاصه‌ای از آن‌را در یک یا دو صفحه ارائه دهید.

روابط بین ضریب‌ها و ریشه‌های معادله درجه دوم:

حل نامعادله درجه دوم:

۱. **قضیـــه اصلی:** اگر معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو ریشــه متمایز یا متســاوی باشـد، مجموع آنها مساوی با $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آنها مساوی $\frac{c}{a}$ خواهد بود.

برهان: اولاً اگر معادله درجه دوم دارای دو ریشــه متمایز باشــد، مبین آن یعنی $\Delta = b^۲ - ۴ac$ مثبت است و داریم:

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \text{ و } x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

بنابراین:

$$x' + x^n = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

و از آنجا:

$$x' + x^n = -\frac{b}{a} \qquad (۱)$$

و نیز

$$x'x^n = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^۲ - (\sqrt{\Delta})^۲}{۴a^۲} = \frac{b^۲ - (b^۲ - ۴ac)}{۴a^۲}$$

$$x'x^n = \frac{c}{a} \qquad (۲)$$

ثانیاً اگر معادله درجه دوم دارای ریشه مضاعف باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰$$

باز روابط (۱)و (۲) صحیح هستند. (چرا؟)

مستقیماً نیز می‌توان دید که در این حالت:

$x' = x'' = -\dfrac{b}{2a}$ پس $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$ و $x'x'' = (-\dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{b^4}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$ زیرا در این حالت

$$b^2 = 4ac$$

موارد استعمال قضیه اصلی

الف) بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم:

(بدون حل کردن معادله). در بعضی موارد لازم است بدون محاسبه ریشه‌ها، در اینکه معادله درجه دوم دارای ریشه است یا نه و یا اینکه علامت ریشه‌های آن مثبت یا منفی است تحقیق کنیم.

اکنون به بررسی چگونگی این مطلب می‌پردازیم.

ب) همواره می‌توان بدون حل کردن معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (1)$$

با استفاده از قضیه اصلی فوق در وجود و علامت ریشه‌های آن بحث کرد:

اولاً: اگر $\dfrac{c}{a} < 0$ در این‌صورت a و c مختلف‌العلامه هستند و چنان‌که در شماره ۱۳ فصل دوم دیدیم معادله (۱) دارای دو ریشه متمایز است، این دو ریشه مختلف‌العلامه هستند زیرا حاصل‌ضربشان منفی است.

ثانیاً: اگر $\dfrac{c}{a} = 0$ و نتیجتاً $c = 0$. در این حالت یکی از ریشه‌ها بنابر آنچه در شماره ۷ فصل دوم دیدیم صفر است و ریشه دیگر مساوی است با $-\dfrac{b}{a}$ (چرا؟) بنابراین علامت آن مشخص است.

ثالثاً: اگر $\dfrac{c}{a} > 0$. در این حالت چون مشخص نیست که معادله ریشه دارد یا نه، باید Δ یعنی مبین معادله را تشکیل داد.

اگر $\Delta < 0$ معادله ریشه ندارد.

اگر $\Delta \geq 0$ معادله دارای دو ریشه است که چون حاصل‌ضربشان مثبت است متحدالعلامه هستند و علامت مشترک آنها علامت مجموعشان یعنی $(-\dfrac{b}{a})$ است.

فصل چهارم

۳. **تبصره:** با درنظر گرفتن حالت $\frac{c}{a}<0$ می‌توان تبصره شماره ۱۳ فصل دوم را کامل کرد و گفت:
اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، معادله $ax^{2}+bx+c=0$ دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است.

۴. **خلاصه:** معادله درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ را درنظر گرفته مبین آن‌را Δ و ریشه‌های آن‌را x' و x'' می‌نامیم:

اولاً $\frac{c}{a}<0$ در این‌صورت $x'<0<x''$

ثانیاً $c=0$ در این‌صورت $x'=0$ و $x''=-\frac{b}{a}$. در این‌صورت معادله ریشه ندارد.

ثالثاً
$$\frac{c}{a}>0\left\{\begin{array}{l}\Delta<0\\[2mm] \left.\begin{array}{l}-\frac{b}{a}>0 \text{ در این‌صورت } x'\geq x''>0\\[2mm] -\frac{b}{a}<0 \text{ در این‌صورت } x'\leq x''<0\end{array}\right\}\\[2mm] \Delta\geq 0\end{array}\right.$$

مثال ۱. بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله زیر بدون حل کردن آن.

$$-100x^{2}+x+57=0$$

چون در این معادله a و c مختلف‌العلامه هستند معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است و چون مجموعشان که مساوی $\frac{1}{100}$ است مثبت می‌باشد پس ریشه‌ای که قدرمطلقش بزرگتر است مثبت است.
اگر معادله را حل کنیم، درستی بحث فوق معلوم می‌شود:

$$x''=\frac{-1-151}{-200}=\frac{76}{100}\qquad x'=\frac{-1+151}{-200}=-\frac{75}{100}$$

مثال ۲. بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله زیر بدون حل کردن آن.

(۱)
$$5x^{2}+35x+2=0$$

چون در این معادله a و c متحدالعلامه هستند، نمی‌توانیم حکم کنیم که معادله ریشه دارد یا ندارد و باید مبین معادله را تشکیل دهیم:

$$\Delta=(35)^{2}-4\times5\times2=1185$$

چون این مبین مثبت است معادله دارای دو ریشه متمایز است. چون حاصل‌ضرب این دو ریشه یعنی $\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$ مثبت است، دو ریشه متحدالعلامه هستند. چون مجموع ریشه‌ها یعنی $-\frac{b}{a}=-7$ منفی است، هر دو ریشه منفی هستند.

خلاصه اینکه معادله مفروض دارای دو ریشه منفی است.

(معادله (۱) را حل کنید و درستی بحث فوق را نتیجه بگیرید.)

تمرین

بدون حل کردن معادلات زیر در وجود و علامت ریشه‌های آنها بحث کنید:

۱. $x^2+9x+14=0$

۲. $x^2-6x+8=0$

۳. $x^2-3x+10=0$

۴. $7x^2-49x-126=0$

۵. $7x^2+58x=45$

ب) بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلات درجه دوم پارامتری:

۵. پارامتر: عبارت است از مقدار معلوم و متغیری که ممکن است ضرایب جمله‌های معادله به آن بستگی داشته باشند و می‌توان آن‌را طوری اختیار کرد که معادله دارای جواب معینی باشد یا در شرایط مخصوصی صدق کند. از اینجا معلوم می‌شود که هر معادله پارامتری در حقیقت بی‌نهایت معادله است که به‌ازای مقادیر مختلفی ممکن است به پارامتر نسبت داد، به‌وجود می‌آیند.

۶. برای تعیین علامت ریشه‌های یک معادله پارامتری، مبین معادله و حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم و علامت هر یک از آنها را مشخص می‌کنیم و بین هر دو مقدار مهم[1] که به پارامتر نسبت داده شود، علامت مبین (Δ) و علامت حاصل‌ضرب دو ریشه $(e)=\frac{c}{a}$ و علامت مجموع دو ریشه $(S)=\frac{-b}{a}$ را تحقیق و علامت ریشه‌ها را مثل معادلات با ضرایب عددی معین می‌کنیم.

۷. مثال ۱: مطلوبست بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم زیر برحسب مقادیر مختلف m

$$f(x)=(m-3)x^2-2mx+m+2=0$$

۱. مقادیر مهم پارامتر، مقادیری هستند که مبین معادله یا حاصل‌ضرب دو ریشه یا مجموع ...

Scanned by CamScanner

حل: مبین معادله و مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم و علامت آنها را معین می‌کنیم.

$$\Delta' = m^۲ - (m-۳)(m+۲) = m+۶$$

مبین به‌ازای $m < -۶$ منفی و به‌ازای $m > -۶$ مثبت است.

حاصل‌ضرب ریشه‌ها عبارت است از: $\frac{c}{a} = \frac{m+۲}{m-۳}$.

علامت $\frac{c}{a}$ همان علامت $(m-۳)(m+۲)$ است و علامت این عبارت، به‌ازای $-۲ < m < ۳$ منفی و به‌ازای $m > ۳$ یا $m < -۲$ مثبت است.

مجموع ریشه‌ها عبارت است از: $-\frac{b}{a} = \frac{۲m}{m-۳}$ که علامت آن، همان علامت $m(m-۳)$ می‌باشد و علامت این عبارت، به‌ازای $۰ < m < ۳$ منفی و به‌ازای $m > ۳$ یا $m < ۰$ مثبت است.

مقادیر مهم m عبارت‌اند از $-۶, -۲, ۰$ و ۳ و بنابراین، بحث زیر نتیجه می‌شود:

۱. $m < -۶$؛ در این حالت، معادله ریشه ندارد.

۲. $m = -۶$؛ در این حالت، مبین صفر و معادله دارای یک ریشه مضاعف است که مقدار آن، مساوی است با $-\frac{b}{۲a} = \frac{m}{m-۳}$ که به‌ازای $m = -۶$ مقدار عددی آن، $\frac{۲}{۳}$ است؛ پس معادله یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

۳. $-۶ < m < -۲$؛ در این حالت، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ مثبت و $-\frac{b}{a}$ مثبت است؛ پس معادله دارای دو ریشه مثبت است.

۴. $m = -۲$؛ در این حالت، حاصل‌ضرب دو ریشه صفر می‌باشد و معادله تبدیل می‌شود به معادله عددی $-۵x^۲ + ۴x = ۰$ که یک ریشه آن، صفر و یک ریشه آن، $\frac{۴}{۵}$ است.

۵. $-۲ < m < ۰$؛ در این حالت، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ منفی و $-\frac{b}{a}$ مثبت است؛ پس معادله دو ریشه مختلف‌العلامه دارد و ریشه مثبت بزرگتر از قدرمطلق ریشه منفی است.

۶. $m = ۰$؛ دراین حالت، مجموع دو ریشه صفر می‌باشد و معادله تبدیل می‌شود به معادله عددی $-۳x^۲ + ۲ = ۰$ که دارای دو ریشه قرینه $\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ است.

۷. $0 < m < 3$؛ در این حالت، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ منفی و $-\frac{b}{a}$ نیز منفی است و معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است و قدرمطلق ریشه منفی بیشتر است.

۸. $m = 3$؛ در این حالت، معادله تبدیل می‌شود به معادله درجه اول $-6x + 5 = 0$ که فقط یک ریشه $x = \frac{5}{6}$ دارد.

۹. $m > 3$؛ در این حالت، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ مثبت و $-\frac{b}{a}$ نیز مثبت است و معادله دارای دو ریشه مثبت می‌باشد.

۸. مثال ۲: چه مقادیری باید به m نسبت داد تا معادله زیر دارای دو ریشه مثبت باشد؟

$$(1-m)x^2 - 6x + 3 = 0$$

برای آنکه معادله دارای دو ریشه مثبت باشد، باید:

- اولاً $\Delta \geq 0$ تا معادله دو ریشه داشته باشد.
- ثانیاً $\frac{c}{a} > 0$ تا دو ریشه متحدالعلامه باشند.
- ثالثاً $-\frac{b}{a} > 0$ تا هر دو ریشه مثبت باشند.

پس باید داشته باشیم:

(۱) $$\Delta' = 9 - 3(1-m) \geq 0$$

(۲) $$\frac{c}{a} = \frac{3}{1-m} > 0$$

(۳) $$-\frac{b}{a} = \frac{6}{1-m} > 0$$

از حل نامساوی (۱) معلوم می‌شود که باید $m \geq -2$ و از حل نامساوی (۲) معلوم می‌شود که باید $m < 1$ و از حل نامساوی (۳) حاصل می‌شود $m < 1$؛ بنابراین باید داشته باشیم: $-2 \leq m < 1$

۹. **تبصره:** برای سهولت درک مطلب، بهتر است جدولی تشکیل دهیم و مقادیر مهم پارامتر را به ترتیبی که از کوچکترین آنها شروع و به بزرگترین آنها ختم شود از چپ به راست در آن بنویسیم و در فاصله بین هر دو مقدار مهم متوالی، علامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را مشخص کرده علامت ریشه‌ها را از روی جدول در هر فاصله معین کنیم.

۱۰. مثال ۳: مطلوبست بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم:

$$(m+۱)x^{۲}-۸x+m+۱۰=۰$$

حل: مبین معادله و مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta'=۱۶-(m+۱)^{۲}=-m^{۲}-۲m+۱۵=-(m^{۲}+۲m-۱۵)=-(m+۵)(m-۳)$$

که به‌ازای $m=-۵$ و $m=۳$ صفر می‌شود و به‌ازای مقادیر m محصور مابین ۳ و ۵- مثبت و در غیر این موارد منفی است.

$P=\frac{c}{a}=\frac{m+۱}{m+۱}=۱$ همواره مثبت است.

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{۸}{m+۱}$$

که علامت آن، همان علامت عبارت $m+۱$ می‌باشد و این عبارت، به‌ازای $m=-۱$ صفر و به‌ازای $m<-۱$ منفی و در غیر این موارد مثبت است.

پس جدول زیر حاصل می‌شود:

m	مقادیر کوچکتر از ۵-	۵-		۱-		۳	مقادیر بزرگتر از ۳
Δ	-		+	نامعین	+		-
$\frac{c}{a}$	+		+	نامعین	+		+
$-\frac{b}{a}$	-		-		+		+
	ریشه وجود ندارد	ریشه مضاعف ۱-	دو ریشه مثبت	یک ریشه‌ی x=۰	دو ریشه منفی	ریشه مضاعف ۱	ریشه وجود ندارد

تمرین

در وجود و علامت ریشه‌های معادلات زیر برحسب m بحث کنید:

۱. $x^{۲}-۴x+m=۰$

۲. $x^{۲}-۲mx+۳m=۰$

۳. $mx^2 - 3x + m = 0$

۴. $mx^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

۵. مقدار m را طوری معین کنید که معادله:

$$3x^2 - 10x + m = 0$$

اولاً دو ریشه متمایز داشته باشد. ثانیاً دو ریشه مثبت داشته باشد. ثالثاً یکی از ریشه‌های آن صفر باشد. رابعاً ریشه‌های آن عکس یکدیگر باشد. خامساً دو ریشه مختلف‌العلامه داشته باشد. سادساً ریشه نداشته باشد.

۶. مقدار t را طوری معین کنید که معادله:

$$x^2 + 4x + t + 2 = 0$$

اولاً دو ریشـــه متمایز داشـــته باشد. ثانیاً دو ریشه منفی داشته باشد. ثالثاً یک ریشه مضاعف داشته باشد. رابعاً یکی از ریشه‌های آن صفر باشد.

۷. مقدار m را طوری معین کنید که معادله:

$$(m+4)x^2 - 2(m-2)x + m - 4 = 0$$

اولاً دو ریشه متمایز داشته باشد. ثانیاً دو ریشه قرینه یکدیگر داشته باشد.

ثالثاً دو ریشه عکس یکدیگر داشته باشد. رابعاً یک ریشه مساوی صفر داشته باشد و با این فرض مقدار ریشه دیگرش را حساب کنید.

ج) تعیین دو عدد که مجموعشان معلوم و حاصل‌ضربشان نیز معلوم باشد.

۱۱. مســـئله: دو عدد معلوم S و P را درنظر گرفته می‌خواهیم دو عدد α و β را بیابیم به قســـمی که داشته باشیم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=S \\ \alpha\cdot\beta=P\end{cases} \qquad (1)$$

اگر دو عدد α و β با این شرایط وجود داشته باشند، واضح است که می‌توان آنها را ریشه‌های معادله زیر دانست:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

و یا:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

و یا با درنظر گرفتن روابط (۱):

$$x^2-Sx+P=0$$

بنابراین:

اگر دو عدد وجود داشته باشند که مجموعشان S و حاصل‌ضربشان P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

حث: اولاً اگر $S^2 - 4P > 0$، مسئله دارای دو جواب است که عبارت‌اند از:

$$\beta = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

نیاً اگر $S^2 - 4P = 0$ داریم: $\alpha = \beta = \frac{S}{2}$

لثاً اگر $S^2 - 4P < 0$، مسئله جواب ندارد.

ثال ۱: تعیین دو عدد که مجموعشان $\frac{13}{6}$ و حاصل‌ضربشان ۱ باشد. اگر چنین دو عددی وجود داشته شند، ریشه‌های معادله زیر هستند.

$$x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$$

یا:

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

از آنجا که

$$x'' = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad x' = \frac{2}{3}$$

ثال ۲: تعیین دو عدد که مجموعشان ۱۲ و حاصل‌ضربشان ۳۶ باشد.

ر این حالت $S = 12$ و $P = 36$. اگر چنین دو عددی وجود داشته باشند، ریشه‌های این معادله هستند:

(1)

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

داریم:

$$\Delta = S^2 - 4P = 144 - 144 = 0$$

معادله (۱) که عددهای مطلوب ریشه‌های آن هستند دارای ریشه مضاعف $x' = x'' = 6$ است، پس دو عدد مطلوب ۶ و ۶ می‌باشند.

تمرین

مجموع دو عدد S و حاصل‌ضربشان P معلوم است. آن دو عدد را در هر یک از حالات زیر حساب کنید.

۱. $S=-۳۰$, $P=۲۲۱$

۲. $S=۱۵$, $P=۲۶$

۳. $S=۱۶۹$, $P=۶۳۲۸$

د) تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن دو عدد معلوم باشند.

۱۲. اگر ریشه‌های معادله درجه دومی دو عدد معلوم α و β باشند، آن معادله هم‌ارز با دو معادله زیر است:

$$\begin{cases} x-\alpha=۰ \\ x-\beta=۰ \end{cases}$$

پس معادله مطلوب عبارت است از:

$$x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$$

مثال: می‌خواهیم معادله درجه دومی تشـکیل دهیم که ریشه‌های آن ۲m و $\frac{m}{۲}$ باشند. اگر ریشه‌ها را x' و x'' بنامیم داریم:

$$x'+x''=۲m+\frac{m}{۲}=\frac{۵m}{۲}$$

و

$$x'x''=۲m\times\frac{m}{۲}=m^۲$$

پس معادله مطلوب عبارت است از:

$$x^۲-\frac{۵m}{۲}x+m^۲=۰$$

و یا

$$۲x^۲-۵mx+۲m^۲=۰$$

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش دو عدد زیر باشند:

۱. $-۲, -۵$

۲. $-\frac{۱}{۲}, ۲$

۳. $۳+\sqrt{۲}, ۳-\sqrt{۲}$

۴. $(a+b), -(a+b)$

۵. $(a+b), \frac{۱}{a+b}$

۶. $m+۳, \frac{۲m-۵}{۲}$

۷. $m+\sqrt{m^۲-۳}, m-\sqrt{m^۲-۳}$

ه) محاسبه عباراتی که برحسب ریشه‌های معادله درجه دوم متقارن هستند.

۱۳. تعریف: یک عبارت جبری، که شامل دو حرف a و b باشد، در صورتی برحسب a و b متقارن نامیده می‌شود که اگر a را به b و b را به a تبدیل کنیم، در آن عبارت تغییری حاصل نشود.

مثلاً عبارات زیر برحسب a و b متقارن هستند:

$$(a-۱)(b-۱),\ a^۲+b^۲,\ \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b},\ a+b$$

سؤال: کدامیک از عبارات زیر برحسب a و b متقارن است؟ چرا؟

$$a^۳+b^۳,\ a^۲-b^۲,\ \frac{۱}{a}-\frac{۱}{b},\ a-b,\ x^۲ya^۳b^۳$$

ثابت می‌کنند که همواره می‌توان عبارتی را که برحسب x' و x'' یعنی ریشه‌های معادله درجه دوم، متقارن باشند برحسب $S=x'+x''$ و $P=x'x''$ حساب کرد. ما این مطلب را با ذکر چند مثال نشان می‌دهیم:

ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ را x' و x'' و مجموع آنها را S و حاصل‌ضربشان را P می‌نامیم.

محاسبه $x'^۲+x''^۲$ برحسب S و P.

$$x'^۲+x''^۲=(x'+x'')^۲-۲x'x''=S^۲-۲P$$

محاسبه $\frac{۱}{x''}+\frac{۱}{x'}$ برحسب S و P.

$$\frac{۱}{x'}+\frac{۱}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{S}{P}$$

محاسبه $x'^۳+x''^۳$ برحسب S و P.

از اتحاد:

$$(x'+x'')^۳=x'^۳+x''^۳+۳x'x''(x'+x'')$$

نتیجه می‌شود:

$$x'^۳+x''^۳=(x'+x'')^۳-۳x'x''(x'+x'')=S^۳-۳PS$$

۱۴. مسئله: می‌خواهیم مقدار m را به قسمی تعیین کنیم که معادله

(۱)

$$x^۲+mx+m+۷=۰$$

دارای دو ریشه باشد که در رابطه

(۲)

$$x'^۲+x''^۲=۱۰$$

صدق کند.

حل: اگر معادله (۱) دارای دو ریشه x' و x'' باشد، داریم:

$$x'^۲+x''^۲=S^۲-۲P=(-m)^۲-۲(m+۷)$$

و یا

$$x'^۲+x''^۲=m^۲-۲m-۱۴$$

و چون این مقدار را در رابطه (۲) قرار دهیم، حاصل می‌شود.

(۳) $$m^۲-۲m-۲۴=۰$$

از حل این معادله دو مقدار ۴− و ۶+ برای m به‌دست می‌آید.

به‌ازای $m=-۴$ معادله (۱) به‌صورت $x^۲-۴x-۳=۰$ درمی‌آید که ریشه‌های آن $x'=۱$ و $x''=۳$ هستند و در رابطه (۲) صدق می‌کند.

به‌ازای $m=۶$ معادله (۱) به‌صورت $x^۲+۶x+۱۳=۰$ درمی‌آید که ریشه ندارد. پس تنها جواب مسئله در مجموعه اعداد حقیقی $m=-۴$ است.

تمرین

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^۲ - ۳x - ۳ = ۰$ باشند مقدار عبارات زیر را حساب کنید.

۱. $\dfrac{۱}{x''^۲} + \dfrac{۱}{x'^۲}$

۲. $\dfrac{۱}{x''^۳} + \dfrac{۱}{x'^۳}$

۳. $(x' - ۳)^۲ + (x'' - ۳)^۲$

۴. $(۲x' - ۳x'') + (۲x'' - ۳x')$

۵. $\dfrac{x'' + ۳}{x' + ۱} + \dfrac{x' + ۳}{x'' + ۱}$

۶. $x''^۴ + x'^۴$

در هر یک از مسائل زیر مقدار m را طوری تعیین کنید که ریشه‌های معادله (۱) در رابطه (۲) صدق کنند:

۷. $\begin{cases} mx^۲ - ۲(m-۲)x + m - ۳ = ۰ & (۱) \\ ۴(x' + x'') = ۷x'x'' & (۲) \end{cases}$

۸. $\begin{cases} (m-۱)x^۲ - ۲mx + m + ۱ = ۰ & (۱) \\ \dfrac{۱}{x'^۲} + \dfrac{۱}{x''^۲} = \dfrac{۵}{۴} & (۲) \end{cases}$

۹. حل یک مسئله نمونه:

۱۵. مسئله: مقدار m را طوری تعیین کنید که معادله

$x^۲ - (m + ۵)x - m + ۶ = ۰$

(۱)

دارای دو ریشه باشد که در رابطه

$۲x' + ۳x'' = ۱۳$

(۳)

صادق باشند.

در این‌گونه مسائل که رابطه مفروض برحسب x' و x'' متقارن نیست می‌توان ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب ریشـه‌ها را برحسـب m حسـاب کرد تا دو رابطه به‌دسـت آید. این دو رابطه و رابطه مفروض سـه معادله سه‌مجهولی برحسب x' و x'' و m تشکیل می‌دهند که از حل آنها هم مقدار m و هم ریشه‌های معادله در صورت وجود به‌دست می‌آیند.

حل: بنا به فرض باید داشته باشیم:

(۲)

$$2x'+3x''=13$$

از طرف دیگر در معادله (۱) داریم:

(۳)

$$x'+x''=m+5$$

(۴)

$$x'x''=-m+6$$

اینک از معادلات (۲) و (۳) که برحسب مجهول‌های x' و x'' از درجه اول هستند حل می‌کنیم حاصل می‌شود:

(۵)

$$x''=3-2m\ ,\ x'=3m+2$$

این مقادیر را در رابطه (۴) قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود:

$$(3m+2)(3-2m)=-m+6$$

و یا

$$-6m^2+6m=0$$

از این معادله دو مقدار $m=0$ و $m=1$ برای m به‌دست می‌آید.

اگر این مقادیر را در روابط (۵) قرار دهیم، x' و x'' حساب می‌شود:

به‌ازای $m=0$ داریم $x'=2$ و $x''=3$

به‌ازای $m=1$ داریم $x'=5$ و $x''=1$

به این ترتیب معلوم می‌شود که مسئله دارای دو دستگاه جواب است.

(تحقیق کنید که ریشه‌های فوق در معادله صادق هستند.)

تمرین

در هر یک از تمرین‌های زیر مقدار m را به قسمی معین کنید که معادله (۱) دارای دو ریشه باشد که در رابطه (۲) صدق کند:

.۱
$$\begin{cases} x^2 - 5x + m = 0 & (1) \\ 3x' - 2x'' = 0 & (2) \end{cases}$$

.۲
$$\begin{cases} mx^2 - 2(m-1)x + m = 0 & (1) \\ x' + 2x'' = 3 & (2) \end{cases}$$

.۳
$$\begin{cases} (m-1)x^2 - 2mx - 3m + 1 = 0 & (1) \\ 2x' + 3x'' = 5 & (2) \end{cases}$$

ز. تجزیه سه‌جمله‌ای درجه دوم:

۱۶. سه‌جمله‌ای درجه دوم عبارتی است به‌صورت:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ , \ a \neq 0 \qquad (1)$$

تبصره: اگر $b = 0$ یا $c = 0$، عبارت فوق به یک دوجمله‌ای (یا یک‌جمله‌ای) درجه دوم تبدیل می‌شود اما به بحث ما خللی وارد نخواهد شد.

اکنون معادله زیر را درنظر می‌گیریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

ریشه‌های معادله (۲) را ریشه‌های سه‌جمله‌ای (۱) یا صفرکننده‌های سه‌جمله‌ای (۱) می‌نامند؛ مبین معادله (۲) مبین سه‌جمله‌ای (۱) نامیده می‌شود.

برای تجزیه سه‌جمله‌ای درجه دوم به حاصل‌ضرب عامل‌های درجه اول از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه: اولاً اگر معادله

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

دارای دو ریشه متمایز x' و x'' باشد، سه‌جمله‌ای $ax^2 + bx + c$ به حاصل‌ضرب a و دو عبارت درجه اول تجزیه می‌شود و داریم:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

ثانیاً اگر معادله (۱) دارای یک ریشه مضاعف باشد، سه‌جمله‌ای $f(x)$ به حاصل‌ضرب a در مربع کامل یک

عبارت درجه اول تبدیل می‌گردد و داریم:

$$ax^{2}+bx+c=a(x-x')^{2}$$

برهان: اولاً فرض می‌کنیم:

$$\Delta=b^{2}-4ac>0$$

می‌توان نوشت:

(۲)
$$ax^{2}+bx+c=a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

اما چون Δ بزرگتر از صفر فرض شده است، معادله (۱) دو ریشه دارد و داریم:

$$x'x''=\frac{c}{a}\ ,\ x'+x''=-\frac{b}{a}$$

پس رابطه (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$=a[x^{2}-(x'+x'')x+x'x'']$$

$$=a(x^{2}-xx'-xx''+x'x'')$$

$$=a[x(x-x')-x''(x-x')]=a(x-x')(x-x'')$$

یعنی:

$$=a(x-x')(x-x'')$$

و قضیه در این حالت ثابت است.

ثانیاً فرض کنیم:

$$\Delta=b^{2}-4ac=0$$

در این‌صورت داریم: $c=\frac{b^{2}}{4a}$ و بنابراین رابطه (۲) چنین نوشته می‌شود:

$$a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x+\frac{b}{2a})^{2}$$

در این حالت معادله (۱) یک ریشه مضاعف دارد که آن‌را x' می‌نامیم. می‌دانیم که $x'=-\frac{b}{2a}$، پس رابطه اخیر چنین نوشته می‌شود:

$$a(x+x')^{2}$$

و قضیه در این حالت نیز ثابت است.

تبصره: در صورتی‌که $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$، معادله (۱) ریشه ندارد و نمی‌توان عبارت (۱) را به حاصل‌ضرب عامل‌های درجه اول برحسب x تجزیه کرد. (چرا؟)، اما چون در این حالت داریم $۴ac - b^۲ > ۰$، رابطه (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$ax^۲ + bx + c = a(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a[(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲}) + (\frac{c}{a} - \frac{b^۲}{۴a^۲})]$$

$$= a[(x + \frac{b}{۲a})^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a^۲}]$$

و به‌طور خلاصه:

$$a[(x + \frac{b}{۲a})^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a^۲}] \quad (۳)$$

و با توجه به اینکه در رابطه (۳) مقدار داخل کروشه مجموع دو مقدار مثبت (چرا؟) و در نتیجه به‌ازای جمیع مقادیر x مثبت است، واضح می‌شود که:

اگر در یک سه‌جمله‌ای درجه دوم مقدار $b^۲ - ۴ac$ منفی باشد، مقدار آن سه‌جمله‌ای برابر است با حاصل‌ضرب a در یک عبارت مثبت.

مثال ۱. تجزیه سه‌جمله‌ای:

$$۶۳x^۲ + ۲۵x + ۲$$

ریشه‌های معادله $۶۳x^۲ + ۲۵x + ۲ = ۰$ عبارت‌اند از $x' = -\frac{۱}{۹}$ و $x'' = -\frac{۲}{۷}$، پس سه‌جمله‌ای $f(x)$ به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$۶۳(x + \frac{۱}{۹})(x + \frac{۲}{۷}) = (۹x + ۱)(۷x + ۲)$$

مثال ۲. تجزیه سه‌جمله‌ای:

$$g(x) = ۵x^۲ + ۳۰x + ۴۵$$

مبین معادله: $۵x^۲ + ۳۰x + ۴۵ = ۰$ صفر است و ریشه مضاعف این سه‌جمله‌ای $x' = x'' = -۳$ می‌باشد.

پس سه‌جمله‌ای به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$۵(x + ۳)^۲$$

مثال ۳. سه‌جمله‌ای $۳x^۲ - ۳x + ۸$ ریشه حقیقی ندارد (چرا؟) و نمی‌توان آن‌را به حاصل‌ضرب عامل‌های درجه اول تجزیه کرد، اما طبق رابطه (۳) می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت:

$$۳x^۲ - ۳x + ۸ = ۳[(x - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۸۷}{۳۶}]$$

تمرین

هر یک از سه‌جمله‌ای‌های زیر را در صورت امکان به حاصل‌ضرب عامل‌های درجه اول تجزیه کنید:

۱. $8x^2 + 17x + 2$

۲. $4x^2 - 21x + 20$

۳. $24x^2 + 5x - 14$

۴. $12x^2 + 32x + 21$

۵. $7x^2 - 24x + 20$

۶. $24x^2 + 38x - 25$

۷. $-33x^2 + 10x + 8$

۸. $-25x^2 + 58x - 16$

۹. $16t^2 + 40 - 133t$

۱۰. $27(\frac{x}{y})^2 - 60(\frac{x}{y}) + 28$

ح. علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم:

۱۷. سه‌جمله‌ای درجه دوم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

را درنظر می‌گیریم به طوری‌که در شماره ۱۶ فصل دیدیم، برحسب آنکه در این سه‌جمله‌ای مقدار $b^2 - 4ac$ منفی یا صفر یا مثبت باشد، سه‌جمله‌ای ریشه نداشته یا یک ریشه مضاعف $x' = -\frac{b}{2a}$ و یا دو ریشه متمایز x' و x'' خواهد داشت و می‌توان آن‌را به ترتیب به یکی از سه صورت زیر نوشت:

(۱)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}]$$

(۲)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 = a(x - x')^2$$

(۳)

$$f(x) = ax^2 + bx = c = a(x - x')(x - x'')$$

واضح است در حالاتی که سه‌جمله‌ای درجه دوم یک ریشه مضاعف یا دو ریشه متمایز داشته باشد، مقدار عددی سه‌جمله‌ای فقط به‌ازای این ریشه‌ها برابر با صفر خواهد شد و به‌ازای سایر مقادیر x مخالف با صفر است. حال برحسب آنکه $b^2 - 4ac$ منفی یا صفر و یا مثبت باشد، برای تعیین علامت سه‌جمله‌ای سه حالت تمیز می‌دهیم.

حالت اول: $b^2 - 4ac < 0$

در این حالت با توجه به تبصره مربوط به قضیه‌ای که ضمن شماره ۱۶ همین فصل آوردیم، گوییم چون در رابطه (۱) داریم $a \neq 0$ و مقدار داخل کروشه به‌ازای جمیع مقادیر x مثبت است، پس سه‌جمله‌ای به‌ازای هیچ مقدار از x صفر نمی‌شود و علامت سه‌جمله‌ای در این حالت همواره همان علامت a می‌باشد.

پس: هرگاه مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم منفی باشد، علامت سه‌جمله‌ای به‌ازای جمع مقادیر x همان علامت a است.

حالت دوم: $b^2 - 4ac = 0$

در این حالت با توجه به رابطه (۲)، سه‌جمله‌ای به‌صورت $a(x-x')$ درمی‌آید که در آن $(x-x')^2$ به‌ازای جمع مقادیر x به‌جز ریشه مثبت بوده و در نتیجه علامت $a(x-x')^2$ همان علامت a است.

پس: هرگاه مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم صفر باشد، علامت سه‌جمله‌ای به‌ازای جمیع مقادیر x به‌غیر از ریشه همان علامت a است (به‌ازای ریشه برابر صفر است.)

حالت سوم: $b^2 - 4ac > 0$

در این حالت با توجه به رابطه (۳) سه‌جمله‌ای به‌صورت $a(x-x')(x-x'')$ درمی‌آید و برای تعیین علامت آن با فرض $x' > x''$ سه حالت را تمیز می‌دهیم.

اولاً اگر مقدار عددی x از ریشه x' بزرگتر باشد، $x-x'$ و $x-x''$ هر دو مثبت هستند و حاصل‌ضرب آنها هم مثبت است و علامت سه‌جمله‌ای همان علامت a است.

ثانیاً اگر مقدار عددی x از x' کوچکتر ولی از x'' بزرگتر باشد، $x-x'$ منفی ولی $x-x''$ مثبت است. پس حاصل‌ضرب آنها منفی است. اگر a منفی باشد، سه‌جمله‌ای مثبت است و اگر a مثبت باشد، سه‌جمله‌ای منفی است، پس علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم مخالف علامت a است.

ثالثاً اگر مقدار عددی x از x'' کوچکتر باشد، $x-x'$ و $x-x''$ هر دو منفی و حاصل‌ضرب آنها مثبت است و علامت سه‌جمله‌ای همان علامت a است و بالاخره به‌ازای $x = x'$ و $x = x''$ سه‌جمله‌ای درجه دوم صفر می‌شود.

الف: $x'' < x', a > ۰$

x	مقادیر کوچکتر از x''	x''		x'	مقادیر بزرگتر از x'
$ax^۲ + bx + c$	+	۰	-	۰	+

ب: $x'' < x', a < ۰$

x	مقادیر کوچکتر از x''	x''		x'	مقادیر بزرگتر از x'
$ax^۲ + bx + c$	-	۰	+	۰	-

پس: هرگاه سه‌جمله‌ای درجه دوم مثبت باشد، علامت سه‌جمله‌ای به‌ازای مقادیر عددی x از هر دو ریشه بزرگتر یا از هر دو ریشه کوچکتر باشد همان علامت a است. ولی به‌ازای اعدادی که مابین دو ریشه هستند (از یکی کوچکتر و از دیگری بزرگترند)، علامت سه‌جمله‌ای مخالف علامت a است.

معمولاً مقادیری از x را که از هر دو ریشه بزرگتر یا از هر دو ریشه کوچکترند مقادیر خارج دو ریشه و مقادیری که مابین دو ریشه هستند داخل ریشه گویند.

مثال ۱. به‌ازای مقادیر مختلف x، علامت سه‌جمله‌ای $۲x^۲ - ۵x - ۳$ را تعیین کنید.

$$۲x^۲ - ۵x - ۳ = ۰ \quad x = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۲۴}}{۴} \begin{cases} x' = \dfrac{۵ + ۷}{۴} = ۳ \\ x'' = \dfrac{۵ - ۷}{۴} = -\dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

x'	مقادیر کوچکتر از $-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$		۳	مقادیر بزرگتر از ۳
$۲x^۲ - ۵x - ۳$	+	۰	-	۰	+

مثال ۲: به‌ازای مقادیر مختلف x، علامت سه‌جمله‌ای $-۲x^۲ - ۵x + ۳$ را تعیین کنید.

$$-۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰ \quad x = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۲۴}}{-۴} \begin{cases} x' = \dfrac{۱}{۲} \\ x'' = -۳ \end{cases}$$

x	مقادیر کوچکتر از -۳	-۳		$\frac{۱}{۲}$	مقادیر بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$
$-۲x^۲ - ۵x + ۳$	-	۰	+	۰	-

ط. حل نامعادلات درجه دوم:

۱۸. هر نامعادله که پس از نقل تمام جمله‌ها به یک طرف و اختصار به یکی از دو صورت کلی:

$$ax^{2}+bx+c>0 \quad (1) \quad \text{یا} \quad ax^{2}+bx+c<0 \quad (2)$$

درآید، نامعادله درجه دوم نامیده می‌شود.

مقصود از حل نامعادلات به صورت‌های (۱) یا (۲) تعیین همه اعدادی است که چون به‌جای x گذارده شوند طرف اول نامعادله (۱) را مثبت یا (۲) را منفی کند. به عبارت دیگر، باید مقادیری از x را معین ساخت که به‌ازای آنها یک سه‌جمله‌ای درجه دوم مثبت یا منفی باشد.

مثال ۱: مطلوبست حل نامعادله $x^{2}+6x-7<0$

حل: معادله $x^{2}+6x-7=0$ دارای دو ریشه $x'=1$ و $x''=-7$ است و چون ضریب جمله درجه دوم مثبت است، سه‌جمله‌ای طرف اول به‌ازای عددهایی که مابین ۱ و ۷- باشند منفی خواهد بود.

مثال ۲: مطلوبست حل نامعادله $x^{2}-7x+10>0$

حل: چون سه‌جمله‌ای $x^{2}-7x+10$ دو جواب $x'=5$ و $x''=2$ دارد و از طرفی ضریب x^{2} مثبت است، پس به‌ازای عددهایی که از ۵ بزرگتر باشند یا عددهایی که از ۲ کوچکتر باشند، سه‌جمله‌ای طرف اول مثبت می‌شود:

$x>5$ یا $x<2$

مثال ۳: مطلوبست حل نامعادله $-x^{2}+x-4>0$

حل: مبین سه‌جمله‌ای طرف اول منفی است پس علامت سه‌جمله‌ای همواره علامت ضریب x^{2} می‌باشد، یعنی همیشه منفی است، بنابراین به‌ازای تمام اعدادی که به x نسبت داده شود نامعادله برقرار است.

۱۹. حل نامعادلاتی که یک طرف آنها حاصل‌ضرب چند عبارت درجه اول یا دوم است.

برای حل نامعادلاتی که به‌صورت کلی $A\times B\times C\times D\times\cdots>0$ باشند (A , B , C و... چندجمله‌ای‌های درجه اول یا دوم می‌باشند) علامت هر یک از عبارت‌های C , B , A را جداگانه معین و همه مقادیر x را که به‌ازای آنها هر یک از عبارت‌های مزبور مثبت یا منفی است تعیین کرده سپس از روی آنها علامت حاصل‌ضربشان را معین می‌سازیم.

برای سهولت عمل بهتر این است که جواب‌های هر یک از چند جمله‌ای‌ها را معین کنیم و این ریشه‌ها را به ترتیبی که از کوچکترین آنها شروع و به بزرگترین آنها ختم شود در جدولی از چپ به راست بنویسیم و در فاصله مابین هر دو عدد متوالی، علامت هر عبارت و علامت حاصل‌ضرب را معین کنیم.

مثال: مطلوبست حل نامعادله $(x+1)(3-2x)(2x^{2}-8)>0$.

برای حل نامعادله، جدول زیر را رسم می‌کنیم:

x	مقادیر کوچکتر از ۲−	۲−		۱−		$\frac{۳}{۲}$		۲	مقادیر بزرگتر از ۲
علامت $x+۱$	−		−		+		+		+
علامت $۳-۲x$	+		+		+		−		−
علامت $۲x^۲-۸$	+		−		−		−		+
	−		+		−		+		−

از این جدول معلوم می‌شود که به‌ازای $-۲ < x < -۱$ و $\frac{۳}{۲} < x < ۲$ طرف اول نامعادله مفروض مثبت می‌باشد.

۲۰. نامعادلات کسری: نامعادله‌ای است به‌صورت $\frac{f(x)}{g(x)} > ۰$ که صورت و مخرج آن هر دو یا تنها مخرج آن شامل حرف مجهول باشد. برای حل این نامعادلات، حتی‌المقدور باید صورت و مخرج را به حاصل‌ضرب عوامل درجه اول یا دوم تجزیه کرد، سپس علامت هر عبارت و علامت حاصل‌ضرب و در نتیجه علامت کسر را مشخص کنیم.

تبصره ۱: هیچ‌وقت در حل نامعادلات کسری نباید از مخرج کسر صرف‌نظر کرد؛ زیرا این مخرج نیز تغییر علامت می‌دهد و علامت کسر به علامت مخرج هم بستگی دارد. مگر اینکه مطمئن باشیم که علامت مخرج همواره مثبت است، مثل کسری که مخرج آن مجذور کامل باشد که در این‌صورت علامت کسر همواره هم‌علامت با صورت است.

اگر مخرج کسر همواره منفی باشد آنگاه علامت کسر همواره مخالف علامت صورت کسر خواهد بود.

تبصره ۲: در حل نامعادلات کسری باید این نکته را درنظر داشت که علامت حاصل‌ضرب دو مقدار، همیشه با علامت نسبت آنها یکی است. بنابراین بهتر است به‌جای تعیین علامت کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ علامت حاصل‌ضرب $f(x) \times g(x)$ را معین کنیم، البته باید متوجه بود که به‌ازای ریشه‌های معادله $g(x) = ۰$ کسر فوق نامعین است.

مثال: مطلوب است حل نامعادله $\frac{-x^۲+۳x+۱۰}{x^۳-۱}$

حل: صورت و مخرج کسر طرف اول نامعادله را به حاصل‌ضرب عوامل تجزیه می‌کنیم:

$$-x^۲+۳x+۱۰ = -(x+۲)(x-۵)$$
$$=(x+۲)(۵-x)$$
$$(x^۳-۱) = (x-۱)(x^۲+x+۱)$$

علامت کسر طرف اول نامعادله مفروض همان علامت حاصل‌ضرب:

$$(x+2)(5-x)(x-1)(x^2+x+1)$$

می‌باشد. پس علامت عبارت هر پرانتز را جداگانه معین می‌کنیم و نتایج حاصل را به‌ترتیبی در جدولی می‌نویسیم و فواصلی را که در آنها حاصل‌ضرب مفروض مثبت است معین می‌کنیم:

x	مقادیر کوچکتر از ۲−	۲− تا ۱	۱ تا ۵	مقادیر بزرگتر از ۵
علامت $x+2$	−	+	+	+
علامت $5-x$	+	+	+	−
علامت $x-1$	−	−	+	+
علامت x^2+x+1	+	+	+	+
نتیجه	+	−	+	−
	جواب		جواب نامعین	

از این جدول معلوم می‌شود که علامت کسر مفروض به‌ازای تمام اعداد کوچکتر از ۲− و به‌ازای مقادیر $1<x<5$ مثبت است.

۲۱. تبصره: در بسیاری از نامعادلات کسری، حرف مجهول در هر دو طرف نامعادله وجود دارد، در این‌صورت قاعده این است که تمام جمله‌ها را به یک طرف منتقل و تمام کسرها را به یک مخرج تحویل کنیم و حل نامعادله به همان صورت کلی سابق انجام می‌گیرد.

تمرین

نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱. $\frac{7x-3}{8}+\frac{x+31}{4}>\frac{2x+7}{3}$

۲. $-3x^2+2x-1>0$

۳. $5x^2+13x-6<0$

۴. $-25m^2+20m-4>0$

۵. $3x^3-12x^2+9x>0$

۶. $\frac{m-2}{m-4}\geq\frac{m+1}{m+3}$

۷. $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}<1$

m را چنان انتخاب کنید که نامساوی‌های زیر به‌ازای جمیع مقادیر x برقرار باشند:

۸. $(m-1)x^2-4x+2m<0$

۹. $(m+1)x^2-2(m-1)x+2m-3>0$

۱۰. $mx^2+(m-1)x+m-1<0$

۱۱. $(m-2)x^2+2(2m-3)x+m-6>0$

m را چنان انتخاب کنید که معادلات زیر دارای ریشه حقیقی باشند:

۱۲. $mx^2+(m-1)x+2m=0$

۱۳. $(3m+1)x^2-(4m-1)x+12m=0$

۱۴. $x^2+(m-3)x-m-5=0$

در وجود و علامت ریشه‌های معادلات زیر برحسب m بحث کنید:

۱۵. $x^2+(m+1)x+3=0$

۱۶. $2x^2+mx-m+3=0$

۱۷. $mx^2-(m-1)x+1=0$

۱۸. $(m-1)x^2-6mx+m-2=0$

۱۹. $(m-1)x^2+4mx-m+2=0$

سؤال ۳:

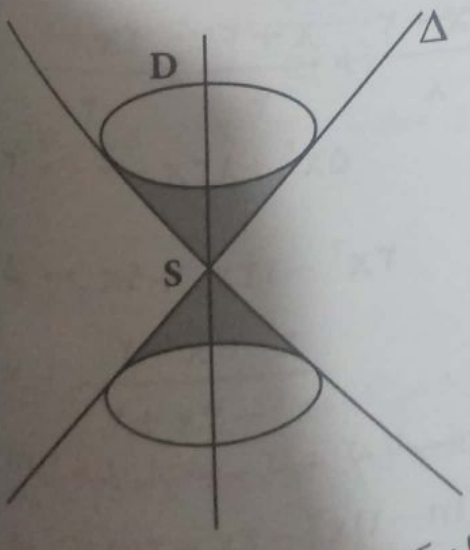
متن ذیل فصلی از یک کتاب درسی دبیرستانی است. آن‌را به دقت مطالعه نموده و خلاصه‌ای از آن‌را ارائه دهید.

مقاطع مخروطی:

پیشگفتار:

چهار نوع منحنی مسطح با خاصیت‌های بسیار مهم از زمان‌های دور به مقاطع مخروطی معروف می‌باشند. زیرا هر یک از این منحنی‌ها فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی است.

می‌دانیم که سطح مخروطی دوار از دوران یک خط حول خط دیگری که با آن متقاطع است پدید می‌آید. خط ثابت محور مخروطی، خط متحرک مولد سطح مخروطی، نقطه تلاقی دو خط، یعنی نقطه ثابت دوران، رأس سطح مخروطی و هر یک از دو بخش مخروطی که در دو طرف رأس واقع‌اند یک دامنه از آن نام دارند.

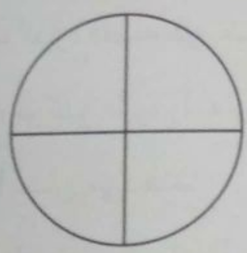
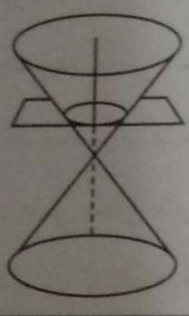
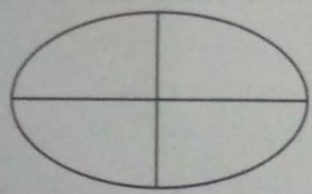
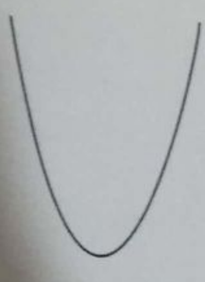
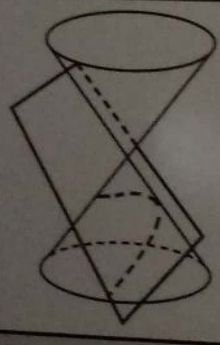
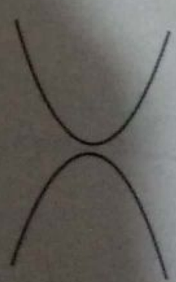
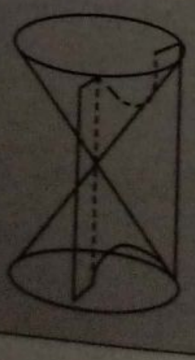


در شکل بالا، خط Δ حول خط ثابت D که با آن در S متقاطع است دوران کرده است، سطح مخروطی پدید آمده است که D محور آن، Δ مولد آن و S رأس آن می‌باشد.

هرگاه صفحه‌ای عمود بر محور سـطح مخروطی آن‌را قطع کند، فصل مشـترک آنها منحنی دایره اسـت که خواص مهم آن‌را می‌شناسیم.

هرگاه صفحه‌ای غیرعمود بر محور و غیرموازی با مولد یک دامنه از سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل منحنی است به‌نام بیضی که با آن نیز آشنایی داریم.

اگر صفحه‌ای دو دامنه از سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک منحنی است که از دو قسمت جدا از هم تشکیل شده است و هذلولی نام دارد. منحنی نمودار تابع هموگرافیک نوعی هذلولی است.

مقطع مخروطی	شکل مقطع	نوع مقطع
دایره		
بیضی		
سهمی		
هذلولی		

فصل چهارم

هرگاه صفحه‌ای با یک مولد سـطح مخروطی موازی باشـد و آن‌را قطع کند (فقط یک دامنه را قطع می‌کند) مقطع حاصل منحنی است به‌نام سهمی. منحنی نمودار تابع درجه دومی نیز سهمی است.

در شکل بالا هر یک از منحنی‌ها و چگونگی تقاطع صفحه با سطح مخروطی نموده شده است.

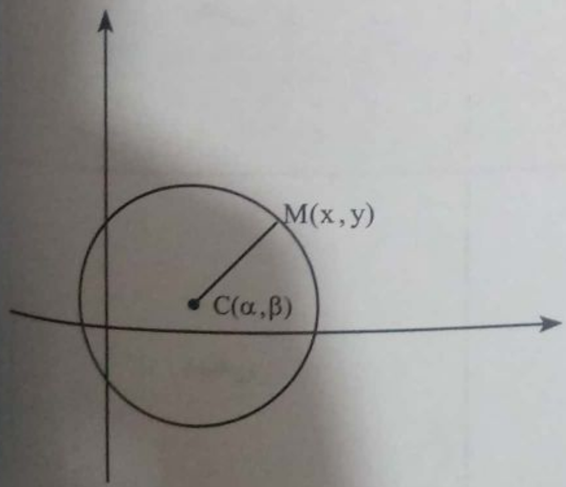
هـر یک از منحنی‌هـای مقطع مخروطی مجموعـه‌ای از تقاطع واقع در یک صفحـه و دارای خاصیت معین می‌باشند. در بررسی‌های هندسی یا تحلیلی نیز این منحنی‌ها در دستگاه مختصات قائم مورد بحث این کتاب است که در زیر به‌ترتیب ذکر می‌شود.

دایره

دایره مجموعه نقاطی اسـت از صفحه که اندازه فاصله هر یک از آنها از یک نقطه ثابت برابر عدد ثابتی باشـد. نقطـه ثابـت، مرکز دایره و پاره‌خطی که مرکـز دایره را به یکی از نقاط آن وصل می‌کند شـعاع دایره نامیده می‌شود. طول شعاع دایره را معمولاً با R نشان می‌دهند.

معادله دایره: اگر نقطه $C(\alpha,\beta)$ مرکز دایره‌ای به شعاع R و نقطه $M(x,y)$ نقطه دلخواهی از دایره باشد $CM=R$ است طول پاره‌خط CM را برحسب مختصات نقطه‌های دو سر آن حساب می‌کنیم:

$$CM=\sqrt{(x-\alpha)^2(y-\beta)^2}$$



و چون $CM=R$ است از این‌رو:

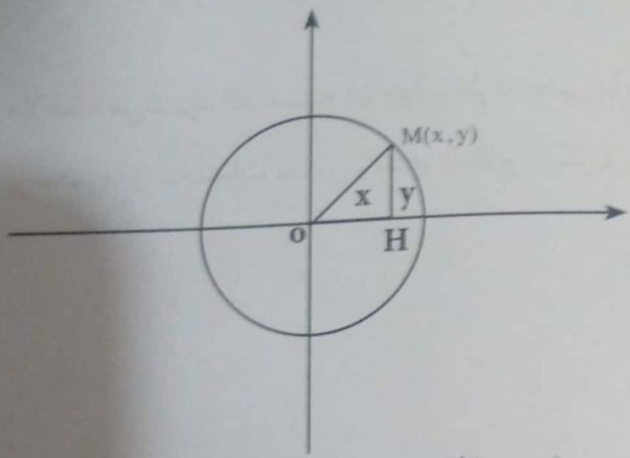
$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$$

و اگر دو طرف تساوی را به توان ۲ برسانیم خواهیم داشت:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

معادله بالا معادله دایره‌ای اســـت که شـــعاع آن R و مرکزش $C(\alpha,\beta)$ می‌باشد. از معادله بالا نتیجه می‌شود که دایره وقتی مشخص است که مختصات مرکز (α,β) و شعاع آن R معلوم باشد.

در حالت خاصی که مرکز دایره بر مبدأ مختصات منطبق باشـــد $(\alpha,\beta)=(0,0)$ خواهد بود و معادله دایره به‌صورت $x^2+y^2=R$ درمی‌آید.



مثـال ۱: معادلـــه دایره‌ای که شـــعاع آن ۳ واحد و مرکزش $C'(2,-1)$ باشـــد با توجـــه به اینکه $\alpha=2$ و $\beta=-1$ و $R=4$ است به‌صورت $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ می‌باشد.

مثال ۲: برای تعیین معادله دایره‌ای که نقاط $A(3,5)$ و $B(-5,1)$ دو سر قطری از آن باشد، چون وسط پاره‌خط AB نقطه C مرکز دایره است از این‌رو:

$$x_c=\alpha=\frac{3-5}{2}=-1\,,\ y_c=\beta=\frac{1-5}{2}=-2$$

پس $C(-1,-2)$ مرکز دایره معلوم می‌شود و برای محاسبه شعاع کافی است طول CA را حساب کنیم.

$$R=CA=\sqrt{(-1-3)^2+(-2+5)^2}=5$$

پس معادله دایره به‌صورت $(x+1)^2+(y+2)^2=25$ نوشته می‌شود.

مثال ۳: برای نوشـــتن معادله دایره‌ای که از نقطه $A(-2,1)$ گذشـــته و بر محورهای مختصات مماس باشد، چون دایـــره از نقطه A کـــه در ربع دوم محورهای مختصات قـــرار دارد می‌گذرد از ایـــن‌رو دایره مطلوب در همین ربع بر محورهای مختصات مماس می‌شود و بنابراین $\alpha=-R$ و $\beta=R$ خواهد شد و معادله دایره به‌صورت $(x+R)^2+(y-R)^2=R$ درمی‌آید و چون دایره از $A(-2,1)$ می‌گذرد بنابراین:

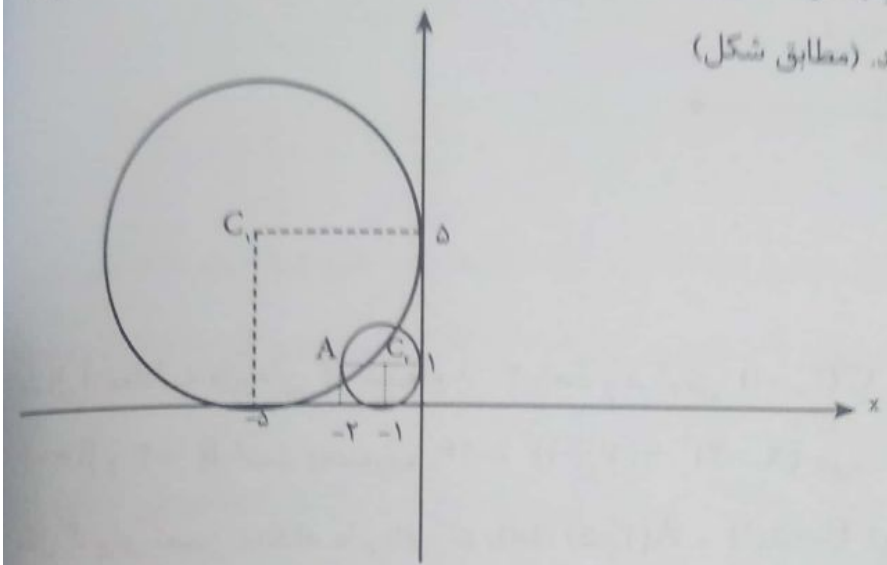
$$(-2+R)^2+(1-R)^2=R$$

و یا $R^{2}-6R+5=0$ در این‌صورت $R=5$ و $R=1$ خواهد شد و معادله دایره به یکی از دو صورت زیر مشخص می‌شود:

$$(x+1)^{2}+(y-1)^{2}=1$$

$$(x+5)^{2}+(y-5)^{2}=25$$

ملاحظه می‌شود که مسئله دو جواب دارد، یعنی ما می‌توانیم دو دایره را بر نقطه $A(-2,1)$ مرور دهیم که بر محورهای مختصات مماس باشند. (مطابق شکل)



صورت دیگر معادله دایره: همان‌طور که دیدیم معادله دایره به‌صورت:

$$(x-\alpha)^{2}+(y-\beta)^{2}=R^{2}$$

می‌باشد. این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^{2}+y^{2}-2\alpha x-2\beta y-R^{2}+\alpha^{2}+\beta^{2}=0$$

حال اگر $-2\alpha=a$ و $-2\beta=b$ و $\alpha^{2}+\beta^{2}-R^{2}=c$ قرار می‌دهیم معادله دایره به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0$$

اگر به این‌صورت معادله دایره توجه داشته باشیم ملاحظه می‌کنیم:

- معادله دایره نسبت به **x** و **y** از درجه دوم است.
- در معادله دایره ضریب‌های x^{2} و y^{2} با هم برابرند و مساوی یک می‌باشند. (هرگاه این ضرایب برابر باشند اما یک نباشند از تقسیم طرفین معادله بر ضریب مشترک ضرایب جدید برابر یک خواهند شد)
- معادله دایره شامل جمله به‌صورت **xy** نیست.
- اگر $R=0$ باشد دایره به یک نقطه تبدیل می‌شود و اگر $R<0$ باشد دایره‌ای وجود ندارد.

مثال ۴: معادله زیر را درنظر می‌گیریم:

$$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

این معادله را به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$(x^2-4x+\cdots)+(y^2+6y+\cdots)=12$$

مجذور نصف ضریب درجه اول را اضافه و کم می‌کنیم:

$$(x^2-4x+4-4)+(y^2+6y+9-9)=12$$

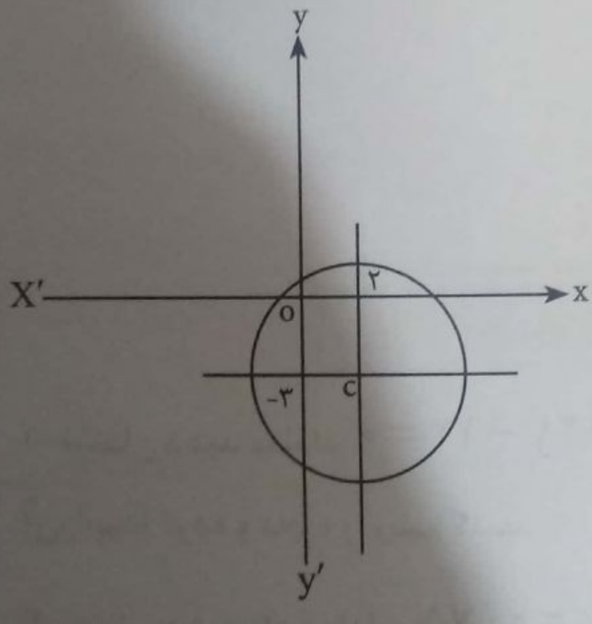
$$(x^2-2)^2-4(y^2+3)^2-9=12$$

بالاخره خواهیم داشت:

$$(x^2-2)^2+(y^2+3)^2=25$$

که معادله دایره‌ای است که نقطه $C(2,-3)$ مرکز و $R=5$ شعاع آن است.

برای رســم این دایره نخست در دســتگاه مختصات مرکز آن‌را مشخص می‌کنیم، آنگاه با توجه به اینکه شعاع آن معلوم است آن‌را رسم می‌کنیم.



مثال ۵: رسم نمودار منحنی به معادله

$$4x^2+4y^2-4x+8y-11=0$$

چون ضرایب x^2 و y^2 مساوی‌اند طرفین معادله را بر ۴ یعنی ضریب مشترک آنها تقسیم می‌کنیم:

$$x^2+y^2-x+2y-\frac{11}{4}=0$$

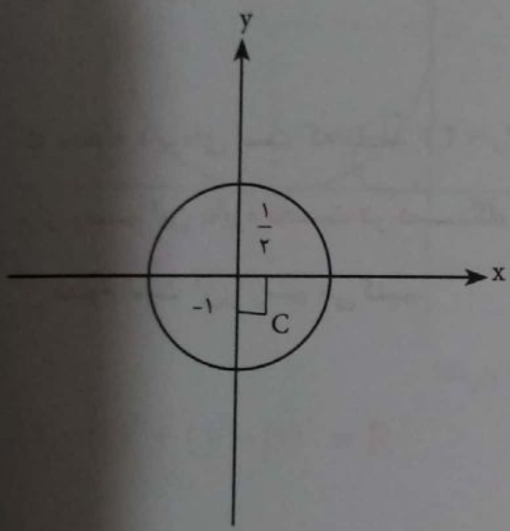
$$x^۲ - x + y^۲ + ۲y = \frac{۱۱}{۴}$$

$$x^۲ - x + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + y^۲ + ۲y + ۱ - ۱ = \frac{۱۱}{۴}$$

$$(x^۲ - \frac{۱}{۲})^۲ + (y+۱)^۲ - \frac{۵}{۴} = \frac{۱۱}{۴}$$

$$(x^۲ - \frac{۱}{۲})^۲ + (y+۱)^۲ = ۴$$

منحنی مطلوب دایره‌ای اســت که مرکز آن $C(\frac{۱}{۲}, -۱)$ و شــعاع آن ۲ می‌باشد. این دایره را پس از مشخص کردن مرکز آن رسم می‌کنیم. (مطابق شکل).



تمرین

۱- نشــان دهید معادله $۲x^۲ - ۴x + ۲y^۲ + ۱۲y - ۱۲ = ۰$ معادله دایره است. مرکز و شعاع آن‌را پیدا کرده و دایره را رسم کنید.

۲- نشان دهید که معادله $x^۲ + y^۲ - y = ۰/۷۵$ دایره‌ای را مشخص می‌کند. این دایره را رسم کنید.

۳- شعاع و مرکز دایره $x^۲ + y^۲ = ۱۸$ را تعیین کرده و آن‌را رسم کنید.

۴- معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $C(-۲, ۳)$ مرکز آن بوده و شعاع آن ۵ باشد.

۵- معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $C(۴, -۳)$ مرکز آن بوده و از مبدأ مختصات بگذرد.

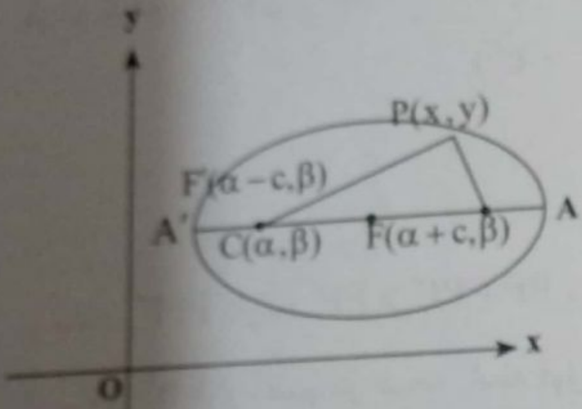
... معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $C(2,-2)$ مرکزش بوده و بر خط $3x-4y+6=0$ مماس باشد.

۷- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-1,10)$ می‌گذرد و بر دایره به معادله زیر مماس است. $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

مختصات نقطه‌های تماس و همچنین طول تماس را نیز حساب کنید.

● بیضی

بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های هر یک از آنها از دو نقطه ثابت واقع در همین صفحه برابر مقدار ثابتی باشد.



این دو نقطه ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند. کانون‌ها را با F و F' نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $FF'=2c$ باشد. در این فصل حالتی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که FF' با یکی از محورهای مختصات موازی باشد.

اگر FF' را موازی محور xها فرض کنیم و وسط FF' را C بنامیم و فرض کنیم $C(\alpha,\beta)$ باشد در این‌صورت: $F(\alpha+c,\beta)$ و $F'(\alpha-c,\beta)$ می‌شود.

اگر $P(x,y)$ نقطه دلخواهی از مجموعه نقاط تشکیل‌دهنده بیضی باشد بنابر تعریف $PF+PF'$ مقدار ثابتی خواهد بود که این مقدار ثابت را $2a$ می‌نامیم:

(۱)

$$PF+PF'=2a$$

حال فاصله‌های PF و PF' را برحسب مختصات P و F و F' حساب می‌کنیم:

$$PF=\sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}$$

$$PF'=\sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}$$

این مقادیر را در رابطه (۱) منظور می‌کنیم:

$$\sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}=2a$$

$$\sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}=2a-\sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$a^2+cx-c\alpha=a\sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}$$

باز دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم که پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$a^2(y-\beta)^2+(a^2-c^2)(x^2+\alpha^2-2\alpha x)=a^2(a^2-c^2)$$

$$a^2(y-\beta)^2+(a^2-c^2)(x-\alpha)^2=a^2(a^2-c^2)$$

در مثلث PFF' داریم: $PF+PF'>FF'$ و یا $2a>2c$ که $a>c$ می‌گردد. بنابراین می‌توانیم a^2-c^2 را مساوی b^2 قرار دهیم. در نتیجه رابطه فوق به‌صورت $a^2(y-\beta)^2+b^2(x-\alpha)^2=a^2b^2$ درمی‌آید.
دو طرف رابطه اخیر را بر a^2b^2 تقسیم می‌کنیم، در نتیجه معادله بیضی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

اگر نقطه $C(\alpha,\beta)$ بر مبدأ مختصات منطبق شود، $(\alpha،\beta)=(0،0)$ می‌شود و از این‌رو معادله بیضی که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق بوده و FF' روی محور x ها قرار دارد چنین می‌شود:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

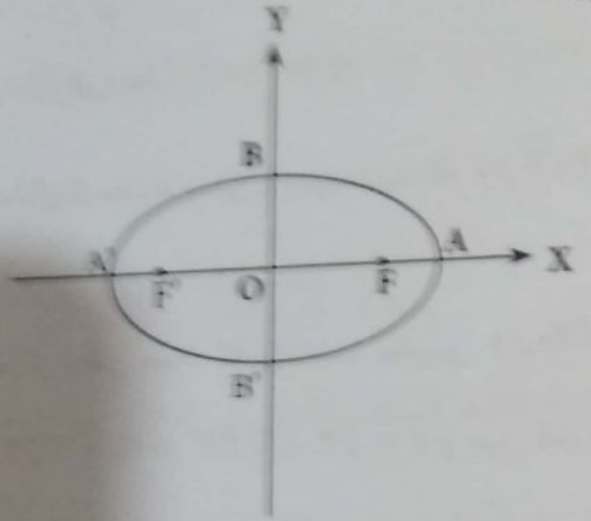
از معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ نتیجه می‌شود:

۱. اگر نقطه $P(x,y)$ روی بیضی باشد نقطه $P_1(x,-y)$ هم روی بیضی است یعنی محور x ها محور تقارن بیضی است.

۲. اگر نقطه $P(x,y)$ روی بیضی باشد نقطه $P_1(-x,y)$ هم روی بیضی است یعنی محور y ها محور تقارن بیضی است.

فصل چهارم

• اگر نقطه $P(x,y)$ روی بیضی باشد نقطه $P_1(-x,-y)$ هم روی بیضی است یعنی مبدأ مختصات مرکز تقارن بیضی است. در این حالت بیضی به شکل زیر است:



با توجه به اینکه $a^2 - c^2 = b^2$ نتیجه می‌شود $a^2 = b^2 + c^2$ و از این‌رو $b < a$ و $a > b$ است.

اگر در معادله بیضی به‌صورت بالا y را برابر صفر قرار دهیم طول‌های نقاط تقاطع بیضی با محور x به‌دست می‌آید.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow (x=a) \text{ یا } (x=-a)$$

دو نقطه $A(a,0)$ و $A'(-a,0)$، یعنی نقاط تقاطع بیضی با محور xها، دو رأس بیضی نام دارند و $AA'=2a$ می‌باشد.

اگر در معادله بیضی x را مساوی صفر قرار دهیم عرض‌های نقاط تقاطع بیضی با محور عرض‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{0}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow (y=b) \text{ یا } (y=-b)$$

دو نقطه $B(0,b)$ و $B'(0,-b)$ که نقاط تقاطع بیضی با محور yهاست نیز دو رأس بیضی می‌باشند و $BB'=2b$ می‌باشد. AA' را قطر بزرگ بیضی و BB' را قطر کوچک بیضی می‌نامند.

اگر قطر بزرگ بیضی موازی محور yها باشد، معادله بیضی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

در این‌صورت کانون‌ها عبارت‌اند از $F(\alpha,\beta+c)$ و $F'(\alpha,\beta-c)$ که اگر مرکز بیضی در این حالت بر مبدأ مختصات منطبق باشد، معادله بیضی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

نسبت $\frac{c}{a}$ را که در مورد بیضی کوچک‌تر از یک است **خروج از مرکز بیضی می‌نامند** و آن‌را با حرف e نشان می‌دهند: $e=\frac{c}{a}<1$

مثال ۱: معادله بیضی را بنویسید که $f(\sqrt{3},0)$ و $F'(-\sqrt{3},0)$ کانون‌های آن بوده و طول قطر بلندتر آن ۴ باشد.

مرکز بیضی وسط کانون‌هاست. بنابراین $O(0,0)$ مرکز بیضی است و قطر بزرگ بیضی روی محور xهاست و $FF'=2c=2\sqrt{3}$ و یا $c=\sqrt{3}$ و چون قطر بلندتر بیضی ۴ است از این‌رو $2a=4$ و یا $a=2$ می‌شود و می‌دانیم $b^2=a^2-c^2$ پس $b^2=2^2-(\sqrt{3})^2=1$ و $b=1$ می‌شود و معادله بیضی می‌شود:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

مثال ۲: معادله بیضی را بنویسید که $C(-2,3)$ مرکز آن بوده و قطر بلندتر آن به طول ۱۰ و موازی محور x ها و خروج از مرکز آن $e=\frac{4}{5}$ باشد.

معادله بیضی در این حالت به‌صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ می‌باشد و داریم: $\alpha=-2$ و $\beta=3$ و $a=5$ و با توجه به اینکه $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ است می‌توان b را نیز محاسبه کرد.

$$\frac{c}{a}=\frac{4}{5}\Rightarrow c=4$$

$$a^2-b^2=c^2 \text{ یا } 25-b^2=16\Rightarrow b=3$$

پس معادله بیضی می‌شود:

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

مثال ۳: هرگاه داشته باشیم:

$$9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$$

به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$9(x^2-2x)+4(y^2+4y)-11=0$$

$$۹(x^۲ - ۲x + ۱ - ۱) + ۴(y^۲ + ۴y + ۴ - ۴) - ۱۱ = ۰$$

$$۹(x - ۱)^۲ - ۹ + ۴(y + ۲)^۲ - ۱۶ - ۱۱ = ۰$$

$$۹(x - ۱)^۲ + ۴(y + ۲)^۲ = ۳۶$$

$$\frac{(x - ۱)^۲}{۴} + \frac{(y + ۲)^۲}{۹} = ۱$$

این معادله یک بیضی را مشـــخص می‌کند با مرکز $C(\alpha = ۱ , \beta = -۲)$ که محور کانونی آن با $y'y$ موازی است و در آن داریم:

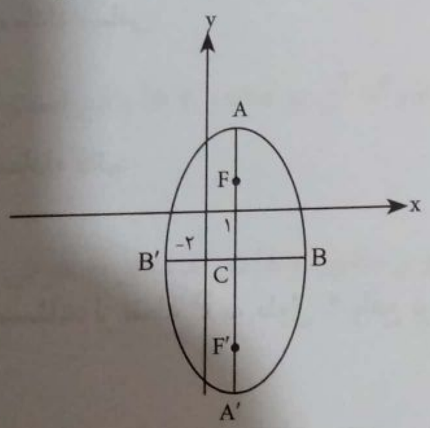
$$a^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

$$b^۲ = ۴ \Rightarrow b = ۲$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

$$F(\alpha = ۱ , \beta + c = -۲ + \sqrt{۵})$$

$$F'(\alpha = ۱ , \beta - c = -۲ - \sqrt{۵})$$



معادله مماس و قائم بر بیضی: برای تعیین ضریب زاویه‌ای مماس یا قائم بر بیضی در نقطه‌ای از آن، با توجه به تعبیر هندسی مشتق، از معادله بیضی مشتق y را نسبت به x به‌دست می‌آوریم و با قرار دادن مختصات نقطه تماس در آن ضریب زاویه‌ای خط مماس مشـــخص می‌شـــود و از روی آن ضریب زاویه‌ای خط قائم نیز به‌دست می‌آید. معادله خط مماس یا قائم با معلوم بودن ضریب زاویه‌ای و مختصات یک نقطه مشخص می‌شود.

مثال: بیضی با معادله زیر داده شده است.

$$\frac{(x + ۱)^۲}{۲۵} + \frac{(y - ۱)^۲}{۱۶} = ۱$$

در نقطــه M بــه طول ۳ واقع بر بیضــی و واقع در ربع اول محورها مماس و قائم بر بیضی را رســم می‌کنیم. مطلوبست تعیین معادله‌های این دو خط:

نخست عرض نقطه M را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۳\Rightarrow \frac{(y-۱)^۲}{۱۶}=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}$$

$$(y-۱)^۲=\frac{۱۴۴}{۲۵}\ ,\ y>۰\Rightarrow y=\frac{۱۷}{۵}$$

اکنون y' را حساب می‌کنیم.

$$\frac{۲(x+۱)}{۲۵}+\frac{۲y'(y-۱)}{۱۶}=۰\Rightarrow y'=-\frac{۱۶(x+۱)}{۲۵(y-۱)}$$

ضریب زاویه‌ای مماس می‌شود.

$$m=-\frac{۱۶(۳+۱)}{۲۵(\frac{۱۷}{۵}-۱)}=-\frac{۱۶}{۱۵}$$

ضریب زاویه‌ای قائم:

$$m'=\frac{۱۵}{۱۶}$$

معادله مماس:

$$y-\frac{۱۷}{۵}=-\frac{۱۶}{۱۵}(x-۳)\Rightarrow -\frac{۱۶}{۱۵}x+\frac{۳۳}{۵}$$

معادله قائم:

$$y-\frac{۱۷}{۵}=-\frac{۱۵}{۱۶}(x-۳)\Rightarrow y=-\frac{۱۵}{۱۶}x+\frac{۴۷}{۸۰}$$

مسئله: از نقطه P به طول ۴ واقع بر محور xx' خطی بر بیضی به معادله:

$$\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=۱$$

مماس می‌شود. معادله این مماس را بنویسید.

نقطه $P(۴,۰)$ بر بیضی واقع نیست. ضریب زاویه‌ای خط مماس را m فرض می‌کنیم. پس معادله خط مماس می‌شــود $y=mx+۴m$. این خط وقتی بر بیضی مماس می‌شود که اگر معادله‌های آن‌را با هم حل کنیم، معادله حاصل ریشه مضاعف داشته باشد. از حذف y بین دو معادله داریم:

$$۴x^۲+۹(mx+۴m)^۲-۳۶=۰$$

$$(۴+۹m^{۲})x^{۲}-۷۲m^{۲}x+۱۴۴m^{۲}-۳۶=۰$$

$$\Delta'=-۲۵۲m^{۲}+۱۴۴=۰\Rightarrow m=\pm\frac{۲\sqrt{۷}}{۷}$$

پس دو مماس را می‌توان رسم کرد با معادله‌های:

$$y=\frac{۲\sqrt{۷}}{۷}x-\frac{۸\sqrt{۷}}{۷}\ ,\ y=\frac{-۲\sqrt{۷}}{۷}x+\frac{۸\sqrt{۷}}{۷}$$

تمرین

۱- معادله بیضی را بنویسید که مرکز آن بر مبدأ مختصات، محور کانونی آن روی محور x ها قرار دارد، طول قطر بزرگ آن ۱۰ و طول قطر کوچک آن ۴ است.

۲- معادله بیضی را بنویسید که مرکز آن $C(-۲,۳)$ و محور کانونی آن موازی با محور x ها و طول قطر بزرگ آن ۱۰ و فاصله کانونی (فاصله دو کانون از هم) آن ۸ می‌باشد.

۳- معادله بیضی را بنویسید که مرکزش $C(۳,۰)$ و محور کانونی آن با محور عرض‌ها موازی و طول قطر کوچک آن ۶ و فاصله کانونی آن ۸ باشد.

۴- معادله بیضی را بنویسید که مرکز آن بر مبدأ مختصات و قطر بزرگ آن بر محور y ها واقع است و طول آن ۴ بوده و خروج از مرکز آن $\frac{۳}{۴}$ است.

۵- معادله بیضی را بنویسید که بر محور x ها در نقطه‌ای به طول ۳ و بر محور y ها در نقطه‌ای به عرض ۴- مماس است و محورهایش با محورهای مختصات موازی است.

۶- معادله بیضی را بنویسید که مرکز آن $C(-۳,۲)$ بوده و بر محورهای مختصات مماس و محورهایش با محورهای مختصات موازی باشد.

۷- معادله بیضی را بنویسید که $F(۱,۱)$ و $F'(۱,-۱)$ کانون‌های آن بوده و قطر کوچک آن به طول ۲ باشد.

۸- بیضی به معادله $۸x^{۲}+۵y^{۲}=۴۰$ مفروض است. مطلوبست محاسبه طول قطرها، مختصات کانون‌ها، مختصات چهار رأس و مختصات دو سر وتری از آنکه از کانون می‌گذرد و بر قطر بزرگ عمود است.

۹- مختصات مرکز، مختصات کانون‌ها و چهار رأس هر یک از بیضی‌های به معادله زیر را پیدا کرده و آنها را رسم کنید.

۱) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$

۲) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$

۳) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$

۴) $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$

۵) $y^2=-4x^2+8x+12$

۱۰- مختصات نقطه‌های برخورد خط $x+2y-7=0$ و بیضی $x^2+4y^2=25$ را پیدا کرده و معادله‌های مماس‌های بر بیضی را در نقطه‌های برخورد به‌دست آورید.

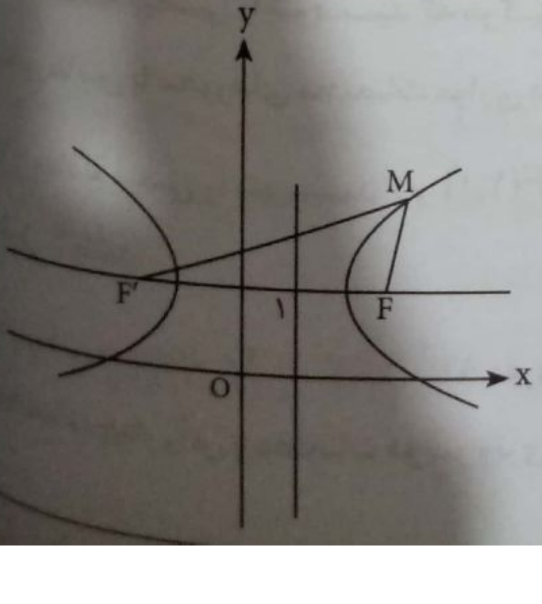
۱۱- معادله‌های مماس‌ها و قائم‌های بر بیضی $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ را در نقطه‌هایی از آن به طول $(1+\sqrt{3})$ بنویسید.

۱۲- در صورتی‌که $F'(1,-1)$ و $F(1,5)$ کانون‌ها و $P(4,2)$ نقطه‌ای از بیضی باشد، معادله آن‌را بنویسید.

هذلولی

هذلولی مجموعه نقاطی است که از صفحه تفاضل فاصله‌های آنها از دو نقطه ثابت واقع در همین صفحه مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را کانون‌ها می‌نامیم و آنها را با F و F' نمایش می‌دهیم و مقدار ثابت را برابر $2a$ می‌گیریم.

در این فصل فقط حالاتی از هذلولی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که خط FF' با یکی از محورهای مختصات موازی باشد.



اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای از هذلولی و $C(\alpha,\beta)$ وسط FF' و FF' با محور xها موازی باشد با فرض $FF' = 2c$ خواهیم داشت: $F(\alpha+c,\beta)$ و $F'(\alpha-c,\beta)$ و چون M روی هذلولی واقع شده است، بنابه تعریف هذلولی $|MF' - MF| = 2a$ یعنی ($MF' - MF = 2a$ یا $MF - MF' = 2a$) است. حال با فرض $MF' - MF = 2a$ طول‌های MF و MF' را برحسب مختصات دو سر پاره‌خط حساب می‌کنیم:

$MF' = \sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}$ و $MF' = \sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}$

و چون $MF' = 2a + MF$ پس:

$$\sqrt{[x-(\alpha-c)^2+(y-\beta)^2} = 2a + \sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم پس از ساده کردن حاصل می‌شود:

$$c(x-\alpha) - a^2 = a\sqrt{[x-(\alpha+c)^2+(y-\beta)^2}$$

که چون طرفین را مجدداً به توان ۲ برسانیم و ساده کنیم خواهیم داشت:

$$(c^2-a^2)(x^2+\alpha^2-2\alpha x) - a^2(c^2-a^2) = a^2(y-\beta)^2$$

یا

$$(c^2-a^2)(x-\alpha)^2 - a^2(y-\beta)^2 = a^2(c^2-a^2)$$

حال اگر طرفین را بر $a^2(c^2-a^2)$ تقسیم کنیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{c^2-a^2} = 1$$

در مثلث MFF' می‌توانیم بنویسیم $FF' > |MF' - MF|$ و یا $2c > 2a$ و $c > a$. بنابراین $c^2 - a^2 > 0$ است و فرض می‌کنیم $c^2 - a^2 > b^2$ باشد. از این‌رو معادله هذلولی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

(اگر از رابطه $MF = MF' = 2a$ هم استفاده کنیم باز به همین نتیجه خواهیم رسید) بنابراین معادله بالا

فصل چهارم

معادله هذلولی است که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ و FF' با محور x ها موازی بوده و دو نقطه $F(\alpha+c,\beta)$ و $F'(\alpha-c,\beta)$ کانون‌های آن می‌باشد.

در حالی‌که مبدأ مختصات بر نقطه C وسط FF' یعنی مرکز هذلولی منطبق گردد: $(\alpha,\beta)=(0,0)$ و معادله هذلولی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

اگر خط FF' با محور y ها موازی باشد معادله‌های بالا به صورت‌های زیر خواهد بود:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \quad \text{و} \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

از معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ یعنی معادله هذلولی که مرکزش مبدأ مختصات و FF' با محور x ها موازی است نتیجه می‌شود که:

۱. اگر $M(x,y)$ روی هذلولی باشد، $M_1(x,-y)$ هم روی هذلولی است یعنی محور x ها (خط FF') محور تقارن هذلولی است. خط FF' را محور کانونی هذلولی می‌نامیم.

۲. اگر $M(x,y)$ روی هذلولی باشد $M_2(-x,y)$ هم روی هذلولی است یعنی محور yها (عمودمنصف FF') محور تقارن هذلولی است. این محور تقارن را محور غیرکانونی هذلولی می‌نامیم.

۳. اگر $M(x,y)$ روی هذلولی باشد $M_3(-x,-y)$ هم روی هذلولی است یعنی مبدأ مختصات (وسط FF') مرکز تقارن هذلولی است که آن‌را مرکز هذلولی می‌نامیم.

۴. اگر در معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ مقدار **x** را صفر قرار دهیم برای **y** عددی حقیقی به‌دست نمی‌آید. یعنی هذلولی با عمودمنصف FF' که محور **y** هاست متقاطع نیست. یعنی هذلولی با محور غیرکانونی خود تقاطع ندارد.

۵. اگر در معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ مقدار **y** را صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

یعنی هذلولی محور **x** ها یعنی محور کانونی خود را در نقاط $A(a,0)$ و $A'(-a,0)$ قطع کند. این دو نقطه را رأس‌های هذلولی و پاره‌خط AA' را قطر هذلولی می‌نامند. محور کانونی هذلولی محور تقاطع آن نیز نام دارد.

فصل چهارم

۶. معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را می‌توان به‌صورت $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ نوشت و لازم است که $x^2-a^2\geq 0$ یعنی $x^2\geq a^2$ باشد. به این ترتیب حوزه تعریف و یا دامنه متغیر فاصله‌های $x\geq a$ یا $x\leq -a$ می‌باشند.

مقدار $\frac{c}{a}$ را که در هذلولی بزرگتر از یک است خروج از مرکز هذلولی می‌نامند و آن‌را با e نشان می‌دهند:

$$e=\frac{c}{a}>1$$

تعریف: هذلولی که در آن $a=b$ باشد متساوی‌القطرین نامیده می‌شود.

مثال ۱: معادله هذلولی را بنویسید که مرکز آن $C(-3,1)$ و $F(2,1)$ یک کانون و خروج از مرکز $e=\frac{5}{4}$ باشد.

چون CF با محور x ها موازی است محور کانونی موازی محور x ها است و معادله هذلولی به‌صورت کلی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ خواهد بود که در آن $CF=c=5$ و $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$ و در نتیجه $a=4$ و چون $b^2=c^2-a^2$ پس $b^2=9$ می‌شود و معادله هذلولی می‌شود:

$$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

فصل چهارم

مثال ۲: معادله هذلولی را بنویسید که $F(2,5)$ و $F'(-4,5)$ کانون‌های آن بوده و قطرش برابر ۴ باشد.

FF' موازی محور xها است و وسط FF' مرکز هذلولی $C(-1,5)$ می‌باشد $FF'=2c=6$ و $2a=4$ و $a=2$ و چون $b^2=c^2-a^2$ پس $b^2=5$ و معادله هذلولی مورد نظر می‌شود:

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-5)^2}{5}=1$$

مجانب‌های هذلولی: معادله هذلولی را به‌صورت $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌گیریم. می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{y}{\pm\frac{b}{a}x}=\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

هرگاه $x\to\pm\infty$ در این‌صورت حد نسبت‌های $\frac{y}{\pm\frac{b}{a}x}$ برابر است با ۱ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

خط‌های به معادله‌های $y=\pm\frac{b}{a}x$ مجانب‌های هذلولی می‌باشند. این معادله‌ها را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$$

هرگاه معادله هذلولی به‌صورت کلی:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

اختیار شود معادله‌های مجانب‌های آن می‌شود:

$$\frac{x-\alpha}{a}\pm\frac{y-\beta}{b}=0$$

هرگاه معادله‌های هذلولی عبارت باشد از:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

در این‌صورت مجانب‌های آن به معادله‌های زیر می‌باشند:

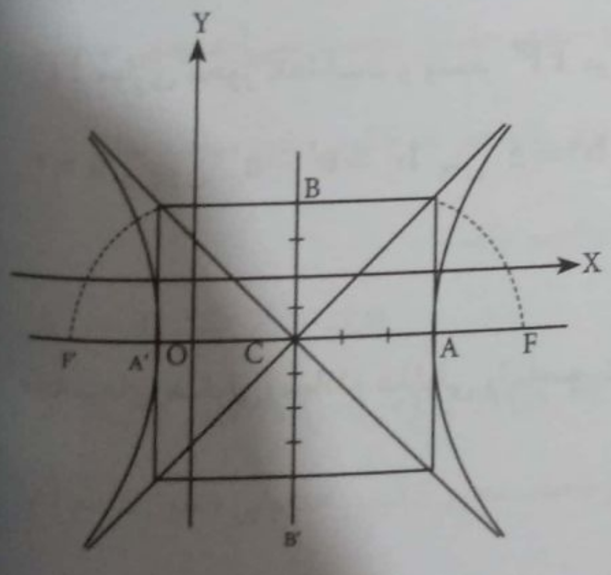
$$\frac{y-\beta}{a}\pm\frac{x-\alpha}{b}=0$$

که در حالت خاص $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ معادله‌های مجانب‌ها می‌شود: $\frac{y}{a}\pm\frac{x}{b}=0$.

اگر محور کانونی هذلولی موازی با محور xها باشد ضریب زاویه‌ای مجانب‌های آن $\pm\frac{b}{a}$ می‌باشد. در هر حال مجانب‌های هذلولی از مرکز آن می‌گذرند. در هذلولی متساوی‌القطرین مجانب‌ها بر هم عمودند.

رســم هذلولی: برای رسم هذلولی نخســت مرکز آن‌را مشخص کرده محورهای آن‌را رسم می‌کنیم. آنگاه روی محور کانونی دو نقطه A و A' در دو طرف مرکز به فاصله a از مرکز تعیین می‌کنیم و روی محور غیرکانونی دو نقطه B و B' را به فاصله b از مرکز برمی‌گزینیم.

فصل چهارم



از چهار نقطه A و B و A' و B' خط‌هایی موازی با محورهای هذلولی رســم می‌کنیم که از برخورد آنها با هم یک مستطیل تشکیل می‌شود. اکنون هذلولی را با معلوم بودن رأس‌های A و A' و به‌کمک مجانب‌های

آن رسم می‌کنیم. برای تعیین کانون‌ها کافی است که نقطه‌های برخورد دایره محیطی مستطیل بالا را با محور کانونی به‌دست آوریم. (چرا؟)

مثال ۱: رسم هذلولی به معادله:

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

محور کانونی هذلولی با محور طول‌ها موازی است و داریم:

$$C(\alpha=2,\beta=-2)$$

$$a^2=9\ ,\ a=3$$

$$b^2=16\ ,\ b=4$$

$$c^2=a^2+b^2=25\ ,\ c=5$$

$$F(\alpha+c=7\ ,\ \beta=-2)$$

$$F'(\alpha-c=-3\ ,\ \beta=-2)$$

معادله‌های مجانب‌ها:

$$\frac{x-2}{3}\pm\frac{y+2}{4}=0$$

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{14}{3}$$

$$y=-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

مثال ۲: رسم هذلولی به معادله:

$$\frac{y^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{9}=1$$

محور کانونی هذلولی با محور yها موازی است و داریم:

$$C(\alpha=-1\ ,\ \beta=0)$$

$$a^2=4,a=2,b^2=9,\ b=3$$

$$c^2=a^2+b^2=13,c=\sqrt{13}$$

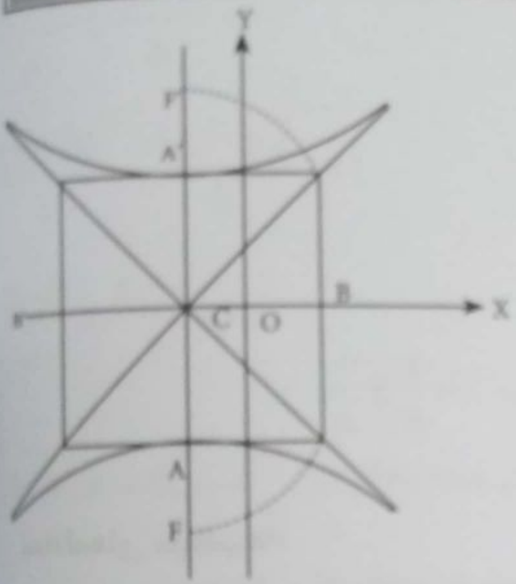
$$F(\alpha=-1,\beta+c=\sqrt{13})$$

$$F'(\alpha=-۱,\beta-c=-\sqrt{۱۳})$$

معادله‌های مجانب‌ها:
$$\frac{y}{۲}\pm\frac{x+۱}{۳}=۰\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳} \text{ یا } y=-\frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳}$$

یادآوری

برای تعیین مختصات نقطه‌های برخورد هذلولی با محورهای مختصات، در معادله هذلولی یک‌بار $x=۰$ و یک‌بار $y=۰$ می‌گیریم و معادله‌های حاصل را حل می‌کنیم.



مثال ۳: تعیین مشخصات هذلولی به معادله:

$$۲۵x^۲-۹y^۲-۱۰۰x-۷۲y-۲۶۹=۰$$

به‌ترتیب داریم:

$$۲۵(x^۲-۴x)-۹(y^۲+۸y)-۲۶۹=۰$$
$$۲۵(x^۲-۴x+۴-۴)-۹(y^۲+۸y+۱۶-۱۶)-۲۶۹=۰$$
$$۲۵(x-۲)^۲-۹(y+۴)^۲=۲۲۵$$

از تقسیم دو طرف بر ۲۲۵ داریم:

$$\frac{(x-۲)^۲}{۹}-\frac{(y+۴)^۲}{۲۵}=۱$$

محور کانونی هذلولی با محور xها موازی و مرکز آن $C(۲,-۴)$ است و داریم:

$$a=۳,b=۵\Rightarrow c=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

$$F(۲+\sqrt{۳۴},-۴),F'(۲-\sqrt{۳۴},-۴)$$

معادله‌های مجانب‌ها:

$$\frac{x-2}{3}\pm\frac{y+4}{5}=0\Rightarrow y=\frac{5}{3}x-\frac{22}{3} \text{ یا } y=-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$$

یادآوری: منحنی نمودار تابع $y=\frac{k}{x}$ (و به‌طور کلی منحنی نمودار تابع هموگرافیک) هذلولی متساوی‌القطرین است که مجانب‌هایش با محورهای مختصات موازیند.

مماس و قائم بر هذلولی: برای تعیین ضریب زاویه‌ای مماس یا قائم بر هذلولی در نقطه‌ای از آن، از معادله هذلولی مشتق y را نسبت به x به‌دست می‌آوریم و مقدار آن‌را به ازای مختصات آن نقاط تعیین می‌کنیم.

مثال: تعیین ضریب زاویه مماس و قائم بر هذلولی به معادله زیر در نقطه‌های برخورد آن با محور طول‌ها:

$$(x+2)^2-(y+1)^2=1$$

در ازای $y=0$ داریم:

$$(x+2)^2=2\Rightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$$

هذلولی با محور طول‌ها در دو نقطه برخورد می‌کند.

$$M(-2+\sqrt{2},0)\ ,\ N(-2-\sqrt{2},0)$$

اکنون y' را حساب می‌کنیم.

$$2(x+2)-2y'(y+1)=0\Rightarrow y'=\frac{x+2}{y+1}$$

ضریب زاویه‌ای مماس بر هذلولی در نقطه M:

$$m_1=\frac{-2+\sqrt{2}+2}{0+1}=\sqrt{2}$$

ضریب زاویه‌ای قائم بر هذلولی در نقطه M:

$$m'_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

ضریب زاویه‌ای‌های مماس و قائم بر هذلولی در نقطه N:

$$m_2=-\sqrt{2}\ ,\ m'_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مسئله: معادله خطی را به‌دست آورید که بر هذلولی به معادله:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

مماس و بر خط Δ به معادله $5y+6x+1=0$ عمود باشد.

یک راه‌حل این مسئله آن است که $T(x_۱, y_۱)$ را در نقطه تماس می‌گیریم و y' را حساب می‌کنیم:

$$\frac{۲x}{۴} - \frac{۲(y-۱)y'}{۱} = ۰ \Rightarrow y' \frac{x}{۴(y-۱)}$$

با توجه به اینکه مماس بر خط Δ عمود است خواهیم داشت:

$$\frac{x_۱}{۴(y_۱-۱)} = \frac{۵}{۶}$$

از این رابطه مثلاً $x_۱$ را برحسب $y_۱$ به‌دست می‌آوریم و در معادله هذلولی منظور می‌کنیم که در نتیجه $y_۱$ و از روی آن $x_۱$ به‌دست می‌آید و از آنجا معادله خط مماس مشخص می‌شود.

یک راه دیگر نیز آن است که چون مماس بر Δ عمود است پس ضریب زاویه‌ای مماس می‌شود $\frac{۵}{۶}$ و معادله مماس را $y = \frac{۵}{۶}x + h$ می‌گیریم. بین این معادله و معادله هذلولی y را حذف می‌کنیم و شرطی را تعیین می‌کنیم تا معادله حاصل ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x^۲}{۴} - \left(\frac{۵}{۶}x + h - ۱\right)^۲ = ۱$$

$$۱۶x^۲ + ۶۰(h-۱)x + ۳۶(h^۲ - ۲h + ۲) = ۰$$

$$\Delta = ۹۰۰(h-۱)^۲ - ۵۷۶(h^۲ - ۲h + ۲)$$

$$\Delta = ۳۶(۹h^۲ - ۱۸h - ۷) = ۰ \Rightarrow h = \frac{۷}{۳} \text{ یا } h = -\frac{۱}{۲}$$

پس مسئله دو جواب دارد به شرح زیر:

$$y = \frac{۵}{۶}x + \frac{۷}{۳} \text{ یا } y = \frac{۵}{۶}x - \frac{۱}{۳}$$

تمرین

۱- در هر یک از حالت‌های زیر معادله هذلولی را بنویسید:

۱) دو کانون $F(۵,۰)$ و $F'(-۵,۰)$ و خروج از مرکز $e = \frac{۵}{۳}$

۲) دو کانون $A(۱,۲)$ و $A'(۱,-۲)$ و $b = ۲$

۳) مرکز $C(-۳,۱۱)$ و طول قطر $AA' = ۸$ که AA' با محور x ها موازی است و $b = ۴$

۴) مرکز $C(۴,-۲)$ و کانون $F(۷,-۲)$ و رأس $A(۶,-۲)$

۵) دو کانون $F(۱,-۲+\sqrt{۱۳})$ و $F'(۱,-۲-\sqrt{۱۳})$ و خروج از مرکز $e=\frac{۳}{۲}$

۶) دو کانون $F(۰,۳)$ و $F'(۰,-۳)$ و یک نقطه $M(۰,۲)$

۲- معادله مجانب‌های هذلولی $\frac{x^۲}{۳۶}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ **را به‌دست آورید.**

۳- کانون‌ها، رأس‌ها و معادله مجانب‌های هذلولی $\frac{y^۲}{۲۵}-\frac{x^۲}{۱۶}=۱$ **را تعیین کنید.**

۴- مختصات مرکز، رأس‌ها، کانون‌ها و معادله‌های مجانب‌های هذلولی‌های به معادله‌های زیر را به‌دست آورید و هر یک از آنها را رسم کنید.

۱) $۹x^۲-۴y^۲-۹۰x-۲۴y+۱۵۳=۰$

۲) $y^۲-۲۵x^۲+۵۰(x-۱)=۰$

۳) $۹y^۲-۱۶x^۲+۱۸y-۲۷=۰$

۴) $۹x^۲-۴y^۲-۵۴x-۴۰y-۵۵=۰$

۵- معادله هذلولی را بنویسید که مجانب‌های آن $۲x-y=۰$ **و** $۲x+y=۴$ **بوده و از نقطه** $(۵,۹)$ **بگذرد.**

۶- معادله مماس بر هذلولی به معادله زیر را در نقطه $(۱,۱)$ **بنویسید.**

$x^۲-۴y^۲-۲x-۸y-۷=۰$

۷- معادله‌های مماس و قائم بر هذلولی $۴x^۲-۱۶y^۲-۶۴=۰$ **را در نقطه** $(۵,\frac{۳}{۲})$ **از آن بنویسید.**

۸- معادله‌های مماس و قائم بر هذلولی $۹y^۲-۴x^۲=۳۶$ **را در نقطه‌های تقاطع آن با محور عرض‌ها بنویسید.**

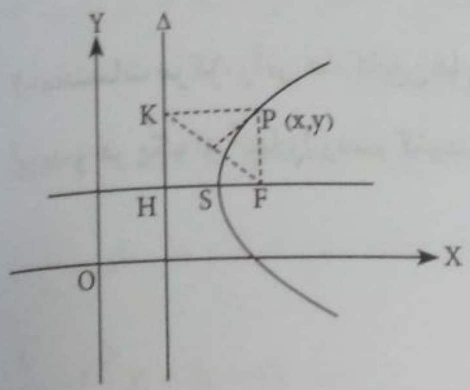
۹- معادله‌های مماس‌های بر هذلولی $۹x^۲-۲۵y^۲=۲۲۵$ **را که با محور y ها موازیند بنویسید.**

۱۰- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-۱,۰)$ **می‌گذرد و بر هذلولی به معادله زیر مماس است.**

$x^۲-y^۲+۴x-۲y-۶=۰$

سهمی

سهمی مجموعه نقطه‌هایی از صفحه است که هر کدام از آنها از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت از همان صفحه به یک فاصله باشند. نقطه ثابت را کانون سهمی می‌نامیم و معمولاً با F نشان می‌دهیم، خط ثابت را **خط هادی سهمی** می‌نامیم و معمولاً با Δ می‌نمایانیم. فاصله کانون تا خط هادی را پارامتر سهمی می‌نامیم. نقطه وسط پاره‌خطی که از کانون بر خط هادی عمود شود نیز یک نقطه از سهمی است که آن‌را **رأس سهمی** می‌نامیم.



در این مبحث حالت‌هایی از سهمی را بررسی می‌کنیم که خط هادی آن با یکی از محورهای مختصات موازی باشد و نخست حالتی را درنظر می‌گیریم که خط هادی سهمی با محور y ها موازی است. برای تعیین معادله سهمی در این حالت عمود FH را بر Δ رسم می‌کنیم که S وسط آن رأس سهمی است. فرض می‌کنیم $S(\alpha,\beta)$ و $\overline{HF}=P$ در این‌صورت داریم $F(\alpha+\frac{P}{۲},\beta)$ و معادله خط هادی می‌شود $x=\alpha-\frac{P}{۲}$. نقطه دلخواه $P(x,y)$ از سهمی را درنظر می‌گیریم. PF و عمود PK بر Δ را رسم می‌کنیم. بنابه تعریف سهمی $PF=PK$ پس $\overline{PF}^۲=\overline{PK}^۲$ اما $K(\alpha-\frac{P}{۲},y)$ است و داریم:

$$\overline{PF}^۲=[x-(\alpha+\frac{P}{۲})]^۲+(y-\beta)^۲$$

$$\overline{PK}^۲=[x-(\alpha-\frac{P}{۲})]^۲+(y-y)^۲$$

از برابر قرار دادن دو مقدار اخیر و پس از ساده کردن نتیجه خواهد شد:

$$(y-\beta)^۲=۲P(x-\alpha)$$

هرگاه S بر مبدأ مختصات واقع باشد $(\alpha,\beta)=(۰,۰)$ و در نتیجه معادله سهمی می‌شود:

$$y^۲=۲px$$

برای تعیین معادله سهمی در حالتی که خط هادی آن با محور X ها موازی باشد کافی است که در معادله بالا جای X و Y را عوض کنیم. در این‌صورت در حالت کلی که $S(x,y)$ رأس سهمی باشد معادله سهمی می‌شود:

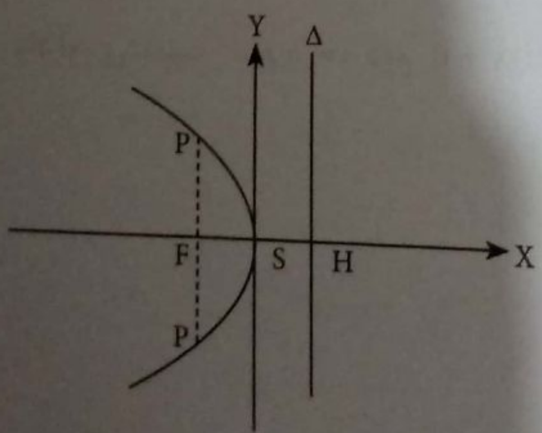
$(x-\alpha)^{2}=2p(y-\beta)$ که $F(\alpha,\beta+\frac{p}{2})$ کانون و $Y=B-\frac{p}{2}$ معادله خط هادی است و در حالتی‌که رأس سهمی بر مبدأ مختصات واقع باشد معادله آن می‌شود:

$$x^{2}=2py$$

از معادله $y^{2}=2px$ نتیجه می‌شود که اگر $p(x,y)$ بر سهمی واقع باشد، $p'(x,-y)$ نیز بر سهمی واقع است، پس محور X ها محور تقارن سهمی به معادله مزبور است. همچنین از معادله $x^{2}=2py$ نتیجه می‌شود که محور Yها محور تقارن این سهمی است. بنابراین:

خطی که از کانون سهمی می‌گذرد و بر خط هادی آن عمود است محور تقارن سهمی می‌باشد. این محور تقارن را به اختصار محور سهمی می‌نامیم.

رسم سهمی: برای رسم سهمی نخست S رأس آن‌را مشخص کرده محور آن‌را رسم می‌کنیم. آنگاه روی محور سهمی ابتدا از S به اندازه $\frac{P}{2}$ (در جهت علامت P) جدا می‌کنیم که کانون F معین می‌شود، همچنین روی محور سهمی ابتدا از S به اندازه $-\frac{P}{2}$ (در جهت مخالف علامت P) جدا می‌کنیم که H پای خط هادی به‌دست می‌آید و از H عمودی بر محور سهمی رسم می‌کنیم که خط هادی سهمی مشخص می‌شود. سپس دو نقطه دیگر از سهمی را تعیین می‌کنیم؛ برای این کار می‌توانیم در F عمودی بر محور سهمی رسم کنیم و روی آن در دو طرف F طول‌هایی به اندازه P جدا کنیم. سهمی مورد نظر را با معلوم بودن رأس S و به‌کمک دو نقطه تعیین‌شده رسم می‌کنیم.



مثال ۱: رسم سهمی $y^2=-6x$ و تعیین مشخصات آن.

رأس این سهمی $S(\alpha=0,\beta=0)$ است و محور x ها محور تقارن آن است و داریم:

$$2p=-6 \Rightarrow p=-3$$

پس:

$$F(\alpha+\frac{p}{2}=-\frac{3}{2},\beta=0)$$

معادله خط هادی:

$$x=\alpha-\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$$

مثال ۲: تعیین مشخصات و رسم سهمی به معادله:

$$(x-2)^2=4(y+3)$$

x

رأس این سهمی عبارت است از:

$$S(\alpha=2,\beta=-3)$$

محور سهمی با محور y ها موازی است و داریم:

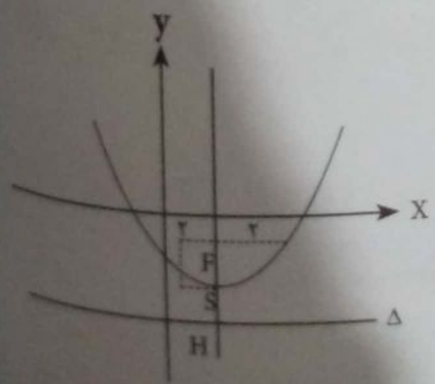
$$2p=4 \Rightarrow p=2$$

$$F(\alpha=2,\beta+\frac{p}{2}=-2)$$

معادله خط هادی:

$$y=\beta-\frac{p}{2}=-4$$

یادآوری: نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ نیز سهمی است زیرا می‌توانیم بنویسیم:



فصل چهارم

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\frac{1}{a}y$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{1}{a}y+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{a}(y-\frac{4ac-b^2}{4a})$$

با این معادله یک سهمی مشخص می‌شود که محور آن با محور y ها موازی است و در آن $p=\frac{1}{2a}$ و رأس آن عبارت است از:

$$S(\alpha=-\frac{b}{2a},\beta=\frac{4ac-b^2}{4a})$$

مثال ۳: تعیین مشخصات سهمی به معادله:

$$x^2-4x+2y+10=0$$

به‌ترتیب چنین عمل می‌کنیم:

$$x^2-4x=-2y-10$$

$$x^2-4x+4=-2y-10+4$$

$$(x-2)^2=-2(y+3)$$

محور سهمی با محورهای y ها موازی است. رأس آن $S(2,-3)$ و در آن $p=-1$ می‌باشد، کانون این سهمی $F(\alpha=2,\beta+\frac{p}{2}=-\frac{7}{2})$ و معادله خط هادی آن $y=\beta-\frac{p}{2}=-\frac{5}{2}$ است.

مماس و قائم بر سهمی: در حل مسئله‌های مربوط به مماس و قائم بر سهمی به همان ترتیب که در مورد بیضی و هذلولی عمل شد، عمل می‌کنیم.

مثال ۱: معادله مماس و قائم بر سهمی $2y^2-3y+2x+4=0$ را در نقطه به عرض -2 از آن به‌دست آورید.

از معادله سهمی در ازای $y=-۲$ نتیجه می‌شود $x=-۵$ و همچنین؛

$$۴yy'-۳y'+۲=۰ \Rightarrow y'=\frac{-۲}{۴y-۳}$$

برای مماس داریم:

$$m=\frac{-۲}{۴(-۲)-۳}=\frac{۲}{۱۱}$$

$$y+۲=\frac{۲}{۱۱}(x+۵) \Rightarrow y=\frac{۲}{۱۱}x-\frac{۱۲}{۱۱}$$

برای قائم:

$$m'=-\frac{۱۱}{۲}\,,\ y+۲=-\frac{۱۱}{۲}(x+۵) \Rightarrow y=-\frac{۱۱}{۲}x-\frac{۵۹}{۲}$$

مثال ۲: در چه نقطه از سهمی $y^۲=۲x+۴$ مماس بر سهمی با خط $۲y+x=۱$ موازی است؟

از معادله این خط نتیجه می‌شود که ضریب زاویه مماس برابر $-\frac{۱}{۲}$ است و از معادله سهمی داریم:

$$۲yy'=۲ \Rightarrow y'=\frac{۱}{y}$$

$$\frac{۱}{y}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-۲, x=۰\ ;\ M(۰,-۲)$$

تمرین

۱- معادله سهمی را با هر دسته از مشخصات زیر بنویسید.

۱) رأس $S(۰,۰)$ و کانون $F(۲,۰)$.

۲) رأس $S(-۲,۱)$ و $P=-۲$ و محور سهمی موازی با محور y ها.

۳) کانون $F(۲,-۶)$ و $p=۲$ و محور سهمی موازی با محور x ها.

۴) دو نقطه $(۰,۳)$ و $(۰,-۳)$ دو سر پاره‌خطی است که از کانون بر محور سهمی عمود شده و به سهمی محدود است و p منفی است.

۲- مختصات رأس، مختصات کانون و معادله خط هادی هر یک از سهمی‌های به معادله‌های زیر را تعیین کرده و سهمی‌ها را رسم کنید:

۱) $x^2 = 11y$

۲) $3y^2 - 19x$

۳) $x^2 - 6x - 10y - 1 = 0$

۴) $y^2 + 3x - 6y = 0$

۵) $x^2 - 4x - 12y - 32 = 0$

۳- معادله‌های مماس و قائم بر سهمی‌های زیر را در نقطه داده شده بنویسید:

۱) $x^2 + 4x - y + 1 = 0$ نقطه به طول صفر

۲) $2x^2 - 7x + 5y - 11 = 0$ نقطه به طول -1

۳) $2y^2 + 4x - 3y - 11 = 0$ نقطه به عرض ۲

۴- از کانون سهمی $y^2 + 4x - 2y + 9 = 0$ خطی عمود بر محور سهمی رسم می‌کنیم تا سهمی را در A و B قطع کند. در این دو نقطه مماس‌هایی بر سهمی رسم می‌کنیم. معادله‌های این مماس‌ها را بنویسید.

۵- نقطه‌ای از سهمی $x^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ را بیابید که مماس بر سهمی در آن نقطه با Ox زاویه ۴۵ درجه بسازد.

۶- از نقطه A به عرض ۲ واقع بر خط هادی سهمی $2x = y^2 - 2y$ دو مماس بر این سهمی رسم می‌شود. معادله‌های این مماس‌ها را بنویسید و تحقیق کنید که بر هم عمودند.

تمرین فصل ۴

نمودارهای هر دسته دو معادله‌های زیر را در یک دستگاه رسم کنید.

۱) $x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad 9x^2 + 16y^2 = 144$

۲) $x^2 - 10y = 19 \quad , \quad x^2 - 4y^2 = 5$

۳) $2x^2 - y^2 = 4 \quad , \quad 3x^2 + 4y^2 = 12$

۴) $y^2 = 12x \quad , \quad 9x^2 - 16y^2 = 144$

سرگرمی: مجموعه نمودارهای معادله‌های زیر را در یک شکل رسم کنید، شکل صفحه بعد حاصل خواهد شد.

۱) $(x+3)^2+(y-4)^2=1$

۲) $(x-3)^2+(y-4)^2=1$

۳) $(x+3)^2+(y-4)^2=0$

۴) $(x-3)^2+(y-4)^2=0$

۵) $64x^2+9y^2=144\ ,\ y<2$

۶) $x^2=-9(y+5)\ ,\ -3\leq x\leq 3$

۷) $9(x-11)^2+y^2=9$

۸) $9(x+11)^2+y^2=9$

۹) $y=6\ ,\ -4\leq x\leq -2$ یا $2\leq x\leq 4$

۱۰) $x^2-4(y+6)^2=9\ ,\ -4\leq x\leq 4$

۱۱) $x^2+y^2=100$

سؤال ۴:

متن زیر از کتاب ریاضیات ۲ رشته نظری، فنی و حرف‌های عیناً استخراج شده است. متن را به دقت مطالعه کنید سپس به پرسش‌های زیر در خصوص آن پاسخ دهید.

- الف) ابتدا خلاصه این درس را در دو صفحه ارائه کنید.
- ب) واژه‌های کلیدی آن‌را فهرست کنید.
- ج) نکات قوت و ضعف احتمالی آن‌را نقد کنید.
- د) در صورتی‌که پیشنهادی مکمل برای آن دارید با مدرس خود در میان گذاشته و بحث و تبادل نظر کنید.

لگاریتم و تابع لگاریتمی

محاسبه لگاریتم یک ابزار مناسب برای توصیف بسیاری از پدیده‌های طبیعی است، محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن توسط گوش انسان که به آستانه درد که قوی‌ترین صدای قابل تحمل برای گوش انسان است، به‌کمک این مفهوم ریاضی یعنی لگاریتم قابل تعریف و محاسبه است.

در پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان معینی که در برنامه‌ریزی اقتصادی نقش تعیین‌کننده‌ای دارد و یا هنگام محاسبه نیمه‌عمر عناصر رادیواکتیو که ماده اصلی در انرژی هسته‌ای است از لگاریتم استفاده می‌کنیم.

در بحث توابع نمایی دیدیم که تکثیر و رشد سلول‌ها از قوانین توابع نمایی پیروی می‌کنند. به‌کمک تابع نمایی $y=b^x$ می‌توان به‌طور مثال تعداد سلول‌ها را پس از زمان x پیش‌بینی کرد. در مواقعی نیاز است که بدانیم تعداد معینی از سلول‌ها پس از چه زمانی به‌وجود می‌آیند، برای پاسخ به این قبیل سؤالات از مفهوم جدیدی به‌نام تابع لگاریتمی که معکوس تابع نمایی است استفاده می‌کنیم.

تابع لگاریتمی چیست و چگونه ساخته می‌شود؟

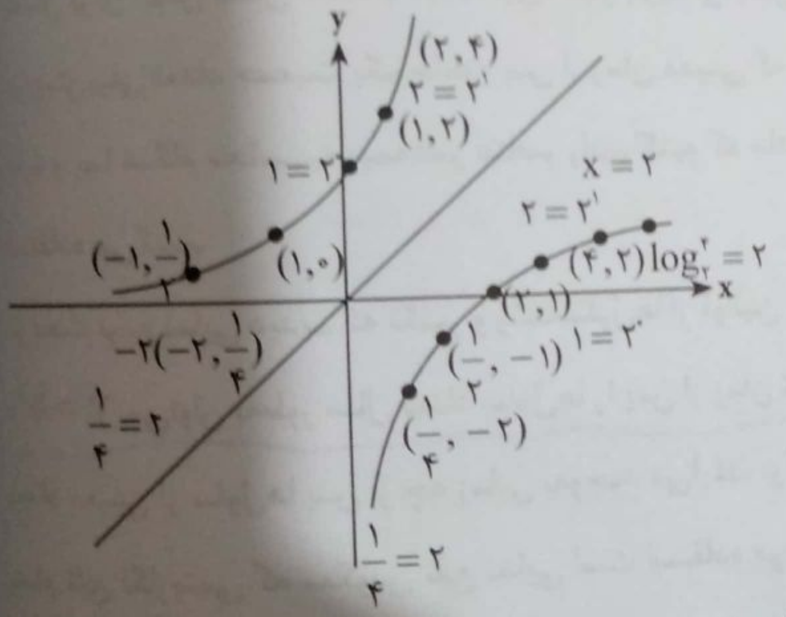
با تابع نمایی $y=2^x$ شروع می‌کنیم که تابعی یک به یک است و بنابراین تابع معکوس آن وجود دارد. به یاد آورید که معکوس تابع یک به یک $y=f(x)$ را می‌توان با یافتن قرینه نقاط روی نمودار تابع $f(x)$ نسبت به خط $y=x$ ساخت.

به جدول و نمودار زیر توجه کنید:

$x = 2^y$	
x	y
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱	۰
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3

$y = 2^x$	
x	y
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۰	۱
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-3	$\frac{1}{8}$

در شکل (۱) نمودار تابع نمایی و نمودار تابع معکوس آن (که تابع لگاریتمی نامیده می‌شود) نشان داده شده است. به‌عنوان مثال نقطه $(4,2)$ که قرینه آن نسبت به خط $y = x$ است روی نمودار تابع معکوس آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد.



معکوس $y = 2^x$ را می‌توان به‌صورت $x = 2^y$, y را لگاریتم x در پایه ۲ می‌خوانیم و با نماد $y = \log_2 x$ نشان می‌دهیم.

مثال:

۱. هر یک از تساوی‌های زیر را به‌صورت $x = 2^y$ بنویسید.

$y = \log_2 \frac{1}{4} = -2 \qquad y = \log_2 1 = 0$

$\frac{1}{4} = 2^{-2} \qquad 1 = 2^0$

۲. هر یک از تساوی‌های زیر را به‌صورت $y = \log_{۲} x$ بنویسید.

$۲^{۵} = ۳۲ \quad ۱۶^{\frac{۱}{۲}} = ۴$

$\log_{۲} ۳۲ = ۵ \quad \log ۱۶$

● فعالیت

۱. جدول‌ها را کامل کنید.

۲. هر یک از نقاط جدول‌ها را روی صفحه شطرنجی مشخص کنید و سپس نمودارهای تابع $x = ۲^{y}$ و تابع $y = \log_{۲} x$ را رسم کنید.

۳. هر نقطه از نمودار تابع نمایی را با نقطه نظیرش از تابع لگاریتمی مقایسه کنید.

۴. دامنه و برد دو تابع را با هم مقایسه کنید:

$g(x) = \log_{۲} x$	
(x, y)	$y = \log_{۲} x$
$(۱,۰)$	$۰ = \log_{۲} ۱$
…	$۱ = \log_{۲} ۲$
$(\frac{۱}{۲}, -۱)$	…
$(۴, g(۴))$	…
…	$\log_{۲} \frac{۱}{۴} = -۲$
…	$\log_{۲} \sqrt{۲} = \frac{۱}{۲}$
$(۲^{۳}, ۳)$	…
$(a, g(a))$	…

$g(x) = \log_{۲} x$	
(x, y)	$y = ۲^{x}$
$(۱,۰)$	$۱ = ۲^{۰}$
…	$۱ = \log_{۲} ۲$
$(\frac{۱}{۲}, -۱)$	…
$(۴, g(۴))$	…
…	$\log_{۲} \frac{۱}{۴} = -۲$
…	$\log_{۲} \sqrt{۲} = \frac{۱}{۲}$
$(۲^{۳}, ۳)$	…
$(a, g(a))$	…

تمرین در کلاس

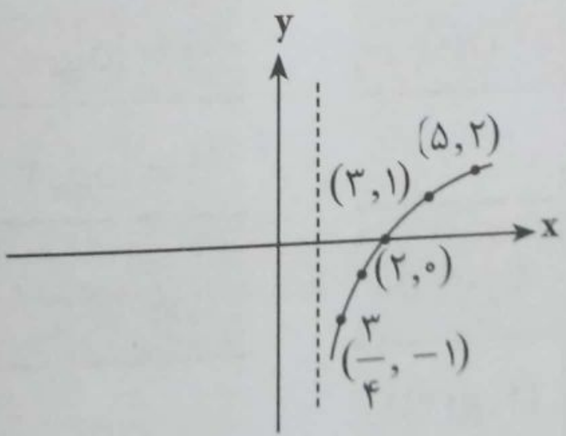
نمودار تابع $f(x) = ۳^x$ نمودار تابع معکوس آن‌را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و به این سؤالات پاسخ دهید:

الف) دامنه و برد هر کدام از توابع را مشخص کنید.

ب) دامنه و برد تابع لگاریتمی و تابع معکوس‌اش را با هم مقایسه کنید.

اکنون می‌خواهیم نمودار تابع $y = \log_۲(x-۱)$ را رسم کنیم.

$y = \log_۲(x-۱)$	
x	y
۲	۰
۳	۱
۵	۲
$\frac{۳}{۲}$	-۱
⋮	⋮



توجه کنید که به x مقادیر کمتر از ۱ را نمی‌دهیم. زیرا دامنه تابع لگاریتمی مقادیر مثبت است یعنی باید $x-۱>۰$ و در نتیجه $x>۱$ قابل قبول است.

به‌همین دلیل ابتدا خط $x=۱$ را به‌صورت نقطه‌چین رسم می‌کنیم تا نمودار راحت‌تر و دقیق‌تر رسم شود.

فعالیت

می‌خواهیم نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ و نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم.

۱. ابتدا جدول زیر را تکمیل کنید.

(x,y)	$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	$y=(\frac{1}{2})^x$	(x,y)
$(\frac{1}{2},1)$	$1=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$		$(1,\frac{1}{2})$
$(2,-1)$	$-1=\log_{\frac{1}{2}} 2$		$(-1,2)$
$(4,-2)$	$-2=\log_{\frac{1}{2}} 4$		$(-2,4)$
$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$	...	...	$(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$
			$(,)$

۲. هر یک از نقاط دو جدول را در دستگاه مختصات مشخص کرده نمودار تابع لگاریتمی را رسم کنید.

۳. نمودار معکوس تابع لگاریتمی را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.

۴. دامنه و برد تابع نمایی را از روی نمودار مشخص کنید.

۵. دامنه و برد تابع لگاریتمی را از روی نمودار مشخص کنید.

۶. حدس می‌زنید که نمودارهای تابع $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ چگونه باشند.

تمرین در کلاس

به نمودارهای زیر توجه کنید.

کدام شکل نمودار کدام تابع می‌تواند باشد؟

الف) $y=\log_2(x-2)$

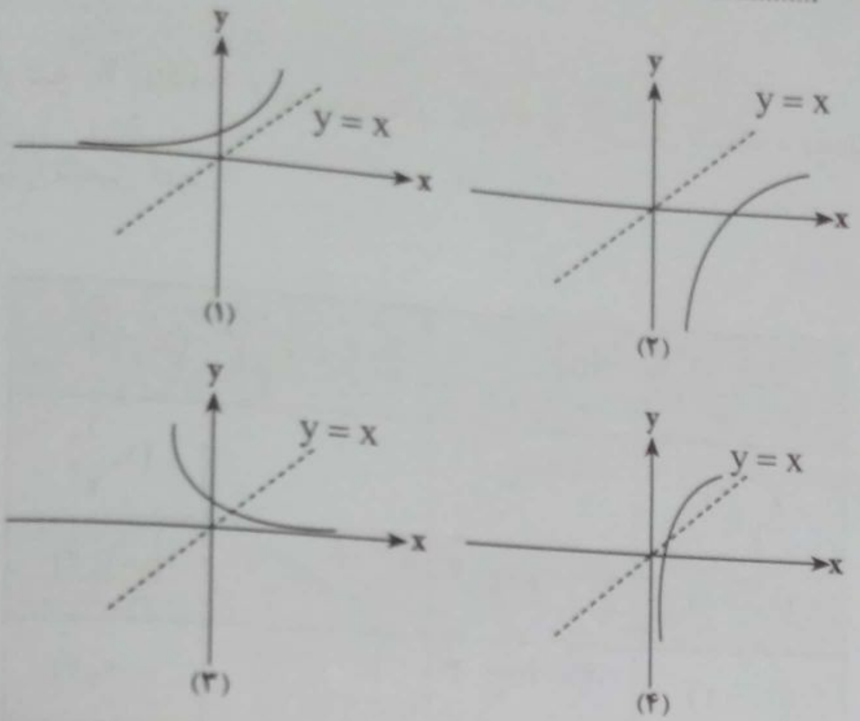
ب) $y=\log_3 x$

ج) $y=2^{-x}$

د) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

ه) $y=2+\log_2 x$

فصل چهارم



مجدداً به فعالیت‌های ۱ و ۲ و ۳ توجه کنید. ملاحظه می‌کنید که تابع لگاریتمی برای مقادیر مثبت x تعریف می‌شود و به بیان دیگر دامنه تعریف تابع لگاریتمی مقادیر مثبت است و برد تابع لگاریتمی مجموعه R است.

محاسبه لگاریتم یک عدد:

تابع $f(x)=\log_{۳} x$ را درنظر بگیرید. می‌خواهیم $f(۸۱)$ را به‌دست آوریم:

فرض کنیم $f(۸۱)=y$ یا $\log_{۳} ۸۱=y$

از تعریف لگاریتم داریم: $۸۱=۳^y$ و یا $۳^۴=۳^y$ و در نتیجه: $y=۴$.

مثال: $\log_{۸}^{۲}$ و $\log_{\frac{۱}{۳}}^{۸۱}$ را محاسبه کنید.

$\log_{۸} ۲=y \quad \log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱=y$

$۲=۸^y \quad ۸۱=(\frac{۱}{۳})^y$

$۲=۲^{۳y} \quad ۸۱=۳^{-y}$

$۱=۳y \quad y=-۴$

$y=\frac{۱}{۳}$

تمرین در کلاس

۱- نشان دهید که:

۱) $\log_{۴} ۱۶ = ۲$

۲) $\log_{۳} \frac{۱}{۲۷} = -۳$

۲- مقدار $\log_{۵} ۵$ و $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶}$ را محاسبه کنید. در حالت کلی $a \neq ۱$ و $a > ۰$ و $\log_{a} a$ را محاسبه و عبارت زیر را کامل کنید.

لگاریتم هر عدد a در پایه...... مساوی...... است.

۳- در عبارت‌های زیر y را بیابید.

الف) $\log_{۴} ۱ = y$ ب) $\log_{۲} ۸ = y$ ج) $\log_{۱۰} ۰/۰۱ = y$ د) $\log_{\frac{۱}{۶}} ۳۶ = y$

معادله لگاریتمی:

عبارت‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند.

۱) $\log_{۱۰} x = ۲$

۲) $\log_{۳} x = \log_{۳} ۵$

۳) $\log_{۲} x + \log_{۲} ۵ = ۴$

۴) $\log_{۲}(x+۱) + \log_{۲} x = \log_{۲} ۶$

منظور از حل معادله لگاریتمی یافتن مقدار و یا مقدارهایی برای x است که در معادله صدق کند.

مثال: معادلات لگاریتمی زیر را با توجه به تعریف لگاریتم حل می‌کنیم.

$\log_{۱۰} x = ۲ \quad \log_{۵} x = -۱$

$x = ۱۰^{۲} \quad x = ۵^{-۱}$

$x = ۱۰۰ \quad x = \frac{۱}{۵}$

تمرین در کلاس

معادلات زیر را حل کنید:

۱) $\log_{۳} x = ۴$

۲) $\log_{۲}(x-۱) = -۱$

۳) $\log_{۰/۰۱} x = \frac{۱}{۲}$

در حل بســیاری از معادلات لگاریتمی به حالتی می‌رسـیم که در طرفین تسـاوی دو لگاریتم قرار دارد. برای ادامه حل به مفهوم زیر نیاز داریم:

اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ باشـد آنگاه از تسـاوی $\log_a x = \log_a z$ می‌توان تسـاوی $x = z$ را نتیجه گرفت و بالعکس.

مثال:

۱)
$$\log_۲ x = \log_۲ \sqrt{۲}$$
$$x = \sqrt{۲}$$

۲)
$$\log_۵ (۲x - ۱) = \log_۵ x$$
$$(۲x - ۱) = x$$
$$x = ۱$$

۳)
$$\log_۷ (x^۲ - ۲) = \log_۷ x$$
$$x^۲ - ۲ = x$$
$$x^۲ - x - ۲ = ۰$$
$$x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۸}}{۲}$$
$$x = ۲ \, , \, x = -۱$$

۴)
$$\log_۵ x = \log_۵ ۷$$
$$x = ۷$$

در مثال شـماره ۳، $x = -۱$ قابل قبول نیسـت زیرا لگاریتم برای اعداد مثبت تعریف می‌شود. به بیان دیگر، $x = -۱$ در دامنه تعریف لگاریتم‌های معادله فوق نیست.

تمرین در کلاس

معادلات زیر را حل کنید: (جواب‌های قابل قبول برای معادلات زیر را مشخص کنید.)

۱) $\log_۳ (x^۲ - ۱۵) = \log_۳ ۲x$ ۲) $\log_{۱۰} (x^۲ - ۳۰) = \log_{۱۰} x$ ۳) $\log_x ۱۶ = ۲$

قوانین (قضایا) لگاریتم‌ها:

هنگام حل بسیاری از مسائل واقعی در فیزیک، پزشکی، زمین‌شناسی و... که در آنها معادلات لگاریتمی به‌کار رفته است نیازمند استفاده از قوانینی که بین لگاریتم‌ها برقرار است می‌شویم. به‌همین جهت در این بخش به بیان و اثبات این قوانین می‌پردازیم.

از قوانین داریم:

$$۱۶ \times ۱۲۸ = ۲^۴ \times ۲^۷ = ۲^{۴+۷}$$

می‌خواهیم ببینیم که آیا درباره لگاریتم‌ها می‌توان نوشت:

$$\log_۲ ۲^۴ \times ۲^۷ = \log_۲ ۲^۴ + \log_۲ ۲^۷$$

دو طرف تساوی را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\log_۲ ۱۶\times۱۲۸ = \log_۲ ۲^۴ \times ۲^۷ = \log_۲ ۲^{۱۱} = y$$

مطابق تعریف لگاریتم $۲^{۱۱} = ۲^y$

$$y = ۱۱$$

$$\log_۲ ۲^۴ = a \quad \log_۲ ۲^۷ = b$$

$$۲^۴ = ۲^a \qquad ۲^۷ = ۲^b$$

$$a = ۴ \qquad b = ۷$$

بنابراین: $\log_۲ ۲^۴ + \log_۲ ۲^۷ = a + b = ۴ + ۷ = ۱۱$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که برای اعداد حقیقی و مثبت c , b , a که $(c \neq ۱)$ همین رابطه برقرار است یعنی:

قضیه ۱: $\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b$

فرض کنیم $\log_c ab = p$، از تعریف لگاریتم داریم: $ab = c^p$

$$\log_c b = n \quad \log_c a = m$$

$$b = c^n \quad a = c^m$$

$$ab = c^m \times c^n = c^{m+n}$$

$$ab = c^p$$

$$ab = c^{m+n}$$

بنابراین: $\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b$ یا $ab = c^{m+n}$

$$\log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۵ = \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$$

قضیه ۲: برای هر عدد حقیقی مثبت c , b , a که $(c \neq ۱)$ می‌توان ثابت کرد که:

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

به‌عنوان مثال برای محاسبه $\log_{۱۰} ۰/۱$ می‌توان نوشت:

$$\log_{۱۰} \frac{۱}{۱۰} = \log_{۱۰} ۱ - \log_{۱۰} ۱۰ = ۰ - ۱ = -۱$$

از اینکه $\log_{3} 5 = 1/4650$ و $\log_{3} 20 = 2/7268$ اسـت، اسـتفاده می‌کنیم و $\log_{3} 4$ را محاسبه می‌نماییم.

$$\log_{3} 4 = \log_{3} 4\frac{20}{5} = \log_{3} 20 - \log_{3} 5 = 1/2618$$

می‌تـوان ثابت کرد که رابطه $\log_{c} a^{n} = n\log_{c} a$ برای اعداد کسـری و گنگ نیز صادق اسـت یعنی می‌توان نوشت:

$$\log_{c} a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{c} a \ , \ \log_{5}\sqrt{5} = \log_{5} 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{5} 5 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

مثال:

$$2\log_{10}\sqrt{2} + \log_{10} 5 = \log_{10}(\sqrt{2})^{2} + \log_{10} 5 = \log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$$

مسائل:

۱- درسـتی تساوی $\log_{c} abd = \log_{c} a + \log_{c} b + \log_{c} d$ را تحقیق کنید. (a, b, c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$ است.)

۲- نشان دهید که: $\log_{3} 5 = 5\log 3$.

۳- از تساوی $a^{n} = \underbrace{a\cdot a\cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ بار } n\in N}$ استفاده کنید و رابطه $\log_{c} a^{n} = n\log_{c} a$ را نتیجه بگیرید.

۴- حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید:

۱) $\log_{10} 100$

۲) $\log_{10} 1000$

۳) $\log_{10} 4 + \log_{10} 25$

۴) $2\log_{10} 4 + \log_{10} 4$

۵- اگر $\log_{10} 2 = m$ و $\log_{10} 3 = n$ باشد عبارات زیر را محاسبه کنید: (برحسب m و n)

۱) $\log_{10} 18$

۲) $\log_{10} 32 + \log_{10} 27$

۶- از اینکه $\log_{4} 2 = 0/5$ است استفاده کنید و $\log_{4} 32$ را محاسبه کنید.

۷- ثابـت کنیـد $\log_{c} a^{x} = x\log_{c} a$ اعـداد حقیقـی مثبـت (راهنمایـی: فـرض کنیـد $\log_{c} a^{x} = m$, $\log_{c} a = n$).

- قضیه ۲ را اثبات کنید.

(راهنمایی: فرض کنید $\log_c \frac{a}{b} = m$, $\log_c a = n$, $\log_c b = p$ از قوانین توان‌ها استفاده کنید.)

۸- حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید:

۱) $\log_۲ ۱۶$

۲) $\log_۷ \frac{۱}{۴۹}$

۳) $\log_۲ \sqrt{۸}$

۴) $\log_۳ ۵۴ - \log_۳ ۲$

۵) $۲\log_{۱۰} ۵ + \log_{۱۰} ۴$

۶) $۲\log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۲۵۰$

۷) $\log_{۱۰} ۲۴ - \frac{۱}{۲}\log_{۱۰} ۹ + \log_{۱۰} ۱۲۵$

۸) $۳\log_{۱۰} \sqrt[۳]{۴} - \log_{۱۰} ۲۵$

حل معادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها:

از قوانین لگاریتم‌ها استفاده کرده و مثال‌هایی از معادلات لگاریتمی را حل می‌کنیم.

مثال:

۱) $۳\log_۵ x - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$

$$\log_۵ x^۳ - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$$

$$\log_۵ \frac{x^۳}{۴} = \log_۵ ۱۶ \Rightarrow \frac{x^۳}{۴} = ۱۶ \Rightarrow x^۳ = ۶۴ \Rightarrow x = ۴$$

اگر در معادله اصلی به‌جای x عدد ۴ را قرار دهیم:

$$۳\log_۵ ۴ - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$$

$$۲\log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$$

$$۲\log_۵ ۴ = \log_۵ ۴^۲$$

بنابراین $x = ۴$ قابل قبول است.

۲) $\log_۳ x + \log_۳(۲x+۱) = ۱$

$$\log_۳ x(۲x+۱) = ۱$$

$$۲x^۲ + x = ۳^۱$$

$$۲x^۲ + x - ۳ = ۰$$

جواب‌ها را در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۵}}{۴} \quad \log_۲ ۱+\log_۲ ۳=۱$$

$$x=۱\,,\ x=-\frac{۳}{۲} \quad \log_۲ (-\frac{۳}{۴})+\log_۲ (-\frac{۳}{۲})(-۳+۱)=۱$$

توجه کنید که $x=-\frac{۳}{۲}$ در دامنه تعریف لگاریتم‌ها نیست و بنابراین جواب قابل قبول برای معادله لگاریتمی نیست. بنابراین تنها جواب $x=۱$ در معادله اصلی صدق می‌کند.

مسائل:

۱- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_۹ x=\frac{۳}{۲}$

۲) $\log_۵ (x+۱)=\frac{۱}{۲}$

۳) $\log_{۱۰} (۴-x)=\log_{۱۰} (۶-x)-\log_{۱۰} x$

۴) $\log_۳ ۵+\log_۳ x=\log_۳ ۱۰$

۵) $\log_۴ a+\log_۴ ۹=\log_۴ ۲۷$

۶) $\log_{۱۰} ۱۶-\log_{۱۰} ۲x=\log_{۱۰} ۲$

۷) $\log_۷ ۲۴-\log_۷ (x+۵)=\log_۷ ۸$

۸) $\log_۲ n=\frac{۱}{۴}\log_۲ ۱۶+\log_۲ ۴۹$

۹ و ۱۰ را برحسب n حل کنید.

۹) $\log_a ۴n-۲\log_a x=\log_a x$

۱۰) $\log_b ۸+۳\log_b n=۳\log_b (x-۱)$

۱۱) $\log_{۱۰} z+\log_{۱۰} (z+۳)=۱$

۱۲) $\log_۶ (a^۲+۲)+\log_۶ ۲=۲$

۱۳) $\log_{۲}(t+۲)+\log_{۲}(t-۲)=۱$

۱۴) $\log_{۴} x+\log_{۴}(x-۶)=۲$

۱۵) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^{۲}-۱)=-۱$

۲- برای هر عدد حقیقی و مثبت که e ، a ، x و c که $(c,e\neq ۱)$ است ثابت کنید.

۱) $\log_{c}\frac{۱}{x}=-\log_{c} x$

۲) $\log_{c} a=\frac{\log_{e} a}{\log_{e} c}$

۳) $c^{\log_{c} a}=a$

۳- با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها یا هر راه‌حل دیگر نشان دهید که:

۱) $\log_{۲۷} ۳\times\log_{۳} ۲۷=۱$

۲) $\log_{۷} ۴۹=۲\log_{۷} ۷=۲$

۳) $\log_{۲}(\log_{۲}(\log_{۲} ۸))=۰$

۴- کدام راه‌حل درست و کدامیک نادرست است؟ استدلال کنید.

۱)

$$\log_{۳} x=۹$$
$$۳x=۹$$
$$x=۲$$

۲)

$$\log_{۳} x=۹$$
$$x=۳^{۹}$$
$$x=۱۹۰۸۳$$

۵- آیا راه‌حل زیر درست است؟ استدلال کنید.

$$\log_{۱۰}(۲x-۱)=۰$$
$$\log_{۱۰} ۲x-\log_{۱۰} ۱=۰$$
$$\log_{۱۰} ۲x-۰=۰$$
$$۲x=۱$$
$$x=\frac{۱}{۲}$$

۶- معادله $\log_{۱۰}(x+۲)=\log_{۱۰} ۸-\log_{۱۰}(x-۵)$ را حل کنید.

چگونه می‌توانید از درستی جواب به‌دست‌آمده اطمینان حاصل کنید؟

۷- با توجه به نمودار تابع $y=\log_{۲} x$ نمودار تابع $y=\log_{۲}(x+۱)$ و تابع معکوس آن‌را رسم کنید.

خواندنی:

غلظت یون هیدرونیوم که آن‌را با $[H_{۳}O^{+}]$ نشـان می‌دهند در بافت زنده و نیز در خاکی که گیاهان در آن

رشد می‌کنند عامل مهمی است. محلول‌های اسیدی غلظتی زیاد دارند که از حدود 10^{-2} مول بر لیتر تا 10^{-6} مول بر لیتر تغییر می‌کند. برای آب‌مقطر غلظت یون هیدرونیوم تقریباً 10^{-7} مول بر لیتر است. این غلظت را خنثی می‌نامند. غلظت پایین‌تر تا تقریباً 10^{-12} مول بر لیتر دلالت بر محیط قلیایی یا بازی دارد. در شیمی برای تعیین میزان اسیدی یا قلیایی بودن یک محلول از رابطه لگاریتمی زیر استفاده می‌کنند.

$PH = -\log_{10}[H_3O^+]$ (پتانسیل هیدروژن)

$PH = 7$ بیانگر محلول خنثی و $PH < 7$ نشان‌دهنده اسیدی بودن محیط است در حالی‌که $PH > 7$ از قلیایی بودن محیط حکایت می‌کند.

در مورد مغز انسان کشف کرده‌اند که غلظت یون هیدرونیوم یعنی $[H_3O^+]$ در مایع نخاعی مغزی $4/8\times10^{-8}\,mol/Lit$ است. بنابراین PH آن عبارت است از:

$$PH = -\log_{10}[H_3O^+] = -\log_{10} 4/8\times10^{-8} = -\log_{10} 4/8 + \log_{10}^{-8} = -(0/68-8) = 7/32$$

بنابراین محیط مایع نخاعی مغزی نه اسیدی و نه چندان قلیایی است.

در اینجا PH چند محلول که با آن آشنا هستید داده شده است.

	PH
اسید باتری	۱
گوجه‌فرنگی	۴/۲
شیر	۶/۴
آب‌مقطر	۷
تخم‌مرغ	۷/۸

- غلظت یون هیدرونیوم در سه محلول الف و ب و ج به‌ترتیب $[H_3O^+] = 3/7\times10^{-5}$ مول بر لیتر، $[H_3O^+] = 8/1\times10^{-8}$ مول بر لیتر و $[H_3O^+] = 0/27\times10^{-7}$ است. در هر مورد PH را به‌دست آورید.

- کاغذ لیتموس یک وسیله شناسایی است و رنگ طبیعی آن صورتی است که در محیط اسیدی قرمز و در محیط قلیایی آبی می‌شود. رنگ کاغذ لیتموس در محلولی که غلظت یون هیدرونیوم در آن $[H_3O^+] = 4\times10^{-9}$ است قرمز می‌شود یا آبی؟

در محلولی که $[H_3O^+] = 0/00002$ است چطور؟

- زمین‌لرزه یا زلزله، لرزش و جنبش خفیف یا شدید زمین است که به‌علت آزاد شدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوسته زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد. محلی که منشأ زلزله از آنجا شروع شده و انرژی از آن خارج می‌شود را کانون زلزله و نقطه بالای کانون در سطح زمین را مرکز زلزله می‌گویند.

بزرگی زمین‌لرزه از رابطه لگاریتمی $\log E = ۱۱/۴ + ۱/۵M$ به‌دست می‌آید که در آن M بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر و E انرژی آزادشده در واحد ارگ است.

رابطه فوق نشان می‌دهد که با افزایش یک درجه‌ای M مقدار انرژی آزادشده تقریباً ۳۲ برابر می‌گردد. انرژی یک زلزله ۸ ریشتری را برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده انفجاری TNT برآورد کرده‌اند.

$$\log E = ۱۱/۴ + ۱/۵ \times ۸ = ۲۳/۴ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۳/۴}$$

زلزله‌ها از جنبه آزاد شدن انرژی به دو صورت افقی و عمودی تقسیم‌بندی می‌گردند. خرابی‌ها عمده و وسیع معمولاً بر اثر زلزله‌هایی از نوع افقی صورت می‌گیرد.

البته باید توجه داشت که میزان انرژی رسیده به هر نقطه از سطح زمین علاوه‌بر میزان انرژی آزادشده در مرکز به مجموعه عواملی از قبیل فاصله از مرکز زلزله، جنس خاک، مقاومت بنا و.... بستگی دارد.

زلزله‌ای که در سال ۱۳۶۹ در منطقه رودبار رخ داد ۷/۳ ریشتر بود. میزان انرژی آزادشده در مرکز زلزله را تخمین بزنید.

همچنین بزرگی زلزله بم در سال ۱۳۸۲، ۶/۶ ریشتر گزارش شده است. میزان انرژی آزادشده در این منطقه را تخمین بزنید.

۴-۴ پاسخ به برخی سؤال‌ها

پاسخ سؤال اول:

در این فصل مفهوم تابع با استفاده از مفهوم مجموعه تعریف شده است. اگر A و B دو مجموعه باشند و توسط قاعده‌ای به هر عضو A عضو منحصربه فردی از B را نسبت دهیم گوییم تابعی از A به توی B در دست است و چنانچه این تابع را f بنامیم می‌نویسیم:

$$f : A \to B$$

(می‌خوانیم f تابعی است از A به توی B). متعاقباً مفاهیم دامنه و برد تابع معرفی شده‌اند. سپس با ذکر مثال‌هایی و با استفاده از نمودار ون مفهوم تابع روشن شده است.

در بخش بعدی تابع‌های حقیقی، تابع‌های مساوی و تابع ثابت معرفی شده‌اند. در پایان این بخش مجموعه‌ای از تمرین‌های ساده و آموزنده ارائه شده است.

مفهوم تابع در این درس به روشی ساده و با مثال‌هایی ملموس ارائه شده است. در بحث از توابع حقیقی «قانون تابع» به نحو سریع و مجردی ارائه شده است. بهتر بود مثال‌هایی از توابع حقیقی ارائه می‌گردید و از دانش‌آموزان خواسته می‌شد تا «قانون تابع» را پیدا کنند.

برای مثال هرگاه $A=\{۱,۲,۳,...,۹۶\}$ و $B=R$ باشد، تابع‌های ذیل را درنظر بگیریم:

$f:A\to B$

$۱\to۱ \quad ۴\to۱۶ \quad ۷\to۴۹$

$۲\to۴ \quad ۵\to۲۵ \quad ۸\to۶۴$

$۳\to۹ \quad ۶\to۳۶ \quad ۹\to۸۱$

«قانون» این تابع کدام است. هر عدد را چگونه نقش می‌کند؟

$g:A\to B$

$۱\to۱ \quad ۴\to۱/۴ \quad ۷\to۱/۷$

$۲\to۱/۲ \quad ۵\to۱/۵ \quad ۸\to۱/۸$

$۳\to۱/۳ \quad ۶\to۱/۶ \quad ۹\to۱/۹$

«g» هر عدد را چگونه نقش می‌کند؟

برای f می‌نویسیم $f(x)=x^۲$، یعنی f , x را به $x^۲$ نقش می‌کند.

برای g می‌نویسیم $g(x)=\frac{۱}{x}$، یعنی g , x را به $\frac{۱}{x}$ نقش می‌کند.

سپس در حالت کلی نماد $y=f(x)$ (یعنی f , x را به y نقش می‌کند) معرفی گردید.

پاسخ سؤال دوم:

در این فصل روابط بین ضریب‌های معادله درجه دوم و ریشه‌های آن و حل نامعادله درجه دوم مورد بحث قرار گرفته‌اند. هرگاه: $ax^۲+bx+c=۰$

یک معادله درجه دوم با ضرایب a , b و c و ریشه‌های x' و x'' باشد، روابط ذیل برقرار است.

(مجموعه ریشه‌ها) $x'+x''=-\frac{b}{a}$

(حاصل‌ضرب ریشه‌ها) $x'x''=\frac{c}{a}$

از این روابط در بررسی وجود و علامت ریشه‌ها استفاده شده است.

هرگاه $\frac{c}{a} < 0$ معادله دارای دو ریشه مختلف‌العلامه است.

هرگاه $\frac{c}{a} = 0$ یک ریشه برابر صفر و ریشه دیگر برابر $-\frac{b}{a}$ است.

هرگاه $\frac{c}{a} > 0$ باشد دو حالت رخ می‌دهد.

۱. اگر $\Delta < 0$ معادله ریشه ندارد (Δ مبین معادله و برابر $b^2 - 4ac$ است)

۲. اگر $\Delta > 0$ معادله دارای دو ریشه است.

همانگونه که در متن نیز ملاحظه می‌گردد بحث در وجود ریشه‌ها نیز در کتاب خلاصه و در کادر مشخص گردیده است.

در بخش بعدی وجود علامت ریشه‌های معادله پارامتری مورد بررسی قرار گرفته است. اساس کار همان چیزی است که در بخش قبلی گفته شد. در هر مورد مطلب با ذکر مثال‌هایی تشریح گردیده است.

به‌عنوان کاربردهایی از مطلب گفته‌شده، در بخش‌های بعدی مسائلی عددی طرح و حل شده است. از جمله آنکه هرگاه مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد در دست باشد آن دو عدد به‌عنوان ریشه‌های یک معادله درجه دوم به‌دست می‌آیند:

اگر مجموع دو عدد α و β برابر S و حاصل‌ضرب آنها برابر P باشد، α و β ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

بعضی از عباراتی که برحسب ریشه‌های معادله درجه دوم «متقارن» هستند محاسبه گردیده‌اند مانند $x'^2 + x''^2$ و $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ (بدون کاربرد.)

در ادامه با استفاده از حل معادله درجه دوم، سه‌جمله‌ای درجه دوم به حاصل‌ضربی از عبارات درجه اول تجزیه شده است:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

که x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند.

همچنین تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم، حل نامعادله درجه دوم، حل نامعادلاتی که یک طرف آنها حاصل‌ضرب چند عبارت درجه اول یا دوم است و حل نامعادلات کسری به‌عنوان کاربردهای دیگر حل معادله درجه دوم مطرح و بحث شده‌اند.

۴-۵ خودآزمایی

۱- بررسی یک کتاب درسی توسط دبیر چگونه مطالعه‌ای است؟

الف) مطالعه‌ای است جهت آماده‌سازی برای تدریس

ب) مطالعه‌ای است جهت آشنا شدن به نکات قوت و ضعف کتاب

ج) مطالعه‌ای است جهت تدوین جزوه کمکی

د) مطالعه‌ای جامع جهت آماده‌سازی و تدوین نوشتار مکمل

۲- هدف یک بررسی محتوایی کدام است؟

الف) تشخیص اینکه تا چه اندازه متن درسی مطابق اهداف تعیین‌شده تدوین شده است.

ب) تشخیص و یادگیری محتوای متن جهت تدریس

ج) تشخیص نکات ضعف متن درسی

د) تشخیص نکات قوت متن درسی

۳- بررسی انتقادی به چه نوع بررسی اطلاق می‌شود؟

الف) به نقدی اطلاق می‌شود که متن درس را بر اساس تجربیات دبیر بررسی می‌کند.

ب) به نقدی اطلاق می‌شود که نکات ضعف متن را بازگو می‌کند.

ج) به نقدی گفته می‌شود که در آن نکات قوت و ضعف متن بازگو می‌گردد.

د) به نقدی گفته می‌شود که در آن نقاط ضعف و قوت متن وفق مستندات و اصول بازگو می‌گردد.

۴- مهمترین محک در یک بررسی انتقادی کدام است؟

الف) به چه میزانی یادگیری فعال لحاظ شده است.

ب) به چه میزان محتوای متن غنی می‌باشد.

ج) به چه میزانی نقش دبیران رعایت شده است.

د) به چه میزان نکات قوت و ضعف قابل تشخیص است.

۵- شیب خط مستقیم برای ناظری که به سوی محور x ها مثبت نگاه به خط می‌کند کدام است؟

الف) میزان افزایش یا کاهش عرض به نسبت افزایش طول

ب) میزان افزایش یا کاهش عرض در ازای یک واحد افزایش طول

ج) میزان افزایش عرض در ازای یک واحد افزایش طول

د) میزان کاهش عرض در ازای کاهش یک واحد طول

۶- کدام تعریف، مطابق متن، برای معادله خط راست علمی‌تر و آموزشی‌تر است؟

الف) رابطه‌ای خطی بین دو متغیر x و y

ب) ویژگی مشترک نقاط واقع بر خط

ج) ویژگی مشترک x و yهای خط

د) ویژگی مشترک نقاط واقع بر خط برحسب مختصات این نقاط

۷- بررسی خلاصه‌نویسی بیشتر به چه منظوری انجام می‌شود؟

الف) برای کمک به پژوهشگران در تحقیقات علمی

ب) برای کمک به دبیران برای آماده‌سازی

ج) برای کمک به دانش‌آموزان در مطالعه درس

د) برای کمک به پژوهشگران در مطالعه و یادگیری

۸- در برخی از متون درسی، خلاصه‌ای از متن یک درس توسط نویسنده ارائه می‌شود. نظرتان در باب اینگونه موارد چیست؟

الف) جهت کمک به دبیران مناسب است. ب) برای کمک و یادآوری به دانش‌آموزان مؤثر است.

ج) لزومی به ارائه آن نمی‌باشد. د) خلاصه درس در متن الزامی است.

۹- معادلات مقاطع مخروطی از مطالعه و بررسی جبری چه چیزی حاصل می‌شود؟

الف) تقاطع صفحه با مخروط ب) تقاطع خط با مخروط

ج) مختصات نقطه روی منحنی د) مختصات نقطه ثابت روی منحنی

۱۰- تابع معکوس تابع لگاریتمی چگونه تابعی است؟

الف) تابع درجه دوم ب) تابع درجه سوم

ج) تابع با پایه ثابت و نمایی د) تابع با پایه متغیر و نمایی

۱۱- هرگاه درجه زلزله‌ای یک واحد ریشتر بیشتر باشد قدرت انرژی آزادشده چند برابر بیشتر خواهد بود؟

الف) ۲۰ برابر ب) ۳۲ برابر ج) ۱۰ برابر د) ۱۰۰ برابر

۱۲- هرگاه ph محلولی کوچکتر از عدد ۷ باشد، آن محلول چگونه محلولی است؟

الف) قلیایی ب) خنثی ج) اسید د) نشاسته‌ای

۱۳- کدامیک از مقاطع زیر توسط یک خط و یک نقطه در خارج آن مشخص می‌شود؟

الف) دایره ب) سهمی ج) هذلولی د) بیضی

۱۴- کدام‌یک از مقاطع زیر توسط یک نقطه و یک عدد نامنفی مشخص می‌شود؟

الف) سهمی ب) هذلولی ج) بیضی د) دایره

۱۵- مهارت و دانش مربوط به «بررسی متون علمی» جزء کدام شایستگی‌های دبیران ریاضی است؟

الف) دانش موضوعی ب) دانش موضوعی و حرفه‌ای

ج) دانش حرفه‌ای د) قضاوت حرفه‌ای

۱۶- یک متن درسی شامل ۲۰ صفحه درس را در چند صفحه می‌توان بررسی خلاصه‌نویسی کرد؟

الف) در دو صفحه ب) در یک صفحه

ج) بستگی به متن دارد د) بستگی به متن و نظر بررسی‌کننده دارد

۱۷- در یک بررسی انتقادی به چه نکاتی باید توجه بیشتر داشت؟

الف) نکات ضعف متن ب) نکات قوت متن

ج) ابتدا نکات قوت و سپس نکات ضعف احتمالی د) ابتدا نکات ضعف احتمالی و سپس نکات قوت

۱۸- محک‌های یک بررسی محتوایی کدام‌اند؟

الف) اهداف کلی، جزئی و عینی درس ب) اهداف کلی درس و روش تدریس

ج) اهداف کلی، جزئی، عینی و روش ارائه د) محتوا و روش

۱۹- «درس‌افزار» به چه ابزاری اطلاق می‌گردد؟

الف) کتاب درسی ب) کتاب کار درسی

ج) هر نوع وسیله و ابزار آموزشی د) جزوه درسی

۲۰- هرگاه در بررسی یک متن درسی به نکات ضعفی برخورد کنیم چه اقدامی باید انجام دهیم؟

الف) آن درس را از برنامه حذف می‌کنیم.

ب) به تدوین یک متن مکمل می‌پردازیم.

ج) به دانش‌آموزان گفته می‌شود که متن را نخوانند.

د) با دیگر همکاران به مشورت پرداخته و یک متن مکمل تدوین می‌کنیم.

پاسخ‌نامه

شماره پرسش	گزینه درست
۱	د
۲	الف
۳	د
۴	الف
۵	ب
۶	د

شماره پرسش	گزینه درست
۷	الف
۸	ج
۹	ج
۱۰	ج
۱۱	ب
۱۲	ج
۱۳	ب

شماره پرسش	گزینه درست
۱۴	د
۱۵	ب
۱۶	د
۱۷	ج
۱۸	د
۱۹	ج
۲۰	د

$$۱ \times ۸ + ۱ = ۹$$
$$۱۲ \times ۸ + ۲ = ۹۸$$
$$۱۲۳ \times ۸ + ۳ = ۹۸۷$$
$$۱۲۳۴ \times ۸ + ۴ = ۹۸۷۶$$
$$۱۲۳۴۵ \times ۸ + ۵ = ۹۸۷۶۵$$
$$۱۲۳۴۵۶ \times ۸ + ۶ = ۹۸۷۶۵۴$$
$$۱۲۳۴۵۶۷ \times ۸ + ۷ = ۹۸۷۶۵۴۳$$
$$۱۲۳۴۵۶۷۸ \times ۸ + ۸ = ۹۸۷۶۵۴۳۲$$
$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۸ + ۹ = ۹۸۷۶۵۴۳۲۱$$

آیا اگر این پدیده را جادو بنامیم، مناسب است؟

فصل پنجم

ارزیابی و ارزشیابی

هدف‌های آموزشی و رفتاری

دانشجویان پس از مطالعه این فصل باید بتوانند

- مفاهیم ارزیابی و ارزشیابی را درک کرده و تفاوت‌های آن‌را تشریح کنند.
- رابطه ارزشیابی را با یادگیری تبیین نمایند.
- تفاوت‌های ارزشیابی‌های مدرسه‌ای (رسمی) و جامع را توصیف نمایند.
- نقش ارزشیابی را در فرآیند آموزش و یادگیری ریاضیات توضیح دهند.
- پاسخ مناسبی برای پرسش‌های مهم «آیا یادگیری برای ارزشیابی است؟» یا آنکه« آیا ارزشیابی برای یادگیری است؟» ارائه داده و از نظریه خود دفاع کند.
- نکات فنی تهیه و تدوین پرسش‌های چندگزینه‌ای را توضیح دهند.
- پرسش‌های تشریحی بسته و باز انتها را درک کرده و تعریف کنند.
- هدف‌های ارزشیابی تحصیلی را توضیح دهند.

کلید واژه‌ها

ارزشیابی	evaluation
ارزیابی	assessment
خودارزیابی	self- assessment
مسئله باز انتها	open- ended problem
مسئله بسته	closed- ended problem
پرسش چندگزینه‌ای	multi- choice question
پرسش تشریحی	writlen question

این کلید واژه‌ها برای مطالعه بیشتر و به‌ویژه جهت جستجو (search) در سایت‌های آموزشی و تحقیقاتی ارائه گردیده‌اند.

۵-۱ ارزیابی و ثبت کار دانش‌آموزان

ارزیابی کار محصلین و گزارش آن یک مسئله محوری در فرآیند آموزش و یادگیری ریاضیات از سه دهه پیش می‌باشد. در برخی کشورها قانون تعلیمات اجباری (ابتدایی و متوسطه) به‌گونه‌ای است که در لابه‌لای موضوعات و اهداف مشخص آموزش فرآیندهای اجرا یا ارزیابی و ارزشیابی را مشخص می‌کند. هدف اصلی از اجرای آزمون‌های ملی حفاظت از استانداردهای آموزشی بر پایه‌ای ملی است. (ما در فصل چهار به اصول و استانداردهای آموزشی اشاره‌ای مختصر خواهیم کرد).

ارزیابی به اعتبار مقاصد چندی مورد نیاز می‌باشد:

- اطلاعاتی در باب پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان به‌دست می‌دهد.
- به معلمین کمک می‌کند تا استراتژی‌های مناسبی جهت آموزش و یادگیری طراحی کنند.
- به والدین بچه‌ها اطلاعات مفیدی در باب پیشرفت تحصیلی بچه‌هایشان ارائه می‌دهد.
- بالاخره در ارزشیابی‌های رسمی محصلین با یکدیگر مقایسه می‌شوند و همچنین مدارس با یکدیگر مقایسه و طبقه‌بندی می‌گردد.

هدف این فصل بر این است که بررسی شود تا چه میزان می‌توان به طراحی ارزشیابی‌هایی دست یافت که همه این اطلاعات را برایمان فراهم کند. همچنین رابطه بین ارزشیابی ملی و ارزشیابی‌های محلی (مدرسه‌ای) را مشخص کنیم. تست‌های ملی و ارزشیابی‌های جامع در رابطه با مقاصد مشخص طراحی و اجرا می‌شوند.

۵-۲ کلیاتی در باب ارزشیابی (اصول و اجرا)

ارزشیابی و ارزیابی کار محصلین یک امر متأخر و جدید نمی‌باشد. تست‌ها و آزمون‌ها به‌صورت‌های مختلفی از نیمه دوم قرن ۱۹ وجود داشته است. از هنگامی‌که آموزش‌های همگانی ملی در اکثر کشورها، به‌ویژه کشورهای اروپایی برقرار شده است.

همچنان که خود شما از تجربه تحصیلاتتان دارید می‌دانید که تصحیح اوراق امتحان با شغل آموزگاری همراه می‌باشد. معهذا برخی از معلمین باتجربه به ارزشیابی به مثابه کاری جدید و فشاری اضافه می‌نگرند.

یکی از دلایل این نگرش وجود مقررات و قوانین محک ارزشیابی مدارس و تأمین الزامات منطقه‌ای آموزشی است. دلیل دیگر تحلیل انتقادی تندی است که اکنون بر ارزشیابی وارد می‌شود. این به‌نوبه خود معلول از چیزی شبیه یک صنعت «ارزشیابی» ناشی می‌شود که به‌مرور پیچیده‌تر و ظریف‌تر شده و کار را با دشواری همراه کرده است. به‌عنوان نمونه امر ارزشیابی را به مثابه سیلابس آزمونی می‌نگرد که برحسب هدف‌های مشخص ارزشیابی بیان می‌گردد، به‌جای آنکه ارزشیابی را صرفاً بر اساس لیستی از مواد درسی که باید آموخته شود تعریف کند.

● با پایان این بخش باید بتوانید

- رده چیزهایی که باید ارزیابی شود را مشخص کنید. چه موقع ارزشیابی و ارزیابی کنید و به چه منظورهایی این کار را باید انجام دهید؟
- درکی از بعضی عناصر کلیدی در هر طراحی ارزشیابی را کسب کنید.
- درکتان را از تنش‌هایی که ارزشیابی دربر دارد افزایش دهید.
- تنش‌هایی را که در جمع‌آوری و استفاده از نتایج ارزشیابی حاصل می‌شود پیش‌بینی کنید.

۵-۳ ارزشیابی و یادگیری

همچنان که همه محصلین می‌دانند، بیشتر معلمین کارهای آنها را تصحیح می‌کنند و نمره می‌دهند. معلمینی که قادر نیستند به‌طور منظم نوشته‌های محصلین را نمره بدهند یا آنکه این کار را با کراهت و بی‌دقتی انجام می‌دهند، غالباً به آنها از سوی معلمین ارشدتر و والدین بچه‌ها به‌عنوان معلمین ناکارآمد نگریسته می‌شود. پژوهش‌های آموزش ریاضی نشـــان می‌دهد که برای بسیاری از دانش‌آموزان جوان‌تر، تصحیح و ارزیابی اوراق آنها **تنها** فرم ارتباط بین آنها و دبیرانشان می‌باشد.

دانش‌آموزانی که بازخوردی در باب کارشـــان دریافت نمی‌کنند، به سرعت انگیزه خود را در یادگیری از دست داده و در خصوص موفقیت و یا عدم موفقیت آتی خود نامطمئن می‌شـــوند. بســـیاری از دبیران ریاضی اذعان دارنـــد کـــه تصحیح اوراق بچه‌ها امری مهم اســـت. این امر در برخی اوقات و مناســـبت‌ها یک کار اصلی تلقی می‌شـــود، در جاهایی به‌عنوان منبعی از یک فشـــار بزرگ درمی‌آید که با گذشـــت روزها و هفته‌های ترمی که می‌گذرد، این فشار بیشتر حاصل می‌شود. معهذا این امر یک کار حرفه‌ای ضروری است.

گروه‌هایی از متخصصین و محققین رســـمی آموزشـــی امر ارزشیابی طول تحصیل را در ۱۰ منطقه طبقه‌بندی کرده‌اند. در این راســـتا چارچوب‌هایی در برخی کشورهای پیشرفته نیز طراحی گردیده است. برای دبیران امر ارزشـــیابی مستمر مدرســـه‌ای جزئی لاینفک از کار حرف‌های آنها به‌حساب می‌آید. اما اصل زیر یکی از نکات مهم این چارچوب می‌باشد.

خـــود فرآینـــد ارزشـــیابی نباید تعیین‌کننده محتوای آموزشـــی باشـــد که دانش‌آموزان می‌بایســـت فراگیرند. بلکه ارزشـــیابی در خدمت آموزش و یادگیری اســـت نه کارفرمـــای آن و یا کارفرمای برنامه تحصیلی. معهذا اهمیت ارزشـــیابی آنچنان کم نیســـت که به مثابه پیچ و مهره آخر برنامه تحصیلی تلقی گردد.

ترجیحاً ارزشیابی جزئی مکمل از فرآیند تعلیم و تربیت است. که به‌گونه‌ای مستمر، بازخوردها و پیش‌خوردهای سیستم را فراهم می‌کند. بنابراین محتاج آنیم که ارزشیابی را به‌گونه‌ای سیستماتیک و منظم در استراتژی‌های آموزشی تلفیق کنیم و آن‌را در همه مقاطع اعمال کنیم. از آنجا که نتایج ارزشیابی‌ها به مقاصد مختلف چندی به‌کار می‌آید، این مقاصد را به‌هنگام ترتیبات تهیه محتوای ارزشیابی می‌بایست درنظر داشته باشیم.

تمرین پروژه‌ای. تجربه شما از ارزشیابی

به گذشته‌تان فکر کنید از تجربه‌هایتان به‌هنگامی که مورد ارزیابی و ارزشیابی به‌عنوان یک دانش‌آموز یا یک دانشجو قرار می‌گرفتید، دو لیست فراهم کنید. از روش‌هایی که به شما اعمال شده است:
الف) لیستی از تجربیات مثبت، ب) لیستی از تجربیات منفی
سپس این تجربیات را با دیگر اعضای گروه‌تان به بحث بگذارید.

۴-۵ چگونه به ارزشیابی فکر کنیم؟ - تشخیص تناقضات

چنان به‌نظر می‌رسد که ارزشیابی خود امری واضح و فعالیتی ارزشمند است. هرگاه درصدد آن باشیم که کاری برای بچه‌ها طراحی کنیم، کاری که برای بچه‌ها لذت‌بخش و انگیزه‌بخش باشـد، و بچه‌ها را به طریقی به جلو ببرد، آنگاه محتاج آنیم که چیزی در باب این بچه‌ها بدانیم، چه کاری می‌توانند بکنند؟ و یا آنکه انجام چه نوع کارهایی را مشکل می‌یابند؟

با این وجود، ارزشـیابی چالش‌برانگیز اسـت. بحث و جدل‌هایی در باب مقاصد ارزشیابی در جریان است: نوع ارزشـیابی که دبیران می‌باید اجرا کنند و حتی اینکه چه زمانی باید ارزشـیابی کنند. آیا اساساً ارزشیابی یک ماهیت کمی دارد یا آنکه علمی اسـت که بر کاربرد روش‌های اعمال‌شـده و آزمون‌شـده استوار بوده و اساساً ماهیتی کیفی دارد؟

لذا بـه زودی درمی‌یابیم که اینکه مشـخص کنیم چه چیزی را باید ارزیابی و ارزشـیابی کنیم امری آسـان نمی‌باشد. برای مثال این پرسش‌ها را درنظر می‌گیریم:

۱. آیا می‌خواهیم دانش محصلین را ارزشیابی کنیم یا درک آنها را؟
۲. چگونه این دو را از به‌خاطرسـپاری متمایز می‌سـازیم؟ یا آنکه آیا علاقه‌مند به ارزشـیابی سـطح پیشرفت مهارت‌های آنان هستیم؟

۳. آیا دریافته‌ایم که دانش‌آموزانمان چه کارهایی می‌توانند بکنند (پاسخ‌های مثبت آنان) یا آنکه آیا ارزشیابی اساساً یک نگرش منفی است که در آن سطح پایینی از موفقیت‌ها توسط بچه‌ها به نمایش درمی‌آید؟

۴. آیا ارزشیابی‌مان قادر به تمایز پیشرفت فردی بچه‌ها است، که بر اساس اجرای عملکرد اندازه‌گیری بوده یا آنکه آیا ارزشیابی به‌گونه ساده‌ای بچه‌ها را ردیف‌بندی می‌کند؟

ارزشیابی حوزه‌ای پر از تناقضات و تنش‌ها است و مناسب‌تر آن است که به این حوزه چنین بنگریم!

تمرین پروژه‌ای

چهار پرسش فوق را بررسی کنید.

- تناقضاتی را که هر یک دربر دارند مشخص کرده و به بحث بگذارید.
- یکی از این تناقضات و تنش‌ها را به دلخواه انتخاب کرده و شرح دهید که چگونه می‌توان بر آن فائق آمد.

۵-۵ ابزارهای ارزیابی و ارزشیابی

ابزارهای ارزشـــیابی و ارزیابی متناسب با اهداف این ارزشـــیابی‌ها به‌صورت‌های متنوعی امروزه وجود داشته و مورد استفاده قرار می‌گیرد. مهمترین اشکال ارزیابی و ارزشیابی مشتملند بر:

(۱) پرسش‌های کوتاه کلاس به‌صورت شفاهی و کتبی (Quiz)

(۲) پرسش‌های هفتگی که به‌صورت کار در منزل و به‌صورت صفحه مسئله ارائه می‌شود. (Problem sheet)

(۳) پرسش‌های پایان ترم یا سال تحصیلی که به دو صورت تستی و تشریحی می‌تواند طراحی و اجرا گردد (ارزشیابی رسمی).

(۴) پرسش‌های آزمون‌های جامع همانند پرسش‌های چهارگزینه‌ای آزمون سراسری دانشگاه‌ها و یا آزمون‌های گزینش سازمان‌ها و نهادهای اجرایی.

پرسش‌های کوتاه quiz کتبی برای استفاده از زمان‌های کوتاه کلاس و به‌صورت تک‌پرسشی برای زمان ۲-۵ دقیقه در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد.

پرسش‌های کوتاه ضمن درس، به‌هنگام تدریس از کل کلاس استفهام می‌شود و ضمن آن ارزیابی کلاس انجام شده و در تقویت یادگیری و آموزش دانش‌آموزان مؤثر می‌باشد.

آزمون‌های رســـمی به آزمون‌های پایان ســـال تحصیلی اطلاق می‌شـــود که توسط مدرســـه انجام می‌گیرد.

پرسش‌های این آزمون‌ها، که توسط دبیران ریاضی دبیرستان و یا منطقه طراحی می‌گردد، تشریحی می‌باشد. در حالی که آزمون‌های جامع به‌منظور مقایســه مدارس و انتخاب دانشــجویان دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی انجام می‌گیرد. پرسش‌های این آزمون‌ها غالباً چهارگزینه‌ای بوده و در خارج از مدرسه طراحی می‌شود.

۵-۵-۱ نکات فنی پرسش‌های تشریحی

ابتدا به توضیح پرسش‌های تشریحی کلاسیک و سنتی می‌پردازیم. هر پرسش تشریحی می‌بایست به‌لحاظ وجوه مختلف محتوای ریاضی هدفدار و مشــخص باشد. اینکه هدف پرسش (مسئله) بخش مهارت‌ها است، سنجش دانش، یا هدفشان سنجش نگرش محصلین نسبت به ریاضیات است می‌بایست برای طراح مشخص گردد.

مجموعه پرسش‌ها می‌بایست به‌گونه‌ای باشد که:

- به‌لحاظ درجه سختی از ساده به مشکل فهرست‌بندی شوند.
- وجوه سه‌گانه مهارت‌ها، دانش‌ها و نگرش‌ها را توأماً سنجش نمایند.
- پرسش‌ها به‌لحاظ روش‌های یادگیری و آموزشی می‌توانند پرسش‌گونه طراحی گردند. می‌دانیم مسائل ریاضی اساساً بر سه گونه‌اند:
- ثابت کنید $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$ (ثابت کردنی)
- حاصل $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ را پیدا کنید. (یافتنی)
- مسائل پژوهشی. کدامیک از احکام زیر درست و کدامیک نادرست‌اند؟ آنها را که فکر می‌کنید درست‌اند ثابت کنید و آنها را که فکر می‌کنید نادرست‌اند با مثال نقض رد کنید:
  - الف) هر دامنه صحیح یک میدان است.
  - ب) هر میدان یک دامنه صحیح است.
  - ج) هر حلقه بخش یک میدان است.
  - د) هر حلقه بخش متناهی یک میدان است.

پرسش‌های مربوط به آزمون درس جبر ۱ دانشگاهی

در حل این‌گونه مسائل محصلین ابتدا حدسیه‌سازی می‌کنند سپس حدس خود را اثبات می‌کنند و یا اگر حدس می‌زنند که حکم نادرست است با مثال مشخص رد می‌کنند (ساختی مثال نقض).

مسائل پژوهش محور می‌تواند به‌صورت گروهی نیز ارائه گردد و به هر گروه یک نمره و امتیاز داده شود. حتی در برخی از مؤسسات آموزش عالی اجرای آزمون‌های رسمی به این روش انجام می‌گیرد.

پرسش‌های تشریحی چندمرحله‌ای

یک مسئله ریاضی ممکن است شامل چندین قسمت باشد. در واقع یک مسئله شامل دو یا سه مسئله مجزا ولکن مرتبط به هم می‌باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

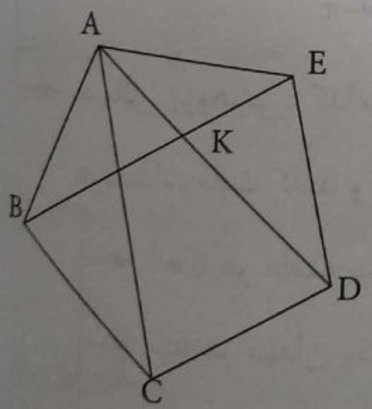
مثال:

یک پنج‌ضلعی منتظم رسم کنید.

الف) اندازه هر زاویه داخلی آن‌را محاسبه کنید.

ب) ثابت کنید $\Delta ABE \sim \Delta AKE$

ج) هرگاه d طول یک قطر چندضلعی و a طول یک ضلع آن باشد، نسبت $\frac{d}{a}$ را پیدا کنید.



حل قسمت (ب) مستلزم حل قسمت (الف) است، در ضمن حل قسمت (ج) با استفاده از نتیجه (ب) اما بدون حل این قسمت امکان‌پذیر است.

باید برای دانشجویان اعلام کنیم که در حل هر قسمت می‌توانند از حکم و نتیجه قسمت قبلی استفاده کنند ولو آنکه قبلاً به حل حکم قبلی نتوانند نایل گردند.

مسئله‌ها و پرسش‌های چندقسمتی، بعضاً مسئله‌ای پژوهش‌گونه بوده و در آموزش ریاضی اهمیت زیادی دارند. این‌گونه مسئله‌ها غالباً در سطح ریاضیات عالی طراحی و اجرا می‌گردند.

مثال:

الف) ثابت کنید در گروه جبری $<G;\cdot>$ هرگاه برای $x^2 = e, x \in G$ آنگاه G گروهی آبلی است.

ب) فرض کنیم $H \leq G$ به قسمی که برای هر $x \in G$ $x^2 \in H, x \in G$.

ثابت کنید که $G | H$ نرمال اســت. قســمت (الف) مسئله بسیار ســاده و قسمت (ب) نیز به‌آسانی با استفاده از نتیجه قســمت اول حل می‌شــود. در حالی‌که هرگاه مســئله را فقط مشتمل بر قســمت (ب) مطرح کنیم دانشجویان در حل آن دچار مشکل می‌شوند.

تمرین

پنج مسئله ۲، ۳، یا ۴ قسمتی از موضوعات مختلف ریاضیات دبیرستان یا دانشگاهی طراحی کنید و به همراه حل آن، به مدرس خود ارائه دهید.

۵-۵-۲ مسئله‌های تشریحی ریاضیات پیشرفته

در برخی مســئله‌های تشــریحی ریاضیات پیشرفته تلفیقی از مفهوم‌ســازی، تکنیک‌ها و مهارت‌های مختلف تفکری و محاسباتی ملاحظه می‌شود. برای نمونه به این مسئله توجه کنید.

۱. در فضــای بــرداری $M_{n\times m}$ از ماتریس‌هــای $n \times n$ روی R، ماتریس A را پوچ‌تــوان نامیم هرگاه برای عددی طبیعی مانند s، $A^s = 0$ (تعریف مفهوم)، ثابت کنید هرگاه ماتریس A پوچ‌توان باشد، A^t (ترانهش A) نیز پوچ‌توان است.

۲. تابع f را بر $[a,b]$ پیوسته مطلق نامیم در صورتی‌که:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall \{(a_k, b_k)\}_{0 \leq k \leq n} \left[\sum_{k=1}^{n} | b_k - a_k | < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} | f(b_k) - f(a_k) | < \varepsilon \right]$$

الف) ثابت کنید هر تابع پیوسته مطلق، پیوسته و با تغییر کراندار است.

ب) نشان دهید که تابع پیوسته و باتغییر کرانداری وجود دارد که پیوسته مطلق نیست. (ر.ک. [۹])

امروزه در نظام‌های آموزشــی پویا و پیشــرفته، طراحی درس و ارائه مســئله به دانش‌آمــوزان در چارچوب مفهوم‌سازی صورت‌بندی شده انجام می‌گیرد. (ر.ک. [۴] و [۸])

۵-۵-۳ پرسش‌ها و آزمون‌های چندگزینه‌ای

امروزه آزمون‌های چندگزینه‌ای یکی از ابزارهای مهم سنجش پیشرفت تحصیلی به‌شمار می‌رود. تهیه، طراحی و اجرای این‌گونه آزمون‌ها در زمینه‌های مختلف علمی به صنعتی فراگیر تبدیل شده است.

معمولی‌ترین این‌گونه پرسش‌ها، پرسش‌های چهارگزینه‌ای و پرسش‌های پنج‌گزینه‌ای هستند.

نکته مهم

جامعه در کل به مثابه مدرسه و محل یادگیری دانش‌آموزان است. هر چه پیوند بین مدرسه رسمی، جامعه و خانواده معنی‌دارتر و سامان‌یافته‌تر باشد، امر تعلیم و تربیت دانش‌آموزان پایدارتر و لذت‌بخش‌تر خواهد بود.

۵-۶ پرسش‌های تشریحی باز انتها[1]

پرسش‌های تشریحی معمولاً بر دو گونه‌اند:

پرسش‌هایی که در آن با پاسخ‌گویی به مسئله و یا یافتن جواب آن کار مسئله تمام می‌شود. این‌گونه پرسش‌ها را پرسش‌های بسته[2] می‌نامیم. پرسش‌های زیر از این قسم‌اند.

- **ثابت کنید:**

$$\int^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{۲}$$

- **ثابت کنید:**

$$۱+۲+۳+۴+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

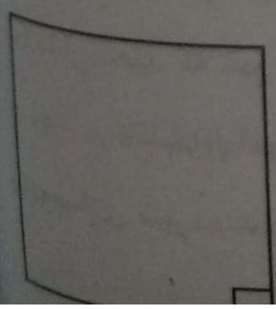
- **ریشه‌های حقیقی معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید:**

$$\sqrt{۲}x^{۲} - ۱۱x + ۱۳ = ۰$$

$$x^{۳} - ۷x + ۲۲ = ۰$$

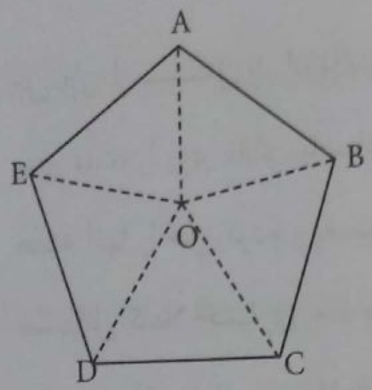
اما گونه دیگری از مسائل تشریحی وجود دارد که با حل مسئله و یا یافتن جواب آن کار مسئله پایان نمی‌یابد! برای مثال به این پرسش‌ها توجه کنید:

- **اندازه زاویه‌های یک چهارضلعی منتظم (مربع) چقدر است؟**



۱. Open ended problems and questions

• اندازه زاویه‌های یک پنج‌ضلعی منتظم چقدر است؟



حل: پنج مثلث وجود دارد. پس اندازه کل زاویه‌ها که شامل زاویه‌های O نیز می‌باشد برابر است با:

قائمه ۱۰ = قائمه ۲ × ۵

اما زاویه‌های O برابر ۴ قائمه‌اند، قائمه ۶ = قائمه (۴ − ۱۰)

درجه ۵۴۰ = ۹۰ × ۶

درجه ۱۰۸ = ۵ : ۵۴۰

• حال اندازه زاویه‌های یک شش‌ضلعی منتظم را بیابید.

به‌طور کلی اندازه زاویه‌های n یک ضلعی منتظم چقدر است؟

که پاسخ آن $\left(\frac{2n-4}{n}\right)$ قائمه است.

• تعداد اقطار یک پنج‌ضلعی منتظم چقدر است؟ ۵ تا

حال تعداد اقطار یک شش‌ضلعی منتظم را پیدا کنید.

آیا می‌توانید فرمولی (برحسب n) برای تعداد اقطار یک n ضلعی به‌دست آورید؟

که پاسخ آن $\frac{n(n-3)}{2}$ می‌باشد.

این مســئله می‌تواند در سـطح ریاضیات متوسطه (دوره اول یا دوم) ارائه گردد، زیرا مفاهیم قطر و چندضلعی برای درک آن کفایت می‌کند.

روش تعمیم مســئله نیز بر اســاس تجربیات دانش‌آموزان روی چهارضلعی‌ها، پنج‌ضلعی‌ها، شــش‌ضلعی‌ها و سپس تعمیم آن در قالب فعالیت‌های دانش‌آموزان می‌تواند اتفاق افتد.

معمولاً مسئله را برای پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی مورد پرسش قرار داده و تعمیم آن‌را به‌عنوان مسئله باز[1] به‌عهده دانش‌آموزان می‌گذاریم.

1. Open ended problems

می‌توان از مسائل باز انتها به‌عنوان مسائل مسابقه‌ای نیز بهره جست. مجموعه‌ای از مسائل مسابقه‌ای (مثلاً پنج عدد) را روی تابلو ریاضیات مدرسه اعلام می‌کنیم. از دانش‌آموزان می‌خواهیم که ظرف مدت مثلاً یک هفته آنها را حل کرده و به مسئول پرسش‌ها و مسائل مسابقه‌ای (یا مسائل جایزه‌دار) ارائه دهند. حل اینگونه مسائل کاملاً اختیاری بوده و تنها می‌تواند انگیزه بیشتری باشد برای دانش‌آموزانی که اشتیاق بیشتری به حل مسئله دارند. معمولاً به کسانی که بهترین حل را ارائه دهند جوایزی اهدا می‌گردد. از این لحاظ اینگونه مسائل را مسائل جایزه‌ای (Prize Problems) نیز می‌نامند.

به‌عنوان مثال دیگر می‌دانیم:

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

حال حاصل‌جمع‌های زیر را محاسبه کنید[1]:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=?$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=?$$

$$\vdots$$

$$1^k+2^k+3^k+4^k+\cdots+n^k=?$$

البته نوع دیگری از مسائل باز انتها وجود دارد که در این مقوله نمی‌گنجد. در تحقیقات ریاضی مسئله باز انتها به مسئله‌ای اطلاق می‌شود که هیچ راه‌حل مشخصی نداشته و در واقع حدسیه‌ای بیش نیست. برخی حدسیه‌های ریاضی مستلزم کار گروهی ریاضیدان‌ها بوده و بعضاً می‌توانند سال‌ها ذهن و فکر ریاضیدانان را به خود مشغول نمایند. به‌عنوان مثال حدس فرما، که به‌نام قضیه آخر فرما مشهور است، در سال ۱۶۳۴ توسط پیر دوفرما حقوقدان فرانسوی به‌صورت اینکه معادله: $x^n+y^n=z^n$ برای اعداد طبیعی $n>2$ در اعداد صحیح غیرصفر جواب ندارد مطرح گردید. علی‌ای‌حال این مسئله تا سال ۱۹۹۲ میلادی هنوز مسئله باز و بلاتکلیف تلقی می‌شد و سرانجام در این سال توسط وایلز ریاضیدان آمریکایی حل شد.

۱. مصاحب، غلامحسین، تئوری اعداد، انتشارات جیبی

۵-۷ پرسش‌ها و آزمون‌های چندگزینه‌ای

اینکه چرا و چگونه اجرای آزمون‌های چندگزینه‌ای امری ملی و حتی فراملی تلقی می‌گردد، دلایل متعددی دارد. مهمترین این دلایل به قرار ذیل‌اند:

- اجرای آزمون‌های چندگزینه‌ای نیاز به حضور مؤثر طراحان آزمون‌ها ندارد.
- تصحیح اوراق آزمون‌ها به طریق صنعتی و با استفاده از علامت‌خوان‌ها (readers Mark) انجام گرفته و در مدت زمان کوتاهی انجام می‌گیرد، ولو آنکه تعداد اوراق (پاسخنامه) بسیار بسیار زیاد باشد.
- دقت علامت‌خوان‌ها در تصحیح اوراق بسیار بالا بوده و به‌گونه‌ای یکنواخت انجام می‌گیرد، در حالی‌که تصحیح اوراق تشریحی تا اندازه‌ای وابستگی به فرد تصحیح‌کننده داشته و غالباً فاقد هماهنگی کافی و لازم می‌باشد.
- مقایسه و تحلیل نمرات کسب‌شده توسط دانش‌آموزان آسان‌تر بوده یا به‌عبارت دیگر روایی، اعتباربخشی و پایداری آزمون معتبرتر می‌باشد مشروط‌بر آنکه پرسش‌ها به طریقی فنی و محتوایی تهیه شده و از شرایط روایی آزمون (روانسنجی) برخوردار باشند.

۵-۷-۱ ویژگی‌های آزمون‌های چندگزینه‌ای

طراحان و متخصصین سنجش تحصیلی بر این باورند که آزمون‌های چندگزینه‌ای بهترین ابزار سنجش تحصیلی می‌باشد. این‌گونه آزمون‌ها در همه موضوعات علمی، حتی پزشکی و در همه مقاطع تحصیلی و دانشگاهی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. امروزه، آزمون‌های دوره‌ای تحصیلی پیشرفته‌تر حتی کارشناسی ارشد و دکتری نیز در بسیاری از حیطه‌های علمی، به روش تستی و چندگزینه‌ای انجام می‌گیرد. برای نمونه دانشگاه پیام نور از ۲۸ رشته و گرایش تحصیلی دوره‌های دکتری تخصصی، آزمون ورودی ۲۵ رشته و گرایش را به روش چندگزینه‌ای اجرا می‌نماید. در آزمون ورودی دکتری سال ۱۳۸۸ این دانشگاه تنها رشته‌های فیزیک، ریاضی و حقوق به‌صورت تشریحی انجام گرفته است.

قبل از آنکه در خصوص ویژگی‌ها و ماهیت‌های پرسش‌های چندگزینه‌ای بحث کنیم، ابتدا به تشریح تعاریف و نکات کلی در باب آنها می‌پردازیم.

۵-۷-۲ تعریف عمومی پرسش چندگزینه‌ای

پرسش چندگزینه‌ای به پرسشی اطلاق می‌شود که شامل دو بخش باشد:

۱. محتوی: پرسش یک سؤال یا مسئله‌ای مشخص و معین را جهت پاسخگویی به دانش‌آموز و یا فرد مورد ارزشیابی ارائه می‌کند. محتوی (content) می‌بایست همانند یک پرسش ریاضی تشریحی سؤال مشخصی را برای حل در اختیار دانش‌آموز قرار دهد. باید متذکر شویم که پرسش‌های چندگزینه‌ای ریاضی، با سایر پرسش‌های چندگزینه‌ای، به‌ویژه در دروس انسانی، تفاوت اساسی دارند. برای روشن‌تر شدن بحث به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

۱- فردوسی، شاعر نامدار پارسی،

الف) در مشهد می‌زیسته است. ب) در قزوین می‌زیسته است.

ج) در نیشابور می‌زیسته است. د) در طوس می‌زیسته است.

یک پرسش چندگزینه‌ای در حوزه زبان و ادبیات فارسی می‌تواند تلقی گردد. لکن، وقتی گزینه‌های (پاسخ‌های) آن را حذف کنیم، فقط قسمت «فردوسی، شاعر نامدار پارسی» باقی می‌ماند که شامل محتوای پرسش است. محتوای این پرسش هیچ‌گونه سؤال مشخصی را دربر ندارد. دانش‌آموز با خواندن کامل پرسش، بلافاصله، یکی از گزینه‌ها را انتخاب و به آن پاسخ می‌دهد. اینگونه پرسش‌ها از آنجا که حافظه و به‌خاطرسپاری فرد را سنجش می‌کنند مشکلی در طراحی آزمون‌های انسانی ندارد. لکن طرح اینگونه پرسش‌ها که از نظر اصول فنی طراحی پرسش‌های چندگزینه‌ای ریاضی، فاقد محتوی هستند، در حیطه ریاضیات جایز نمی‌باشند. به مثال زیر توجه کنید.

۲- هرگاه A و B دو زیرمجموعه X و $f:X\to Y$ یک تابع باشد، کدام گزینه درست است؟

الف) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ ب) $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$

ج) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ د) $f(A\cap B)=f(A\cup B)$

در اینجا نیز محتوای پرسش شامل عبارت:

«هرگاه A و B دو زیرمجموعه X و $f:X\to Y$ یک تابع باشد»

است که هیچ پرسش مشخصی را دربر ندارد و لذا یک محتوای ناقص قلمداد می‌شود. دانش‌آموز در پاسخ‌گویی به این پرسش دچار سردرگمی می‌شود. نمی‌داند باید به دنبال چه چیزی باشد. در واقع هر یک از گزینه‌ها خود یک پرسش است که می‌تواند درست و یا نادرست باشد. دانش‌آموز به‌جای تفکر و کار روی محتوا، می‌بایست روی گزینه‌ها کار کند! فقط در حالتی می‌تواند پاسخ صحیح را انتخاب کند که قضیه مربوط را با استناد به حافظه خود شناسایی و گزینه (الف) را فوراً تشخیص دهد.

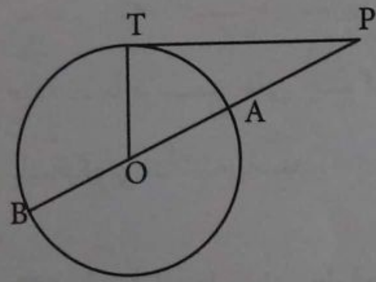
۲. گزینه‌ها: بخش دوم یک پرسش چندگزینه‌ای پاسخ‌ها و یا به اصطلاح گزینه‌های آن است. دو مثال مذکور پرسش‌های چهارگزینه‌ای به‌حساب می‌آیند که هر یک چهار گزینه را دربر دارند که از میان آنها فقط یک گزینه درست و سه‌تای باقیمانده نادرست‌اند. اغلب طراحان آزمون‌های چندگزینه‌ای پرسش‌های چهارگزینه‌ای را ابزار ارزشیابی اینگونه آزمون‌ها قرار داده و مبادرت به طراحی اینگونه پرسش‌ها می‌نمایند.

لکن باید درنظر داشت که طراحی پرسش‌های پنج‌گزینه‌ای نیز معمول بوده و در بسیاری موارد مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای نمونه به پرسش‌های زیر توجه کنید.

۱- هرگاه تبدیل خطی $f: R^۲ \to R$ با ضابطه $f(x,y)=(x-y, y-x, ۰)$ تعریف شده باشد، هسته f برابر کدام است؟

الف) $\{(x,y) \mid y=-x\}$
ب) $\{(x,y) \mid y-x=۱\}$
ج) $\{(x,y) \mid x=۰\}$
د) $\{(x,y) \mid y=x\}$
ه) $\{(x,y) \mid y=۰\}$

۲- در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۸ و طول $PA=۴$، طول مماس PT برابر کدام است؟



الف) $۲\sqrt{۵}$
ب) $۴\sqrt{۵}$
ج) ۸
د) ۶
ه) $۳\sqrt{۵}$

۳- اکسترموم‌های خط به معادله $y=[x]-x$ روی کدام خط واقع‌اند؟

الف) $y=۰$
ب) $y=۱$
ج) $y=-۱$
د) $y=-۲$
ه) $y=۲$

۴- تابع با ضابطه:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{۱+e^{\frac{۱}{x}}} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

در نقطه به طول $x = 0$ از نظر مشتق‌پذیری چگونه است؟

الف) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

ب) مشتق چپ دارد اما مشتق راست ندارد.

ج) مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

د) مشتق‌پذیر است.

ه) نه مشتق راست و نه مشتق چپ دارد.

۵- دنباله با جمله عمومی:

$$a_n = \frac{3}{n^2} + \frac{6}{n^2} + \frac{9}{n^2} + \cdots + \frac{3n}{n^2}$$

به‌لحاظ همگرایی و کرانداری چگونه است؟

الف) واگرا- بیکران ب) واگرا- کراندار ج) همگرا به ۳ د) همگرا به $\frac{3}{2}$ ه) همگرا به ۶

تبصره: ملاحظه می‌کنیم که پرسش‌های پنج‌گزینه‌ای تفاوت اساسی با پرسش‌های چهارگزینه‌ای ندارد. همه پرسش‌های چندگزینه‌ای دارای دو جزء اساسی «محتوی» و «گزینه‌ها» هستند. در پرسش‌های چندگزینه‌ای معمولی که کلاسیک نامیده می‌شوند، از بین گزینه‌ها فقط یک گزینه درست می‌باشد. اما محققین در صددند تا پرسش‌های چندگزینه‌ای با گزینه‌های وزن‌دار نیز طراحی کنند به‌گونه‌ای که انعطاف بیشتری در پاسخگویی داشته باشند.

۵-۸ اصول فنی طراحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ویژگی‌های اینگونه پرسش‌ها را می‌توان از دو جنبه مورد بحث و بررسی قرار داد. ابتدا به توضیح ویژگی‌هایی می‌پردازیم که یک پرسش به تنهایی باید دارا باشد.

زمان کوتاه:

همانگونه که گفته شد یک پرسش (چهارگزینه‌ای یا پنج‌گزینه‌ای) باید دارای محتوی باشد. در واقع از این نظر یک پرسش چندگزینه‌ای تفاوتی با یک پرسش یا یک مسئله ریاضی تشریحی نخواهد داشت. تنها تفاوت یک پرسش چندگزینه‌ای ریاضی با یک سؤال یا یک مسئله ریاضی از این قرار است که پاسخ پرسش چندگزینه‌ای، به همراه سه پاسخ دیگر، داده شده است. دانش‌آموز پس از حل پرسش، جواب خود را با جواب‌های پرسش، که همان گزینه‌ها هستند، مقایسه کرده، پاسخ درست را مشخص می‌کند.

پاسخ به پرسش چندگزینه‌ای همانند حل مسئله ریاضی مستلزم تسلط دانش‌آموز به مفاهیم درس و موضوعات مرتبط با آن می‌باشد. البته در حل یک پرسش چندگزینه‌ای، چنانچه محاسباتی باشد، می‌تواند بخشی از محاسبات را ذهنی انجام داده و سریع‌تر جواب پرسش را دریافته و انتخاب نماید.

تفاوت دیگر یک پرسش چندگزینه‌ای با یک مسئله معمولی در زمانی است که برای حل آن اختصاص می‌یابد، در حالی‌که برای یک مسئله، به تناسب محتوی آن، معمولاً زمان بیشتری لحاظ می‌گردد. معمولاً زمان لازم برای پاسخگویی به یک پرسش چندگزینه‌ای دو دقیقه می‌باشد.

گزینه‌های یک پرسش چندگزینه‌ای می‌بایست هم‌وزن باشند. منظور از هم‌وزنی گزینه‌ها، به‌لحاظ شکلی و ظاهری است. مثلاً اگر گزینه درست یک پرسش چندگزینه‌ای عددی دورقمی باشد، سایر گزینه‌ها نیز می‌بایست اعدادی دورقمی باشند. در مورد پرسش‌های چهارگزینه‌ای، هم‌وزنی می‌تواند به‌صورت دو گزینه در مقابل دو گزینه دیگر نیز لحاظ گردد. بدین‌ترتیب هرگاه جواب درست عددی یک رقمی و مثبت است، دو گزینه مثبت و دو گزینه منفی که همگی یک رقمی‌اند ترجیح داده می‌شوند.

نکته مهم

تعادل گزینه‌ها در مقابل هم و یا تعادل دو به دو پرسش‌های چهارگزینه‌ای یکی از ویژگی‌های مهم اینگونه پرسش‌ها می‌باشد.

۵-۸-۱ ویژگی مجموعه‌ای پرسش‌های چندگزینه‌ای

یک مجموعه پرسش چندگزینه‌ای شامل حداقل ۲۰ و به‌طور معمول ۳۵ تا ۴۵ پرسش می‌باشد.

پرسش‌ها می‌بایست از آسان به مشکل و سپس به مشکل‌تر طبقه‌بندی و فهرست شوند. این امر کمک می‌کند تا دانش‌آموز با حل پرسش‌های ساده‌تر، اعتماد به نفس بیشتری یافته و از همه توان و آموزه‌های کسبی خود در پاسخ به بقیه پرسش‌ها استفاده کند.

جامعیت: یک مجموعه پرسش می‌بایست به‌لحاظ ارزشیابی هدف‌های آموزشی و موضوعی از جامعیت لازم برخوردار باشد. به‌لحاظ هدف‌های آموزشی می‌بایست به‌گونه‌ای طراحی گردد که توانایی‌های فردی را در حیطه‌های سه‌گانه آموزشی، مهارتی، دانشی و بینشی مورد سنجش قرار دهد.

هر پرسش به‌لحاظ موضوعی که مورد ارزیابی قرار می‌دهد می‌تواند در یکی از سه‌طبقه

- پرسش‌های مهارتی
- پرسش‌های دانشی
- پرسش‌های بینشی (نگرشی)

طبقه‌بندی شود.

هرگاه $n_{۱}$ برابر تعداد پرســش‌های مهارتی، $n_{۲}$ برابر تعداد پرســش‌های دانشی و $n_{۳}$ برابر تعداد پرسش‌های بینشی باشد و n را برابر تعداد کل پرسش‌های آزمون قرار دهیم، بدیهی است که تساوی:

$$n = n_{۱} + n_{۲} + n_{۳}$$

برقرار خواهد بود. هر یک از n_iها $(۱ \le i \le ۳)$ متناســب حجم مطالبی از کتاب درســی که بیشــتر جنبه پرورش هدف‌های مربوطه در آن طبقه را دارد تعیین می‌گردد.

بــرای مثال هــرگاه از یک کتاب درســی ۹۰ صفحه‌ای ۳۰ صفحه به‌طور متوســط بالا به موضوعات دانشــی اختصاص دارد، $n_{۲}$ را برابر $\frac{۱}{۳}$ کل پرسش‌ها درنظر می‌گیریم و اگر تعداد صفحات مرتبط با موضوعات بینشی برابر ۱۰ صفحه بوده باشد، $n_{۳}$ را به‌طور تقریبی برابر ۱۰ اختیار می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که:

طراحی پرسش‌های چندگزینه‌ای متضمن صرف وقت بسیار و بیشتر از وقتی است که صرف طراحی پرسش‌های تشریحی می‌گردد.

آزمون‌های ملی، منطقه‌ای و جهانی مانند آزمون‌های TIMS یا TOFEL که به‌صورت چندگزینه‌ای طراحی می‌شــوند توســط گروه‌هایی خبره از افرادی تهیه و تدوین می‌شــوند که علاوه‌بر سابقه ممتد آموزشی در کار طراحی آزمون‌ها از تخصص لازم بهره‌مند هستند.

نباید تصور کرد که هر کس تحصیلات بالایی داشــته باشــد، به‌خودی خود واجد تخصص طراحی پرسش‌های چندگزینه‌ای است.

پژوهش‌های انجام‌گرفته در خصوص پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور سراسری مؤید آن است که اهداف نگرشی در اینگونه آزمون‌ها از اهمیت مناسبی برخوردار نبوده است. برای نمونه به تحلیل ذیل که در خصوص کنکورهای سراسری سال‌های ۱۳۸۲ و ۱۳۸۳ توسط گروهی از دانشجویان انجام گرفته است توجه می‌کنیم:

	مهارت‌های محاسباتی	مهارتی- دانشی	دانشی	نگرشی	جمع پرسش‌ها
۱۳۸۲	۲۹	۸	۱۰	۳	۵۵
۱۳۸۳	۳۰	۱۰	۹	۲	۵۵

ملاحظه می‌شـود که در ســال ۱۳۸۳ از بین ۵۵ پرسش فقط ۲ پرسش با اهداف نگرشی ریاضیات دبیرستانی مرتبط بوده اســت. طبیعی اســت که داوطلبان ورودی دانشگاه‌ها، در مســیر مطالعه و آماده‌سازی خود جهت موفقیت در آزمون به موضوعاتی که جنبه نگرشی دارد توجه کافی نخواهند داشت. یکی از اشکالات آموزشی کنکور سراســری، جهت‌دهی به محتوای آموزشــی است که در مدارس اعمال می‌شــود. نتیجه این امر فاصله معنی‌داری است که بین برنامه اعمال‌شده[1] و برنامه تحصیلی مطلوب[2] و طراحی‌شده به‌وجود می‌آید.

به‌لحاظ موضوعی نیز، پژوهش‌ها و بررســی‌ها نشانگر آن است که بیش از ۵۰ درصد پرسش‌های آزمون سراسری گروه ریاضی-فیزیک به پرسش‌ها و مسائل مربوط به درس حساب دیفرانسیل و انتگرال (حسابان ۱ و ۲) اختصاص دارد. در سال ۱۳۸۲ از بین ۵۵ پرسش ۲۶ پرسش و در سال ۱۳۸۳ از بین ۵۵ پرسش ۲۸ پرسش به این درس اختصاص داد شده است.

۵-۸-۲ استانداردسازی پرسش‌های چندگزینه‌ای

مسئله دیگری که باید در خصوص آزمون‌های جامع و سنجش پیشرفت تحصیلی مورد توجه قرار داد استفاده از آزمون‌ها و مجموعه پرسش‌های استاندارد می‌باشد.

استانداردســازی یک مجموعه پرســش فرآیندی طولانی و علمی اســت که در هر مرحله از اجرا انجام شده و مجموعه پرســش‌ها با تعدیل‌های مناســبی به‌صورت اســتاندارد درمی‌آید. در اینجا هدفمان این نیست که به تفصیل به‌نحوه استانداردسازی پرسش‌های چندگزینه‌ای بپردازیم، زیرا که از حوصله این رساله خارج می‌باشد. با این حال نگاهی گذرا و مجمل به این فرآیند را لازم می‌دانیم.

در آزمون‌های جامع[3] که بعداً مفصل‌تر به‌شــرح آن خواهیم پرداخت، یک مجموعه پرســش مثلاً ۱۰۰ پرسش را شماره‌بندی کرده و اجرا می‌نمایند.

پس از اجرا، جمعیت مورد آزمون را به ۴ یا ۳ گروه تقسیم‌بندی می‌کنند:

- گروه خیلی قوی که نمرات بالایی (مثلاً ۹۰ به بالا از ۱۰۰) کسب کرده‌اند.
- گروه قوی که نمرات بین ۹۰-۷۵ را کسب کرده‌اند.
- گروه متوسط که نمرات بین ۷۵-۴۵ را کسب کرده‌اند.
- گروه ضعیف که نمراتی پایین‌تر از ۴۵ را کسب کرده‌اند.

1. Implemented Curriculum
2. ...d Curriculum

پس از آن به هر پرسش امتیازی تعلق می‌گیرد که نشانگر درجه سختی آن پرسش است. اگر به پرسش شماره n عمدتاً گروه خیلی قوی پاسخ داده‌اند و سایر گروه‌ها به‌ویژه گروه‌های متوسط به پایین پاسخ نداده باشند، این پرسش به‌عنوان یک پرسش سخت طبقه‌بندی می‌شود. به‌همین نحو سایر پرسش‌ها در مجموعه ۱۰۰ پرسشی طبقه‌بندی می‌شود به‌نحوی که هر پرسش در یک طبقه از ۴ طبقه پرسش‌های خیلی دشوار، دشوار، متوسط و آسان قرار گیرد.

حال هرگاه پرسشی از نظر طراحان آزمون خیلی دشوار یا دشوار قلمداد می‌شده است، لیکن در تحلیل آماری در طبقه دشوار یا خیلی دشوار قرار نگیرد، چنین پرسشی نامناسب تشخیص داده شده و از مجموعه پرسش‌های آن آزمون حذف می‌گردد. به‌جای پرسش حذف‌شده پرسشی دیگر طرح و به مجموعه اضافه می‌شود. به همین نحو سایر پرسش‌ها بررسی شده و پرسش‌های نامناسب با پرسش‌های جدید جایگزین می‌شود.

مجموعه جدید پرسش‌ها در آزمون بعدی اجرا شده و طبیعتاً دارای اشکالات کمتری خواهد بود.

پس از چند بار اجرا و اصلاح در صورت نیاز، به مجموعه پرسشی دست می‌یازیم که دارای اشکالات حداقلی بوده و می‌توان آن را یک مجموعه پرسشی استاندارد نامید.

آزمون‌های اجراشده در سطح بین‌المللی نظیر آزمون TOFEL طی سالیان متوالی استاندارد شده و نمی‌توان به آسانی اشکالاتی آموزشی در آن مشاهده کرد.

تذکر ۱: در طراحی پرسش‌های چندگزینه‌ای از طرح پرسش‌های سؤالی منفی باید جداً احتراز گردد. پرسش‌های منفی به پرسش‌هایی اطلاق می‌شود که دانش‌آموز به‌جای آنکه می‌بایست به‌دنبال گزینه درست بوده باشد، باید گزینه‌ای را که نادرست است انتخاب کند. از آنجا که ذهن داوطلب همواره به‌دنبال گزینه‌ای درست است و در اکثر تست‌های قبل از چنین تست‌هایی نیز انتخاب گزینه درست مورد نظر است به‌لحاظ روان‌سنجی پرسش‌های چندگزینه‌ای چنین پرسش‌هایی اشکال فنی داشته و می‌باید از طرح آن خودداری گردد.

۵-۸-۳ نمونه‌هایی از پرسش‌های سؤالی- منفی

۱- فرض کنیم سری $\sum_{N=0}^{\infty}\frac{2^n}{x^{n+2}}$ همگرا باشد. x برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۴ د) ۳

۲- کدام گزینه در مورد تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x^2-|x|}{x^4+|x|}$ درست نیست؟

الف) در صفر حد راست دارد.
ب) در صفر حد چپ دارد.
ج) در صفر حد دارد.
د) در صفر پیوسته است.

تذکر ۲: به این پرسش‌ها توجه کنید:

۱- به‌ازای مقداری از a عرض نقطه عطف منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + ax$ برابر ۴ است. مقدار a برابر کدام است؟

۲- هرگاه $f(x) = x^2 - 2$، $f(f(f(2\cos x)))$ برابر کدام است؟

الف) $2\sin^8 x$ ب) $2\cos^8 x$

ج) $2\sin 8x$ د) هیچکدام

اینگونه پرسش‌ها که یکی از گزینه‌های آنها واژه «هیچکدام» می‌باشد، پرسش‌های استاندارد و معتبری محسوب نمی‌شوند.

چرا؟ به‌دلیل آنکه در گزینه‌ها تعادل ظاهری رعایت نمی‌گردد، دانش‌آموز ممکن است به‌دلیل ناهمخوانی واژه هیچکدام با دیگر گزینه‌ها به سراغ آن رفته و به‌صورتی تصادفی آن‌را برگزیند. به زبانی دیگر، اینگونه پرسش‌ها به‌لحاظ روان‌سنجی مشکل داشته و باید از طرح گزینه‌هایی که متضمن واژه «هیچکدام» است اکیداً خودداری گردد.

۵-۹ پرسش‌های تکمیلی و مختلط

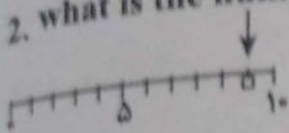
در برخی آزمون‌های معتبر از پرسش‌های تکمیلی نیز استفاده می‌شود، در اینگونه پرسش‌ها از داوطلب خواسته می‌شود که جای خالی مشخصی را تکمیل کند به‌نحوی که عبارت ریاضی حاصله عبارتی درست بوده باشد یا آنکه در دنبال‌های از داده‌ها، دو یا چند جمله اضافه و تکمیل نماید.

برای نمونه به پرسش‌های زیر توجه کنید. این پرسش‌ها را از یک آزمون سنجش معلومات کسبی ریاضی در مقطع اول تحصیلی (۶ ساله اول) برگزیده‌ایم. پرسش‌های این آزمون در شش سطح متوالی طبقه‌بندی شده تا کار بررسی و تحلیل نهایی بهتر میسر گردد. این آزمون هم‌زمان در چندین کشور من‌جمله انگلستان، ترکیه، سنگاپور، هندوستان و آلمان اجرا شده است. در اینجا برخی از پرسش‌های آن‌را **عیناً و به زبان اصلی به‌عنوان نمونه ارائه می‌کنیم تا دانشجویان به ماهیت و طراحی آزمون‌های جامع بین‌المللی آشنایی بیشتری داشته باشند.**

Test 5

1. complete the picture so that it has 7 dots.

2. what is the number shown?



3. fill in the missing numbers.

(a) ۲+۳=□

(b) ۴−۱=□

(c) ۳+۴=□

(d) ۴+□=۹

(e) ۸−□=۳

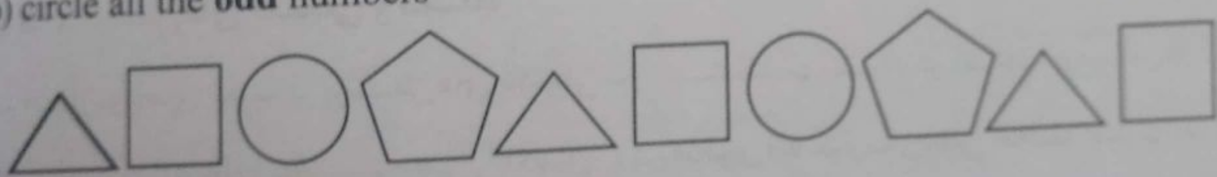
(f) □+۷=۷

4. (a) write these numbers in order of increasing size.

۱۲ ۷ ۱۵ ۴ ۱ ۱۰ ۱۸

(b) circle all the **odd** numbers

5.

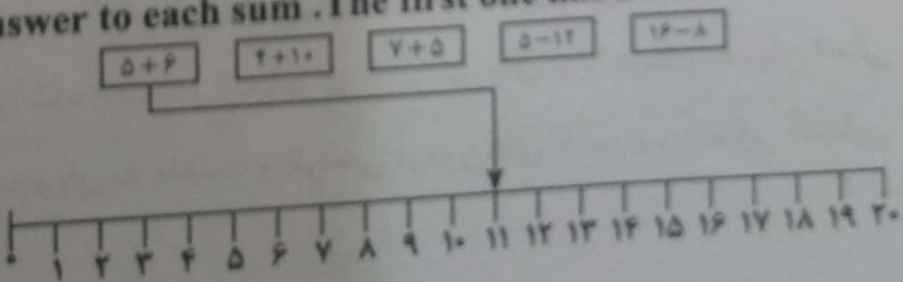


(a) write the letter A on the third shape from the left

(b) write the letter B on the fourth shape from the right.

(c) write the letter T on any triangle.

6 .show with an arrow the answer to each sum .The first one has been done.



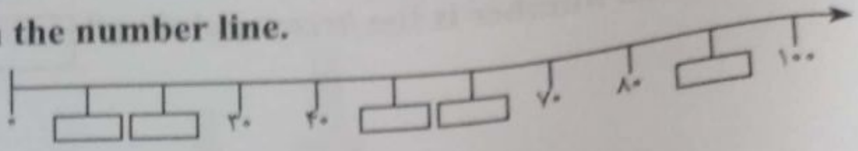
7 .what is the next number?

(a) ۳,۶,۹,۱۲,□

(b) ۲۰,۱۸,۱۶,۱۴,□

(c) ۲,۶,۱۰ ,۱۴,□

8. Fill in the missing numbers on the number line.



9. Fill in the missing numbers.

(a) ۲۷+۱۲=□ (b) ۳۵−۳=□

(c) ۱۵+۱۷=□ (d) ۴۶−۱۸=□

(e) ۷۳+□=۹۹ (f) ۴۳−□=۲۷

10. Fill in the missing numbers.

(a) ۸×۲=□ (b) ۱۴÷۲=□ (c) ۱۵÷□=۳ (d) ۶×□=۱۸

11. Fill in the missing numbers.

(a) ۳۱,۳۷,۴۳,□,□ (b) □,۱۲,۱۹,۲۶,□

(c) ۳,۹,۲۷,□

12. Mary buys two sweets costing 20 p and 23 p. □

What is her change from 50 p?

13. colour the weights which together make exactly 17 kg.

14. Tickets coast L4 each. How many can be bought for L15?

15. 20 cards are shared out equally among 5 children. How many cards does each child have?

16. Colour in a quarter of total number of circles.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

17 .Peter thinks of a number .He multiplies it by ,3 take away 2 and gets .25 What was his number ? □

18.A woman has L 100. She earns L 50 more and spends L 70. How much does she have now? □

31. I think of a number. I double it and take away 17. The answer is 45. What was the number? ☐

32. Write the following numbers in digits: ☐

(a) four thousand and sixty three

(b) three thousand, two hundred and four.

33. Using the digits 2 , 3 , 8 and 9 once and only once, write down the smallest number that you can make. ☐

34. What is:

(a) $\frac{۱}{۱۰}$ of ۵۰ g ☐

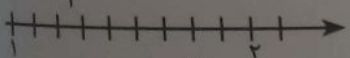
(b) $\frac{۱}{۳}$ of ۱۲ years? ☐

35. The temperature change from $-۴°C$ to ۷C. ☐

What is the increase in temperature?

36. On the number line below, show the number:

(a) $۱\frac{۱}{۲}$ (b) ۱/۷

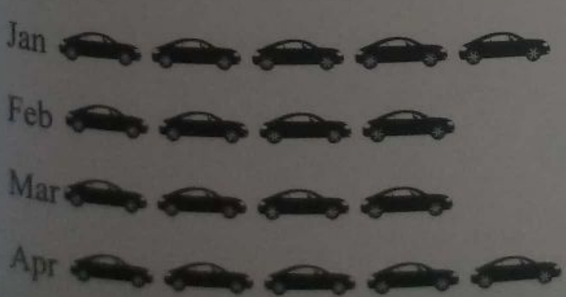


37 .What is $\frac{۳}{۱۰}$ as a decimal? ☐

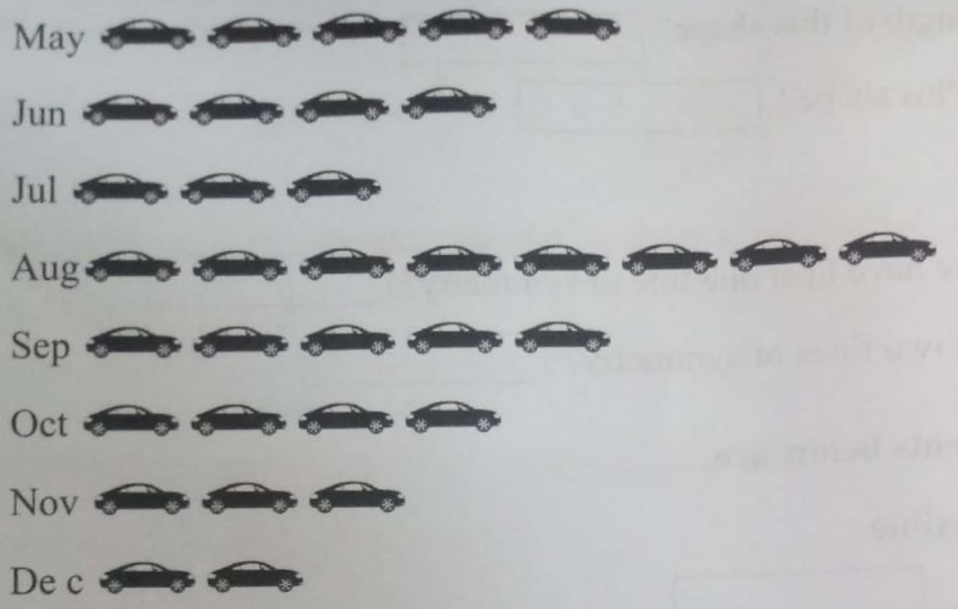
38. What is ۰/۶ as a fraction? ☐

39. What is $\frac{۳}{۵}$ of ۱۰۰ m? ☐

40. Monthly car sales in 1990 are shown below. Each car represents ۵۰۰۰۰ cars.



فصل پنجم



(a) How many cars were sold in February?

(b) In what month were car sales lowest?

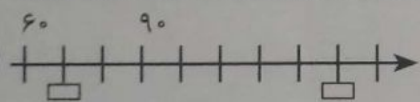
(c) How many cars were sold in that month?

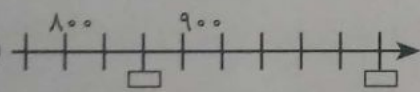
41. square, cybe, sphere, Triangle, Cylinder, Rectangle which of these shapes a

(a) 2- dimensional..

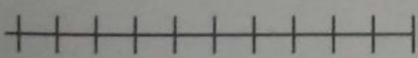
(b) 3- dimensional..

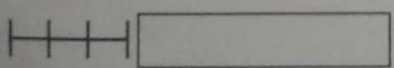
42. Fill in the correct numbers in each box.

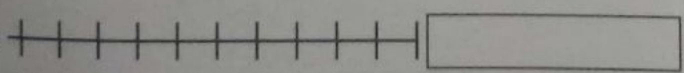
(a) 

(b) 

43. The line below is 1 unit long.

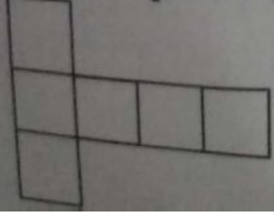


(a) 

(b) 

فصل پنجم

44. Six squares (each of side 1 cm) are hoined together as shown below.



(a) What is the perimeter length of this shape?

(b) What is the total area of this shape?

45. MATHS

(a) Which of the letters above have hust one line of symmetry?

(b) Which of the letters have two lines of symmetry?

46. say whether the statements below are

Certain , possible, or impossible

(a) It will be sunny tomorrow.

(b) Next year is 1999.

(c) You will be king next week.

(d) England will win the next World Cup in the year 2002.

47. A football team scored the following number of goals in 10 matches

۳,۰,۲,۲,۴,۲,۵,۱,۰,۱

What is the mean number of goals scored per much?

48. Pencils cost 15 p each.

How many can be bought for L 2?

How much change will there be?

49. 6 tickets cost L ۲/۱۰ what is the cost of 13 tickets?

50. Estimate the value of $\frac{۳۶۷ \times ۲۷}{۳۳}$

51.

(a) ۴۰×۵۰ =

(b) ۳۰×۶۵۰ =

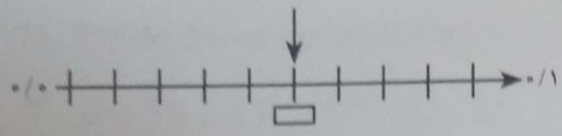
(c) ۱۲۰۰÷۱۰ =

(d) ۲۴۰۰÷۸۰ =

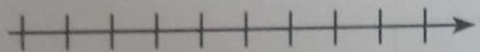
52. Complete these equations.

(a) $\frac{۴}{۵} + \square = ۱$ (b) $۱ - \square = \frac{۴}{۷}$ (c) $\square + \frac{۳}{۸} = ۲$

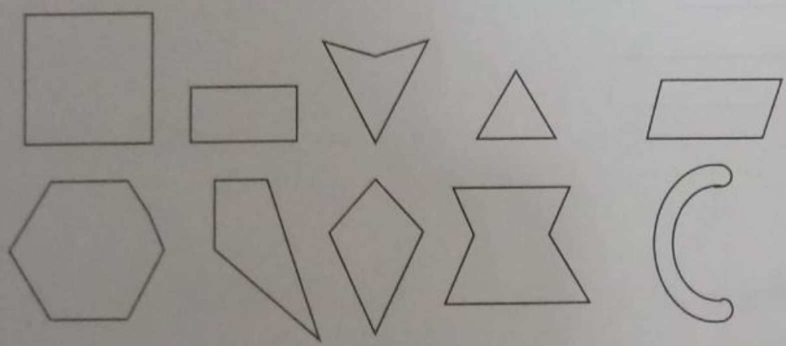
53. (a) What is the number shown on the number line?



(b) Show the position of ۲/۱۳ on the number line.



54. Write the letter of each shape beside the words which describe it. Shapes can be listed more



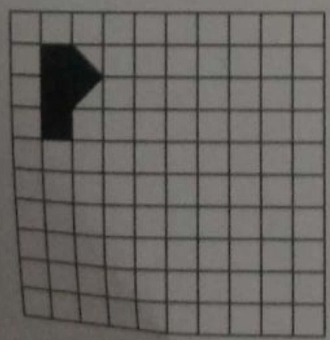
(a) Exactly one line of symmetry……………..

(b) More than two lines of symmetry………..

(c) Exactly one pair of parallel sides…………

(d) Exactly two pairs of parallel sides………..

55. Enlarge this shape by a factor of 3.



56 .Rotate this shape by 2 right angles (۱۸۰°) about the point O.

57 .A train leaves a station at ۰۹/۲۸ and take ۴۵ minutes to reach the next station. At what time does it arrive at next station?

58. what is 10% of 300 m?

59. what is 25% of 60 kg?

60. Express 20% as a fraction.

61. $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=$

62. $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=$

63. ۷۰×۰/۳ =

64. $\frac{۳}{۵}$ of a length is 30m. what is the length?

65. Taking 8 km as 5 miles, estimate the distance of a 5000 meter race in miles.

66. ۸۱۰÷۰/۹

67. An unbiased dice is thrown. What is the probability of

(a) throwing a six

(b) throwing a number greater than 3?

68. The probability of it raining tomorrow is $\frac{۱}{۴}$.

Scanned by CamScanner

What is the probability of it not raining tomorrow? ☐

69. Solve for x, $x+۲=۶$

70. Slove for x, $۳x-۴=۱۱$

71. Write down the next two terms of this sequence?

۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ۲۶, ☐, ☐

72. One cake costs 20p. write down a formula for the cost of n cakes. ☐

تمرین

۱-

الف) پرسش‌های صفحات ۱۵۷-۱۴۹ را به فارسی روان ترجمه کنید.

ب) ۲۰ پرسش تکمیلی و مختلط مشابه پرسش‌های صفحات مذکور در سطح شش ساله اول ابتدایی مدارس ایران را طراحی کنید.

ج) آیا به‌نظر شما در طراحی آزمون‌ها در سطح دبیرستان می‌توان از پرسش‌های تکمیلی بهره جست؟ نظر خود را با مدرس درس مطرح کرده و از آن دفاع کنید.

۲- وسایل و ابزارهای ارزیابی و ارزشیابی که قابل استفاده هستند، مشخص کنید.

دسته (الف) ابزارهایی که به‌منظور ارزشیابی قابل استفاده هستند.

دسته (ب) ابزارهایی که به‌منظور ارزیابی قابل استفاده هستند.

۳- پرسش‌های زیر را که در باب درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مطرح شده‌اند به دقت مطالعه کنید. سپس ضمن تحلیل تست‌ها حوزه‌های دانشی، مهارتی و بینشی آنها را معین کنید.

فصل پنجم

۱- اگر نامساوی‌های $|x-۱|<۰/۱$ و $A<۲x-۳<B$ معادل باشند، $A+B$ کدام است؟

الف) ۱/۲ ب) ۲- ج) ۱/۱- د) ۱-

۲- معادله $۲|x-۱|-|x|=۳$ چند جواب دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) صفر د) ۳

۳- فرض کنید $a < x < b$ و $\left|\frac{a-x}{b-a}\right| = \lambda$ در این‌صورت $\lambda b + (۱-\lambda)a$ برابر کدام است؟

الف) a ب) b ج) $a+x$ د) x

۴- مجموع ریشه‌های معادله $۸^{x^۲+۱} = ۲^{۵x+۱}$ چقدر است؟

الف) ۲ ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) صفر د) $\frac{۱}{۳}$

۵- جملات دنباله $\left\{\frac{۲n^۲-۳۲}{۲n^۲-۴}\right\}$ برای مقادیر $n > ۱$ در کدام همسایگی قرار می‌گیرند؟

الف) $(۱/۹۹ , ۲/۰۱)$ ب) $(۱/۹۹۵, ۲/۰۰۵)$

ج) $(۲ , ۲/۰۱)$ د) $(۲ , ۲/۰۰۵)$

۶- حد مجموع $\cdots - \frac{۲}{(\sqrt{۶}-۱)^۲} + \frac{۲}{\sqrt{۶}-۱} - ۲$ وقتی تعداد جمله‌های آن بی‌شمار شود کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) $۴+\sqrt{۶}$ ب) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}-۲$ ج) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}+۲$ د) $۲-\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۷- دنباله $\left\{\frac{Ln(n^۵)}{n}\right\}$ به کدام عدد همگراست؟

الف) صفر ب) ۱ ج) e د) واگراست

۸- حد دنباله $\left\{[۱+\frac{۲}{۲n+۱}]^n\right\}$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۱

۹- اگر دنباله $\left\{\dfrac{n+b}{n+1}\right\}$ صعودی باشد، b کدام است؟

الف) $b=1$　　ب) $b>1$　　ج) $b<1$　　د) امکان ندارد

۱۰- سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{x^{n+2}}$ همگراست، x کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

الف) ۲　　ب) ۵　　ج) ۴　　د) ۳

۱۱- به‌ازای چه مقدار a سری $\sum\left(1-\dfrac{a^{n+1}}{n+2}\right)$ همگراست؟

الف) ۱　　ب) ۱−　　ج) ۰　　د) هیچکدام

۱۲- s_n مجموع جزئی سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ کدام است؟

الف) $\log n$　　ب) $\log(n+1)$

ج) $\log(n+1)-1$　　د) $\log n-1$

۱۳- حاصل سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4^n}+\dfrac{1}{4^n}\right)$ کدام است؟

الف) همگرا به ۱　　ب) همگرا به $\dfrac{1}{3}$　　ج) واگرا　　د) همگرا به ۲

۱۴- در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-1}{2x-1} & x>1\\ 5x-2 & x\le 1\end{cases}$ اگر $0<|x-1|<\delta$ آنگاه فاصله $f(x)$ از عدد ۳ کمتر از ۰/۰۱ باشد، بزرگترین مقدار δ کدام است؟

الف) ۰/۰۱　　ب) ۰/۰۰۲　　ج) ۰/۰۰۳　　ج) ۰/۰۰۵

۱۵- حد عبارت $\sin\dfrac{x^2}{6}\sin\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{x}{2}\,x^{-4}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟

الف) $\dfrac{1}{9}$　　ب) $\dfrac{1}{18}$　　ج) $\dfrac{1}{36}$　　د) ∞

Scanned by CamScanner

۱۶- اگر تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲f(x)+۱}=۵$ آنگاه $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)$ کدام است؟

الف) -۳ ب) -۲ ج) ۲ د) ۳

۱۷- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{|x|-[x]}{۲|x|-[x]}$ کدام است؟

الف) -۱ ب) $-\frac{۱}{۲}$ ج) $+\frac{۱}{۲}$ د) ۱

۱۸- $\lim\frac{x-۱+\sqrt{۱-x}}{۱-x}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) $-\infty$ د) $+\infty$

۱۹- $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^۲+۱}-\sqrt{x^۲-۱})$ کدام است؟

الف) $-\infty$ ب) ۰ ج) ۱ د) ∞

۲۰- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(x+۳)[x] & x<۳\\ ax+۳ & x\geq ۳\end{cases}$ در نقطه به طول ۳ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۵ د) ۶

۲۱- تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲-|x|}{x^۲+|x|}$ در نقطه $x=۰$ چگونه است؟

الف) پیوسته است ب) فقط حد دارد

ج) فقط حد راست دارد د) فقط حد چپ دارد

فصل پنجم

۲۲- فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-۱}$، در این‌صورت تابع $f(\tan x)$ در کدام فاصله پیوسته است؟

الف) $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ ب) $[۰,\frac{\pi}{۴}]$ ج) $[\frac{\pi}{۴},\pi]$ د) $[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}]$

۲۳- عرض نقطه تلاقی خط مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x-۲}$ با محور y ها کدام است؟

الف) -۲ ب) -۱ ج) ۱ د) ۲

۲۴- نقطه تلاقی مجانب‌های افقی و قائم نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۲x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{۲x}+۳}$ کدام است؟

الف) $(-۱,۱)$ ب) $(-۱,۲)$ ج) $(۳,۱)$ د) $(۳,۲)$

۲۵- تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}+\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۴}}$ چند خط مجانب دارد؟

الف) یک افقی و یک مایل ب) دو قائم

ج) سه قائم و یک افقی د) یک افقی و یک مایل

۲۶- مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-۱)^۲(x+۱)^۳}{(x^۲+x+۱)^۲}$ در نقطه $x=۱$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۹}$ ب) ۰ ج) $\frac{۸}{۹}$ د) -۱

۲۷- $f(x)=\frac{e^{۲x}+e^x+۱}{e^x+۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{e^x+۱}$ آنگاه $f'(x)-g'(x)$ کدام است؟

الف) e^x ب) $e^{۲x}$ ج) e^{-x} د) $\frac{۱}{e^x+۱}$

۲۸- $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+۵ & x\geq ۱ \\ ۱۱ & x<۱ \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر است، $a-b$ کدام است؟

الف) ۱۸ ب) -۱۸ ج) ۱۲ د) -۱۲

۲۹- ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y^۲+x^۲+۲x-۴y=۸$ در نقطه $x=۱$ در ربع اول کدام است؟

الف) $-\frac{۵}{۱۳}$ ب) $-\frac{۲}{۳}$ ج) $-\frac{۱۳}{۵}$ د) $\frac{۳}{۲}$

۳۰- منحنی‌های به معادلات $y = x - \sqrt{x+3}$ و $y = \frac{ax+b}{x+1}$ در نقطه به طول ۱ بر هم مماس‌اند. a کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) ۱ ج) $\frac{3}{2}$ د) ۲

۵-۱۰ رابطه ارزشیابی با استانداردهای آموزشی

فقط یک دلیل وجود دارد که توجیه می‌نماید که چرا معلمین، دبیران و دستگاه آموزشی با صرف دقت بسیار درگیر کار ارزشیابی می‌شود و آن اینکه ارزشیابی یادگیری را توسعه می‌دهد. این یک دلیل جدا از سایر دلایل قانونی و آیین‌نامه‌ای است که بر ارزشیابی‌ها حاکم است.

آیا «توسعه و بهبود یادگیری» همان «ارتقاء استانداردها» است؟ این یک پرسش مشکلی است، زیرا بستگی به معنا و مفهومی دارد که از این واژه انتظار داریم. معهذا به‌منظور احتراز از تطویل کلام، ما عملاً این دو مفهوم را یکسان تلقی می‌کنیم. اکنون این پرسش مطرح می‌شود که چگونه ارزشیابی باعث ارتقاء استانداردها و پیشرفت یادگیری می‌گردد؟ نظرات مختلفی در این رابطه وجود دارد.

ما همگی از تجربیاتمان می‌دانیم که ارزشیابی آموزشی ممکن است همزمان به بیش از یک مقصود به‌کار آید. همه مقاصد ارزشیابی نهایتاً در ارتباط با ارتقاء استانداردهای آموزشی هستند، لکن هدف‌های ارزشیابی از این منظر که چگونه به این ارتقا کمک می‌کند به‌طرز چشمگیری مغایر هم هستند. این وضعیت وقتی مشکل‌ساز می‌شود که در یک سیستم ارزشیابی گردایه‌ای از مفروضات هدف‌گونه به قیمت نادیده انگاشتن سایر هدف‌ها ارائه می‌گردد، در نتیجه سیستم ارزشیابی ممکن است نامتعادل شده که به‌نوبه خود این پدیده باعث بی‌نظمی در یادگیری گردد.

برای نمونه، جدول زیر نمایانگر وجوه دو نوع متفاوت ارزشیابی است، وجوهی که به دو دیدگاه کاملاً متفاوت و متقابل برمی‌گردد که چگونه ارزشیابی‌ها منجر به ارتقاء استانداردها هستند.

ارزشیابی‌های محوری و ارزشیابی‌های غیرمحوری

ارزشیابی‌های محوری	ارزشیابی‌های غیرمحوری
• نتیجه یا نمره بسیار مهم می‌باشد، زیرا بر اساس آن مسیر تربیتی فرد را می‌توان تصمیم‌سازی کرد. • نتیجه همچنین از این منظر بسیار مهم است که در نتیجه کلی ارزشیابی مدرسه سهیم می‌باشد؟ جایگاه مدرسه در مقایسه با سایر مدارس • نتیجه ارزش عمومیت دارد. فضیلت مهمی بدان الصاق شده است.	• نتیجه یا نمره، به‌خودی خود اثر کمی بر گروه‌بندی‌های محصلین و فرصت‌های شغلی دارد. • نتیجه گویای همه حقایق تربیتی نمی‌باشد، زیرا بیانگر این نیست که چگونه حاصل شده است. • نتایج به‌دست‌آمده از ارزشیابی محصلین به‌صورت فردی محتاج تجزیه و تحلیل می‌باشد. • نتیجه و تحلیل آن امری خصوصی است که بین معلم و محصلین باقی می‌ماند.

ملاحظه می‌کنیم در ارزشیابی محوری، نگرش بر این است که همه امتیازهای آن، اعتباری و رفتار عمومی فرد وابسته به آن است، در حالی‌که اعتبار و اهمیت ارزشیابی در دیدگاهی که معتقد به غیرمحوری بودن آن است بسیار کمتر بوده و نهایتاً جنبه خصوصی داشته و فاقد اعتبار اجتماعی و عمومی است.

در رابطه با مقوله ارتقاء استانداردها، ایده‌ای که متضمن ارزشیابی محوری است بر این باور است که رقابت در کسب نمرات و نتایج ارزشیابی، انگیزه‌بخش ارتقا و افزایش کارآیی‌ها است. در حالی‌که در ارزشیابی غیرمحوری این باور وجود دارد که استفاده از کنش‌های خلاقانه است که در رابطه با اطلاعات و شواهد کاری بچه‌ها به‌دست می‌آید و این به‌نوبه خود پشتیبان یادگیری آتی فرد بوده و کارایی او را ارتقا می‌دهد.

۵-۱۱ ارزشیابی رسمی و ارزشیابی جامع[1]

تنشی که به‌طور خلاصه در بخش پیشین در مورد استانداردها بیان گردید در واقع بین دو نوع ارزشیابی است که یکی ارزشیابی رسمی و دیگری ارزشیابی جامع نامیده می‌شوند.

قبلاً گفته شد که ارزشیابی رسمی توسط مدارس، یا مناطق آموزشی طراحی و اجرا می‌گردد. در ارزشیابی رسمی، مواد درسی به‌صورت مشخص و منفک از هم مورد آزمون قرار می‌گیرند. فی‌المثل می‌توان از آزمون‌های دروس حسابان، هندسه، جبر و احتمال و نظایر اینها نام برد که در آزمون‌های پایان سال تحصیلی توسط مدارس اجرا می‌گردد. لکن در ارزشیابی جامع مجموعه‌ای از دروس تحت یک آزمون مورد ارزشیابی قرار می‌گیرند. در واقع ارزشیابی جامع تلفیقی از دروس مختلف و برای یک مقطع تحصیلی مانند دوره اول دبیرستان و یا دوره دوم دبیرستانی انجام شده و نهادهای برگزارکننده آن مؤسسات و سازمان‌های بیرون مدرسه هستند. تمایزهای مشروح در جداول فوق به نوع قابل انطباق با ارزشیابی‌های جامع و ارزشیابی‌های رسمی می‌باشد.

1. Formal evalution & summative evalution

این تمایزها به هسته مرکزی چیزی اشاره دارد که ما از آن به‌عنوان مقاصد اصلی ارزشیابی در سیستم آموزشی یاد می‌کنیم. ممکن است به این دو نوع ارزشیابی به مثابه قطب‌های متقابل یک خط راست نگاه کنیم. بدین طریق می‌توانیم چنین اظهار کنیم که ارزشیابی رسمی اساساً به‌منظور نیازهای معلمین در رابطه با یاری دادن به فردفرد بچه‌ها طراحی می‌گردد و لذا با مقاصد حرف‌های یکی انگاشته می‌شود. اما ارزشیابی جامع را می‌توان در رابطه نزدیکتری با مقاصد بوروکراتیک (اداری) دانست که در خدمت سیستم کلان آموزشی و مدیریت آن حتی سیاستمداران می‌باشد.

هر دو مقصود این ارزشیابی‌ها مهم هستند و در واقع سیستم ارزشیابی در خدمت هر دوی اینهاست. تلاش سیستم‌های ارزشیابی مدرن در این است که این دو نوع ارزشیابی را به هم مرتبط سازد. این ارتباط از طریق ترکیبی از عناصر ارزشیابی استانداردشده‌ای که از بیرون مدرسه نشأت می‌گیرد و ارزشیابی معلمین که در درون مدرسه انجام می‌گیرد به‌وجود می‌آید. از این جهت باید گفت که چنین ترکیبی به‌نوبه خود ارزشیابی تحصیلی ملی را چنان جلوه می‌دهد که اجرای آن بسیار مشکل می‌نماید.

برای نمونه ارزشیابی‌های سال پایان متوسطه (پیش‌دانشگاهی) و همچنین ارزشیابی و سنجش تحصیلی داوطلبان کنکور سراسری که توسط سازمان سنجش و آموزش کشور اجرا می‌شود نیز از نوع ارزشیابی جامع می‌باشد. در حالی‌که ارزشیابی‌های مدرسه‌ای و ارزشیابی پایان سال تحصیلی که مدارس مجری آنند از نوع ارزشیابی رسمی می‌باشد.

رسمی در طول یک دوره	جامع پایان دوره
• نیازهای یادگیری بچه‌ها مراقبت گردد. • پیشرفت بچه‌ها را در یادگیری توصیه می‌کنیم و پیشرفت آتی آنها را تشخیص دهیم. • می‌توانیم از گستره‌ای از ارزیابی‌ها و ارزشیابی‌های رسمی و غیررسمی بهره گیریم. • ابزارهای ارزشیابی متنوع و مشتمل بر پرسش‌های تشریحی نیز می‌باشد.	• هدف‌های کسبی یاد گرفته‌شده را سنجش کرده و گزارش می‌کنیم. • برای آنکه قادر باشیم مقایسه را بین بچه‌ها، گروه‌هایی از بچه‌ها و مدارس انجام دهیم. • در اجرای این ارزشیابی تأکید بر روش‌های رسمی است که کارا و قابل اعتمادند. • ابزار ارزشیابی عمدتاً شامل پرسش‌های چندگزینه‌ای است.

۵-۱۲ پروژه، ویژگی‌های ارزشیابی‌های جامع و رسمی

فهرست زیر را در خصوص مقاصد ارزشیابی بررسی کرده و سپس به سؤالی که بعداً می‌آید پاسخ دهید.

- الف) برای تحریک بچه‌ها و تقویت انگیزه آنان در یادگیری
- ب) برای تحریک و افزایش انگیزه معلمین و دبیران
- ج) برای سنجش و یا کنترل «استاندارد»
- د) برای مقایسه هدف‌های کسب‌شده با اهداف آموزشی
- ه) برای به‌دست آوردن نظم امتیازی بچه‌ها
- و) برای تشخیص نیازهای یادگیری بچه‌ها و مشکلات آموزشی
- ز) برای یافتن اینکه بچه‌ها چه می‌دانند، می‌فهمند و چه می‌توانند و تهیه گزارش آن
- ح) برای حصول داده‌هایی کمی که بر اساس آن بتوان مدارس را مقایسه کرد.
- ط) برای انتخاب دانشجویان و دانش‌آموزان
- ی) برای پشتیبانی بچه‌ها در یادگیری

پرسش ۱: هر یک از موارد فوق را به یکی از دو ارزشیابی رسمی و جامع نسبت دهید. این تقسیم‌بندی لزوماً شفاف نخواهد بود و شما می‌توانید برخی از این هدف‌ها را به هر دو نوع ارزشیابی متعلق سازید.

برخی متخصصین آموزش ریاضی به‌طور خاص و آموزش به‌طور عام چهار ویژگی برای ارزشیابی‌ها نام می‌برند. معمولاً از این ویژگی‌ها به‌عنوان محک‌های ارزشیابی یاد می‌شود.

۵-۱۳ محک‌های ارزشیابی

یک ارزشیابی باید:

- رسمی باشد- پشتیبان یادگیری باشد تا بتوان مراحل بعدی یادگیری را بر اساس آن طراحی کرد.
- تشخیص‌دهنده باشد- مشکلات یادگیری بچه‌ها را آشکار و مشخص سازد.
- جامع باشد- به‌گونه‌ای منظم و سیستماتیک به ثبت مهارت‌های کسب‌شده بچه‌ها بپردازد. توصیه می‌شود که در سنین ۷، ۱۱، ۱۴ و ۱۶ چنین ارزشیابی‌هایی انجام گیرد.
- ارزش‌پذیر باشد- نمرات ارزشیابی حاصله قابل استفاده جهت ارزیابی مدرسه و سازمان محلی مدارس به‌لحاظ توان اجرایی آنان بوده و همچنین قابل انتشار باشد.

۵-۱۴ نظام ارزشیابی تحصیلی ملی

در بیشتر کشورها که دارای برنامه تحصیلی ملی (National curriculum) هستند، یک نظام ارزشیابی تحصیلی متمرکز را نیز در درون برنامه تحصیلی لحاظ می‌کنند. کشورهایی که فاقد برنامه تحصیلی ملی هستند، هر منطقه آموزشی مسئولیت ارزشیابی تحصیلی آن منطقه را به‌عهده دارد. در برنامه تحصیلی ملی انواع ارزشیابی‌های زیر پیش‌بینی شده است؛ این ارزشیابی‌ها در مقاطع تحصیلی مشخص اجرا می‌گردد.

ارزشیابی معلمین و دبیران: ارزشیابی مستمر و گسترده از هر دانش‌آموز توسط دبیران طراحی و اجرا می‌گردد. در این ارزشیابی‌ها از تنوعی از روش‌های ارزیابی و ارزشیابی‌های غیررسمی و رسمی استفاده می‌گردد. برای مثال از مکالمات شفاهی با دانش‌آموزان و آزمون‌های کوتاه‌مدت نیز استفاده می‌شود.

امور ارزشیابی استاندارد: در این ارزشیابی‌ها تنوعی از آزمون‌های تولیدشده متمرکز، به‌منظور تعیین سطح کسب مهارت‌ها، دانش‌ها و بینش‌ها استفاده می‌گردد. اینگونه ارزشیابی‌ها می‌بایست توسط دبیران اجرا شود، لکن چگونگی اجرای آن توسط یک سازمان و یا یک نهاد دولتی آموزش داده می‌شود.

مدسازی (Moderation): مدسازی به فرایندی اطلاق می‌شود، که طی آن نتایج حاصله از ارزشیابی دبیران با نتایج امور ارزشیابی استاندارد تلفیق می‌گردد. هدف کلیدی از این رویه همانا تولید استانداردهای ملی آموزش است. این فرآیندها متضمن پیچیدگی خاص خود می‌باشد، از آن جمله اینکه هدف‌های کسبی هر مقطع، قبل از هر چیز، می‌بایست به روشنی تبیین و مورد توافق همه کسانی که درگیر ارزشیابی‌ها و آموزش هستند قرار گیرد.

۵-۱۴-۱ اعتمادبخشی و اعتبار (Validity & Reliability)

همچنان‌که این پرسش که مقاصدمان از ارزشیابی‌ها چیست، منشأ تنش‌های قابل ملاحظه‌ای قرار می‌گیرد، اعتمادبخشی و اعتبار از ویژگی‌های ضروری هر ارزشیابی است که در دو انتهای مقابل یک مسیر واقع می‌شوند. به‌عبارت ساده‌تر، هرگاه بخواهیم که اعتبار یک ارزشیابی را حداکثر کنیم، غالباً این امر به قیمت کاهش اعتمادبخشی اتفاق می‌افتد و البته عکس این نظریه نیز صادق می‌باشد. این‌گونه تنش‌ها، البته با مهارت‌های شغلی که دبیران دارند و به‌واسطه قضاوت‌های حرفه‌ای که خواهند داشت می‌تواند حل و فصل گردد. چیزی که در این رابطه دبیران را راهنمایی می‌کند هدف اصلی از یک ارزشیابی است که به آن خود ارزشیابی اطلاق می‌گردد. به‌عبارت دیگر، اینکه ارزشیابی برای چیست؟

به‌طور خلاصه، همچنان‌که قبلاً نیز گفته شد، اعتبار و اعتمادبخشی دو ویژگی ارزشیابی هستند که در مقابل یکدیگر قرار دارند:

اعتبار ⟵ → اعتمادبخشی

اعتبار: از طریق مشاهدات غیررسمی، گفتگو با دانش‌آموزان و همکاران در خصوص کار کلاسی دانش‌آموزان حداکثر و بهینه می‌گردد و اینها اموری است که توسط معلمین و دبیران اجرا می‌گردد.

اعتمادبخشی: از طریق ارزشیابی رسمی و توسط آزمون‌های چندگزینه‌ای صورت می‌گیرد که به‌وسیله علامت‌خوان‌های نوری[1] تصحیح و انجام می‌گیرد و دبیران نقش کمتری در طراحی آن داشته و در تصحیح آن هیچ‌گونه نقشی نخواهند داشت.

در جدول زیر عناصر کلیدی استراتژی ارزشیابی ذکر شده‌اند.

مقصود ارزشیابی	ارزشیابی‌ها به قصد متنوعی از هدف‌ها مورد استفاده واقع می‌شوند. اینکه چگونه یک ارزشیابی را طراحی کنیم تابعی است از آنکه ارزشیابی چه هدفی داشته و برای چه مقصودی باید سامان داده شود.
اعتبار	رویکردی که برای ارزشیابی انتخاب می‌شود باید دارای اعتبار باشد. این بدان معنی است که باید این اعتماد و تضمین حاصل شود که ارزشیابی طراحی‌شده همان چیزی را ارزشیابی می‌کند که مورد نظرمان است. برای آنکه اعتبار یک ارزشیابی حداکثر و بهینه گردد می‌بایست شباهت تمامی با تجربیات و کارکرد دانش‌آموزان داشته باشد، شباهتی که هم در محتوا و هم در فرآیند و روش بوده باشد.
اعتمادبخشی	رویکردی که برای ارزشیابی انتخاب می‌کنیم باید دارای جنبه اعتمادبخشی باشد. این بدان معنی است که باید همه متغیرهای خارجی مؤثر در ارزشیابی به معنی حداقلی بهینه گردند به‌گونه‌ای که این تضمین حاصل شود که ارزشیابی‌هایمان در مدارس مختلف قابل مقایسه‌اند. آزمون‌های چندگزینه‌ای استاندارد چنان طراحی می‌شوند که همه عوامل متغیری را که اثر سوء بر ارزشیابی داشته کاهش داده، شرایط که ارزشیابی در آن انجام می‌شود یکسان‌سازی کرده، تعبیر و تفسیر نتایج را به‌کمک علامت‌خوان‌ها به‌طرزی عملی انجام می‌دهد.

اکنون به دو نکته در باب پرسش‌های کوتاه شفاهی و کار در منزل باز می‌گردیم.

۱. پرسش‌های کوتاه شفاهی (Quiz Oral):

در حین تدریس، به‌منظور فعال کردن دانش‌آموزان در فراگیری بهتر درس و تقویت تمرکز آنان، پرسش‌هایی کوتاه از کلاس می‌شود. برخی دانش‌آموزان پاسخ‌هایی ارائه می‌دهند. دانش‌آموزانی که بدون هیچ‌گونه عکس‌العمل کنشی نشان نمی‌دهند نیز شناخته می‌شوند. معلمین کارآزموده و شایسته از این شناخت جهت کمک به دانش‌آموزان و ارتقاء یادگیری آنان استفاده می‌کنند. دبیران مجرب حتی با نگاه به دانش‌آموزان، بازخورد تدریس خود را در آنان ارزیابی کرده و سعی می‌کنند، ضمن خواندن کلاس، توجه دانش‌آموزان را به درس نگهداری کنند.

۲. کار منزل (Homework):

در دبیرستان برخلاف دوره دبستانی به‌منظور تعمیق مطالب فراگرفته‌شده، تمرین‌ها و مسائلی برای کار بیشتر در خارج از مدرسه (یعنی در منزل) به دانش‌آموزان ارائه می‌گردد. با جمع‌آوری حل مسئله‌ها و تمرین‌ها در موعد و ساعت معین توسط دبیر درس، این تکالیف تصحیح شده و به‌همراه پاسخ کامل این‌گونه تمرین‌ها به بچه‌ها بازگردانده می‌شود.

متخصصین آموزش ریاضی بر این عقیده‌اند که در مقطع دبستانی نباید هیچ‌گونه تمرین و تکلیف نوشتاری سنگینی به دانش‌آموزان برای کار در منزل ارائه کرد. لکن می‌توان به آنان کارهای پروژه‌ای تعریف کرد. مثلاً از آنان خواست تا ضمن بازدید از یک کارخانه تسویه و بازیافت زباله، جریان امر را بعداً نوشته و به‌صورت گزارش به معلم خود ارائه دهد.

در دوره دبیرستان، علاوه‌بر تکالیف مسئله و تمرین منزل، می‌توان مسئله پروژه‌ای نیز برای آنان تعریف کرد. باید توجه داشت که:

مدرسه، با تعریف امروزی، منحصر به چهاردیواری معمول آن نمی‌باشد بلکه جامعه در کل به مثابه مدرسه و محل یادگیری دانش‌آموزان است. هر چه پیوند بین مدرسه رسمی، جامعه و خانواده معنی‌دارتر و سامان‌یافته‌تر باشد، امر تعلیم و تربیت دانش‌آموزان پایدارتر و لذت‌بخش‌تر خواهد بود.

مدرسه را نباید به هیچ‌وجه از جامعه جدا انگاشت، بچه‌ها در مدرسه تربیت می‌شوند تا در جامعه زندگی کنند، همچنان‌که ماهیان نوزاد برای یادگیری شنا به آب نیاز دارند، دانش‌آموزان برای زندگی در جامعه، به جامعه نیاز دارند، **آنها باید در حین زندگی در جامعه، زندگی کردن را بیاموزند.**

۵-۱۵ مسئله‌های پروژه‌ای

۱. یک بار دیگر به متن صفحات کتاب جدیدالتألیف صفحات ۱۰۱ تا ۱۱۴ (کتاب ریاضی ۲ نظری صفحات ۱۰۲ تا ۱۱۸) برمی‌گردیم. در این متن مبحث لگاریتم به روش فعال توصیف شده است؛ ضمن درس دانش‌آموزان درگیر فعالیت‌ها و اموری می‌شوند تا مفاهیم و تکنیک‌های لازم را در باب لگاریتم فراگیرند. این درس را بررسی جامع کرده و به نکات و پرسش‌های زیر توجه کنید:

الف) متن را به دقت مطالعه کنید و اهداف دانش، مهارتی و بینش آن‌را استخراج نمایید.

ب) متن را نقد و بررسی نمایید. در این رابطه باید ابتدا نکات مثبت آن و سپس (در صورت وجود) نکات منفی آن‌را توضیح داده و پیشنهاداتی برای توسعه و ارتقاء آن ارائه دهید.

ج) در پاراگراف توصیفی این درس گفته شده است که از تابع $y = b^x$ می‌توان به‌طور مثال تعداد سلول‌ها را پس از زمان x پیش‌بینی کرد. پایه b برای اینگونه مسائل در باب رشد و یا زوال چقدر باید باشد؟

د) واژه‌های کلیدی متن، تمرینات و حتی مبحث خواندنی آن‌را استخراج کرده و در باب آن تصور کنید که دانش‌آموزان در مواجه با آن با چه پرسش‌ها یا مشکلاتی ممکن است درگیر شوند. با دانشجویان دیگر در این مورد بحث کنید.

از نکات مثبت این درس، ارتباط آن با پدیده‌ای واقعی جهان فیزیکی، مانند زلزله و PH محیط اسیدی و قلیایی است (صفحات ۱۱۳ و ۱۱۴)

ه) در این درس گفته شده است که واحد طبیعی زاویه «رادیان» می‌باشد. چه توجیهی برای این نامگذاری دارید؟ اگر دانش‌آموزی از شما بپرسد که چرا مثلاً واحد طبیعی زاویه را «درجه» که $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است، اختیار نمی‌کنند چه خواهید گفت؟

۲. پرسش‌های زیر بخشی از مجموعه پرسش‌های درس مبانی ریاضیات است که در دانشگاه پیام نور اجرا شده است.

اولاً: به این پرسش‌ها تعدادی دیگر اضافه کنید به نحوی که مجموعه پرسش‌های تکمیل‌شده کل درس مبانی ریاضیات را به‌لحاظ بودجه‌بندی موضوعی پوشش دهد.

ثانیاً: آیا فکر می‌کنید که برای سنجش پیشرفت دانشجویان در درس مبانی ریاضیات می‌تواند صرفاً به آزمون چندگزینه‌ای اکتفا کرد؟ دلایل خود را در صورت مثبت بودن با مدرس خود مطرح کنید.

در صورتی‌که پاسخ شما منفی است، آیا با طرح پرسش‌هایی تشریحی می‌توان یک آزمون جامع‌تر، که همه اهداف آموزشی درس را پوشش دهد، طراحی کرد؟ نسبت به مجموعه کامل‌شده پرسش‌های چند گزینه حاصله، ۴ یا ۵ پرسش تشریحی طراحی کنید که یک آزمون جامع و معتبر تشکیل دهند.

پرسش‌های درس مبانی ریاضیات

دور هر گزینه را که فکر می‌کنید بیشتر درست است با ○ مشخص کنید.

۱- عبارت «برای هر x , $x^2 \le x$» چه نامیده می‌شود؟

الف) گزاره‌نما ب) گزاره ج) اسم‌نما د) اسم خاص

۲- نقیض عبارت $\forall x \forall y \exists z (z = x + y)$ کدام است؟

الف) $\exists x \forall y \exists z (z \ne x + y)$ ب) $\exists x \exists y \exists z (z \ne x + y)$

ج) $\exists x \forall y \forall z (z \ne x + y)$ د) $\exists x \exists y \forall z (z \ne x + y)$

۳- نقیض گزاره $P \Rightarrow (q \wedge r)$ کدام است؟

الف) $P \wedge q \wedge (\sim r)$ ب) $\sim P \Rightarrow (q \vee r)$

ج) $P \vee (\sim q \vee \sim r)$ د) $P \wedge (\sim q \vee \sim r)$

۴- یک «رابطه هم‌ارزی» چگونه رابطه‌ایست؟

الف) منعکس و متعدی باشد. ب) متعدی و نامتقارن باشد.

ج) منعکس، متقارن و متعدی باشد. د) تابع اصل سه‌گانگی باشد.

۵- رابطه $\subseteq$ (شمول) در مجموعه مجموعه‌ها چگونه رابطه‌ای است؟

الف) هم‌ارزی است ب) متقارن است ج) ترتیب جزئی است د) ترتیب تمام

۶- فرض M یک مجموعه و $(M, \subseteq)$ مجموعه M با رابطه $\subseteq$ باشد. عنصر انتهای این مجموعه کدام است؟

الف) $\varnothing$ ب) M' ج) M د) هیچکدام

۷- فرض کنیم عمل Δ در مجموعه M چنین تعریف شده باشد:

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B$$

هرگاه $A^2 = A \Delta A$ تعریف شود و $C \in M$، آنگاه C^2 کدام است؟

الف) M ب) φ ج) C د) C'

۸- گیریم $A_n=(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2},\frac{1}{n}+\frac{1}{2})$ که $n\in N$. در این‌صورت $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ برابر کدام است؟

الف) صفر　　ب) φ　　ج) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　د) $\{0\}$

۹- هرگاه $\#A$ نمایشگر عده اعضای A باشد و A و B متناهی باشند آنگاه $\#(A\bigcup B)$ برابر کدام است؟

الف) $\#A+\#B$　　ب) $\#A-\#B$

ج) $(\#A)\times(\#B)$　　د) $\#A+\#B-\#(A\bigcap B)$

۱۰- فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. در این‌صورت $\#(A\times B)$ برابر کدام است؟

الف) $(\#A)\#B$　　ب) $\#A+\#B$

ج) $(\#A)\times(\#B)$　　د) $(\#B)\#A$

۱۱- گیریم f یک رابطه هم‌ارزی در A، $y, x\in A$ به قسمی باشند که $[x]=y$. در این‌صورت کدام عبارت درست است؟ ($[u]$ دسته هم‌ارزی u است)

الف) $y=x$　　ب) $y\neq x$　　ج) $x\in[y]$　　د) $[x]\bigcup[y]=A$

۱۲- گیریم M یک مجموعه و f یک رابطه در M باشد به طوری‌که xfy یعنی $x=y$. در این‌صورت f چگونه رابطه‌ای است؟

الف) فقط متقارن است　　ب) فقط بازتابی است

ج) هم‌ارزی است　　د) فقط متعدی است

۱۳- پرسش‌های زیر پرسش‌های چهارگزینه‌ای اجراشده در کنکور سال ۱۳۸۷ گروه آزمایشی ریاضی- فیزیک هستند. این پرسش‌ها را به دقت مرور کنید و سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) به‌لحاظ آماری توزیع این پرسش‌ها در حیطه‌های دانشی، مهارتی و بینشی چگونه است؟ نتایج به‌دست‌آمده را در یک جدول درج کنید.

ب) پرسش‌ها را به‌لحاظ فنی و روانسنجی بررسی کرده و آن‌را نقد کنید.

ج) پرسش‌ها را به‌لحاظ دروس گذرانده شده دانش‌آموزان در دوره متوسطه تقسیم‌بندی کنید.

د) آیا فکر می‌کنید این پرسش‌ها اهداف آموزش و یادگیری ریاضیات دبیرستانی را سنجش می‌کند؟ نظر خود را مستند توضیح دهید.

ریاضیات:

۱۰۱- اگر منحنی به معادله $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

الف) $m > ۳$ ب) $۳ < m < ۴$ ج) $۳ < m < ۵$ د) $۴ < m < ۵$

۱۰۲- اگر $\log(x-۲) = ۲\log ۲ - \log(x-۴)$، حاصل $\log_۵(x-۳)$ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) -۱ د) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۳- اعداد ۲^a ، $۴\sqrt{۲}$ و ۲^b سه جمله متوالی از تصاعد هندسی‌اند، واسط عددی بین a و b کدام است؟

الف) ۲/۵ ب) ۲ ج) ۱/۵ د) $\sqrt{۲}$

۱۰۴- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به‌طوری‌که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

الف) ۲۰ ب) ۲۴ ج) ۳۶ د) ۴۰

۱۰۵- در معادله $۳x^۲ - ۱۷x + m = ۰$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۵

۱۰۶- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin\frac{۵\pi}{۵} + \sin(\frac{\pi}{۲}+x)\sin(\pi+x) = ۰$ کدام است؟

الف) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ب) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ج) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ د) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۱۰۷- حاصل عبارت $۲ + \frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}$ برابر کدام است؟

الف) $۲\sin ۴۰^\circ$ ب) $۴\cos ۴۰^\circ$ ج) $۲\cos ۴۰^\circ$ د) $۴\sin ۴۰^\circ$

۱۰۸- حاصل $\lim_{x\to-\infty} x \cdot \left[\frac{۱}{x}\right]$ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) $+\infty$ د) $-\infty$

فصل پنجم

۱۰۹- تابع با ضابطه $y = x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟

الف) پیوسته و مشتق‌پذیر است

ب) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست

ج) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر

د) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است

۱۱۰- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\dfrac{1}{3}$ مشتق $f(\sqrt{|x|+3})$ در نقطه $x=-1$ کدام است؟

الف) $\dfrac{1}{6}$

ب) $\dfrac{1}{12}$

ج) $-\dfrac{1}{6}$

د) $-\dfrac{1}{12}$

۱۱۱- تابع با ضابطه $y = ax + b + \dfrac{x^2}{2x-1}$ تابع هموگرافیکی اسـت که محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a+b$ کدام است؟

الف) 2

ب) -2

ج) $\dfrac{1}{2}$

د) $-\dfrac{1}{2}$

۱۱۲- مسـتطیل‌های محـاط در یک دایـره به قطر ۶ واحـد را حول یک ضلع خـود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

الف) 4

ب) $2\sqrt{3}$

ج) $2\sqrt{6}$

د) $3\sqrt{2}$

۱۱۳- در کدام مجموعه زیر، از اعداد حقیقی یکی از کران‌های پایین در خود مجموعه است؟

الف) $\{x : x|x| \le -1\}$

ب) $\{x : [x] = 2\}$

ج) $\{x : [-x] = -2\}$

د) $\{x : 2 - x \ge |x|\}$

۱۱۴- کدام دنباله همگرا است؟

الف) $\{n^{(-1)^{2n-1}}\}$

ب) $\{\cos\dfrac{n\pi}{2}\}$

ج) $\{[2 + \dfrac{(-1)^n}{n}]\}$

د) $\{[1 - \dfrac{(-1)^n}{n}]\}$

۱۱۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}\,\pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

الف) $\dfrac{\pi}{3}$

ب) $-\dfrac{\pi}{3}$

ج) $\dfrac{2\pi}{3}$

د) $\dfrac{3\pi}{2}$

۱۱۶- کدام بیان درباره پیوستگی تابع درست است؟

الف) اگر تابعی در بازه (a,b) یکنوا و کراندار باشد، در این بازه پیوسته است.

ب) اگر تابعی در بازه $[a,b]$ کراندار و دارای ماکسیمم و مینیمم باشد، در این بازه پیوسته است.

ج) اگر تابعی در بازه (a,b) پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد.

د) اگر تابعی در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد.

۱۱۷- معادله مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^۳+x^۲}{x-۲}}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

الف) $۲y-۲x-۳=۰$ ب) $۲y+۲x-۳=۰$

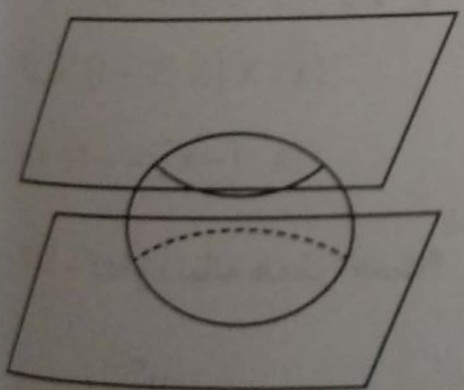
ج) $۲y-۲x+۳=۰$ د) $۲y+۲x+۳=۰$

۱۱۸- کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x)=x\,|x^۲-۳|$ بر دامنه $[-۱,۱]$ نادرست است؟

الف) مینیمم مطلق دارد ب) ماکسیمم مطلق دارد

ج) دو نقطه اکسترمم نسبی دارد د) فاقد اکسترمم نسبی

۱۱۹- در یک نیمکره به شعاع ۲۵ واحد، صفحه P همواره موازی صفحه قاعده با سرعت ۰/۰۴ از آن دور می‌شود، در حالی‌که فاصله دو صفحه ۱۲ واحد است، سرعت کاهش مساحت دایره مقطع صفحه P و نیمکره، کدام است؟



الف) $۰/۴۸\pi$ ب) $۰/۷۲\pi$ ج) $۰/۸۴\pi$ د) $۰/۹۶\pi$

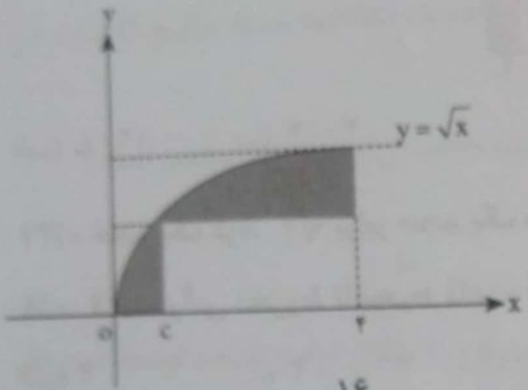
۱۲۰- در قضیه مقدار میانگین در مورد مشتق، برای تابع با ضابطه $f(x)=x^۲+bx+۱$ روی بازه $[۰,b]$. اگر $C=۱$ در شرایط قضیه موجود باشد، آنگاه b کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\sqrt{۳}$

۱۲۱- تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{۴}{۳}} - ۴x^{\frac{۱}{۳}}$ در بازه (a, b) رو به پایین است، بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ∞

۱۲۲- با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، به‌ازای کدام مقدار C مساحت دو ناحیه سایه‌زده شکل مقابل، برابرند؟



الف) $\frac{۵}{۳}$ ب) $\frac{۷}{۳}$ ج) $\frac{۹}{۴}$ د) $\frac{۱۶}{۹}$

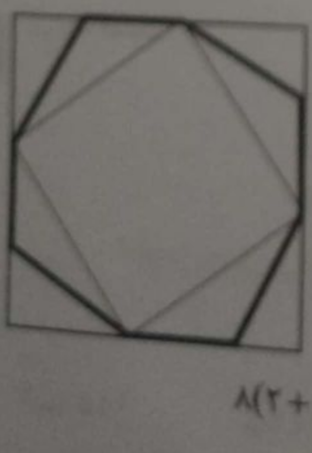
۱۲۳- حاصل $\int_{-۲}^{۳} x([x]-۱)dx$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۴/۵ ج) ۵ د) ۵/۵

۱۲۴- سطح محدود به منحنی تابع با ضابطه $f(x) = ۲\sin x \cos ۳x$ و محور xها در بازه $[۰, \frac{\pi}{۶}]$ کدام است؟

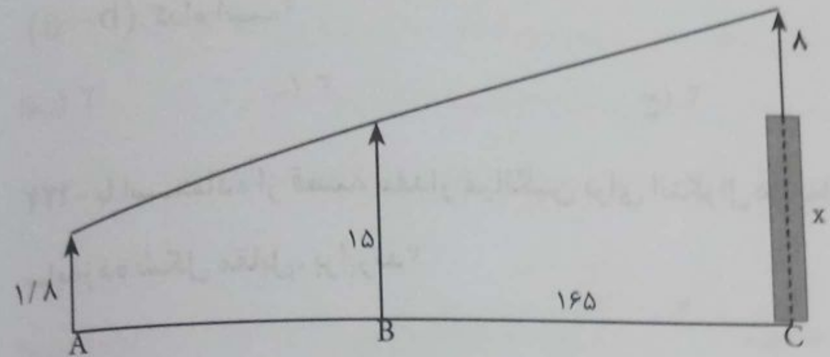
الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۳}{۸}$ د) $\frac{۱}{۸}$

۱۲۵- در شکل مقابل اندازه طول اضلاع هشت‌ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



الف) $۴(۱+\sqrt{۲})$ ب) $۴(۲+\sqrt{۲})$ ج) $۸(۱+\sqrt{۲})$ د) $۸(۲+\sqrt{۲})$

۱۲۶- در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است، بلندی برج چند متر است؟



الف) ۱۹/۸ ب) ۲۰/۲ ج) ۲۰/۸ د) ۲۱/۲

۱۲۷- حجم یک کره، $\sqrt{2}$ برابر حجم یک مخروط قائم است. اگر شعاع قاعده مخروط برابر شعاع کره باشد، فاصله رأس مخروط تا محیط قاعده آن، چند برابر شعاع قاعده است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) $\sqrt{10}$ د) $2\sqrt{3}$

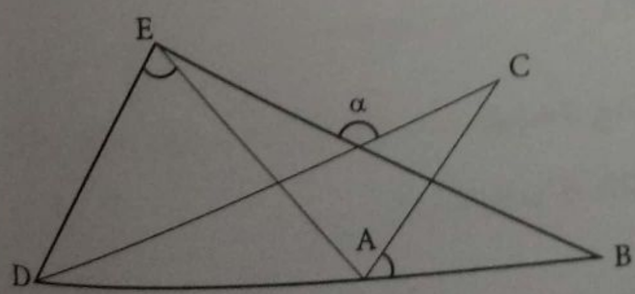
۱۲۸- در مستطیلی به ابعاد ۱۵ و ۸ واحد، از تقاطع نیمسازهای داخلی آن یک چهارضلعی حاصل می‌شود، مساحت این چهارضلعی چند واحد مربع است؟

الف) ۱۶ ب) ۲۴/۵ ج) ۲۸ د) ۳۲/۵

۱۲۹- ذوزنقه متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۶ و $\frac{32}{3}$ واحد بر دایره‌ای محیط است، کوتاه‌ترین فاصله رأس ذوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) ۱ د) $\sqrt{3}$

۱۳۰- در شکل مقابل $AB = AC,\ AD = AE$، $\widehat{CAB} = 50^\circ$ و $\widehat{AED} = 65^\circ$ زاویه α چند درجه است؟



الف) ۱۱۵ ب) ۱۲۰ ج) ۱۲۵ د) ۱۳۰

۱۳۱- خط Δ با کدام شرایط می‌تواند موازی صفحه P و عمود بر صفحه Q باشد؟

الف) $P \perp Q$ ب) $P \cap Q = \varnothing$ ج) $\Delta \perp (P \cap Q)$ د) $\Delta \| (P \cap Q)$

۱۳۲- نقاط $(۵,۳)$ ، $(۷,۱)$ و $(۱,-۱)$ سه رأس از مثلث قائم‌الزاویه‌اند. مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانس مبدأ مختصات و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ ، کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶

۱۳۳- مبدأ مختصات رأس یک هرم مثلث‌القاعده است، معادله سه ضلع قاعده آن $\begin{cases} ۲x + y = ۲ \\ z = ۰ \end{cases}$ ، $\begin{cases} x + z = ۱ \\ y = ۰ \end{cases}$ و $\begin{cases} ۲z + y = ۲ \\ x = ۰ \end{cases}$ است، حجم آن چند واحد مکعب است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) ۱ د) $\frac{۴}{۳}$

۱۳۴- اگر $a = (۱,-۲,۳)$ و $b = (۲,۰,۱)$ مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a + ۳b$ و $۲a + ۵b$ کدام است؟

الف) $۲\sqrt{۳}$ ب) $۳\sqrt{۲}$ ج) $۳\sqrt{۵}$ د) $۵\sqrt{۳}$

۱۳۵- اگر خط به معادله $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-b}{a} = \frac{z}{۱}$ بر صفحه‌ای به معادله $۲x + y - ۳z = ۴$ واقع شود، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

الف) $(۱,۲)$ ب) $(-۱,۲)$ ج) $(۱,-۲)$ د) $(-۱,-۲)$

۱۳۶- دو دایره از نقطه $(۲,۱)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند، شعاع این دایره‌ها کدام است؟

الف) ۱, ۴ ب) ۱, ۵ ج) ۲, ۴ د) ۲, ۵

۱۳۷- بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادله $۴x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$ و دو رأس دیگر آن کانون‌های این بیضی باشند کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\sqrt{۳}$

۱۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & a & ۰ \\ -۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ به‌ازای کدام مقادیر a ماتریس $A \cdot A^t$ وارون‌پذیر است؟

الف) ۱ ب) ۶- ج) هر مقدار a د) هیچ مقدار a

۱۳۹- اگر $\begin{bmatrix} ۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix} = A$ ماتریس $(\frac{۱}{۲}A)^{۳}$ کدام است؟

الف) $I_{۲}$ ب) $۲I_{۲}$ ج) $-۲I_{۲}$ د) $-I$

۱۴۰- در دستگاه معادلات $\begin{cases} x + ay + z = ۵ \\ ۲x + by + ۲z = ۹ \\ ۳x + ۳y - z = ۲ \end{cases}$ اگر دترمینان ضرایب برابر ۴ باشد، مقدار y کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۲- د) $\frac{۱}{۲}$

۱۴۱- داده‌های آمار در ۹ طبقه با طول دسته ۴، دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۸ داده بین چارک اول و سوم به آنها اضافه شود و یک واحد از طول دسته کم کنیم، در دسته‌بندی جدید تعداد دسته‌ها کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳

۱۴۲- در داده‌های آماری با نمودار ساقه و برگ، داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. میانگین داده‌های باقیمانده کدام است؟

ساقه	برگ						
۳	۱	۴	۵	۷	۸	۸	۹
۴	۰	۰	۴	۵	۵	۶	
۵	۲	۳	۶	۶	۷		

الف) ۴۲/۷ ب) ۴۲/۹ ج) ۴۳/۲ د) ۴۳/۴

۱۴۳- اگر مجموعه A دارای ۵ عضو و مجموعه B دارای ۶ عضو و مجموعه $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشند، مجموعه $(A \cap B') \times (A \cup B')'$، چند عضو دارد؟

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۵

فصل پنجم

۱۴۴- مجموعه اعداد طبیعی را به سه مجموعه A ، B و C افراز کرده‌ایم. اگر $A = \{n : n = ۷k + ۲, k \in N\}$ و $B = \{n : n = ۷k - ۳, k \in N\}$ کدام دو عدد، به یک کلاس هم‌ارزی حاصل از این افراز، تعلق دارند؟

الف) ۱۳ و ۲۱ ب) ۱۳ و ۲۳ ج) ۲۱ و ۳۲ د) ۲۳ و ۳۲

۱۴۵- کدام رابطه، یک رابطه هم‌ارزی **نیست**؟

الف) متشابه بودن دو مثلث در مجموعه مثلث‌ها

ب) عمود بودن دو خط در مجموعه خطوط در فضا

ج) موازی بودن دو خط در مجموعه خطوط در فضا

د) معادل بودن مساحت دو مثلث در مجموعه مثلث‌ها

۱۴۶- یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در یک پرتاب، احتمال وقوع عدد بزرگ‌تر از ۳ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{۵}{۱۲}$ د) $\frac{۷}{۱۲}$

۱۴۷- صفحه هدف مثلث متساوی‌الاضلاع به ارتفاع ۱۵ واحد است، تیر رها شده، به این صفحه هدف برخورد کرده است. با کدام احتمال فاصله محل اصابت تیر از نزدیک‌ترین ضلع این مثلث بیشتر از ۱ واحد است؟

الف) ۰/۵۶ ب) ۰/۶۴ ج) ۰/۷۲ د) ۰/۸۱

۱۴۸- با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود از ۴ بیشتر نیست یا مضرب ۳ می‌باشد؟ (رقم ۰ در اتومبیل به‌کار نمی‌رود)

الف) $\frac{۴}{۹}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۲}{۳}$ د) $\frac{۵}{۹}$

۱۴۹- در یک گراف کامل از مرتبه ۵، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۵ د) ۲۰

۱۵۰- در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت مجذور باقیمانده است، چند عدد b می‌توان یافت؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

۱۵۱- نمایش عددی در مبنای ۳ به‌صورت (۲۰۱۱۲۱) است. در نمایش این عدد در مبنای ۴، چند مرتبه رقم صفر تکرار شده است؟

الف) فاقد صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

۱۵۲- از رابطه هم‌نشینی (پیمانه ۱۸) $9a \equiv 6b$ کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

الف) (پیمانه ۲) $a \equiv 0$ ب) (پیمانه ۳) $b \equiv 0$

ج) (پیمانه ۶) $a \equiv 2$ د) (پیمانه ۶) $3a \equiv 2b$

۱۵۳- اگر M ماتریس متناظر از یک رابطه روی مجموعه ۴ عضوی باشد، این رابطه کدام خواص را دارد؟

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) بازتابی- ترایایی ب) بازتابی- متقارن

ج) ترایایی- پادمتقارن د) متقارن- ترایایی

۱۵۴- به چند طریق می‌توان ۱۲ سکه را بین سه نفر تقسیم کرد، به‌طوری‌که لااقل به هر کدام یک سکه برسد؟

الف) ۵۵ ب) ۴۸ ج) ۴۵ د) ۳۶

۱۵۵- هر یک از ارقام ۱,۲,۳,۴,۵ را در یکی از ۶ خانه هم‌ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟

الف) $\frac{1}{5}$ ب) $\frac{1}{10}$ ج) $\frac{1}{15}$ د) $\frac{2}{15}$

۵-۱۶ خودآزمایی (آزمون آموزش ریاضی ۲- خرداد ۱۳۸۴)

۱- هدف‌ها و مقاصد ارزشیابی را توضیح دهید.

۲- فهرستی شامل حداکثر پنج مورد از تجربیات منفی (مثبت) خود را در رابطه با ارزشیابی‌ها و آزمون‌های گذشته‌تان ارائه دهید. منفی یا مثبت به اختیار خودتان!

۳- تمایزهای مهارت‌های دانش، ادراک و به‌خاطرسپاری را توضیح دهید.

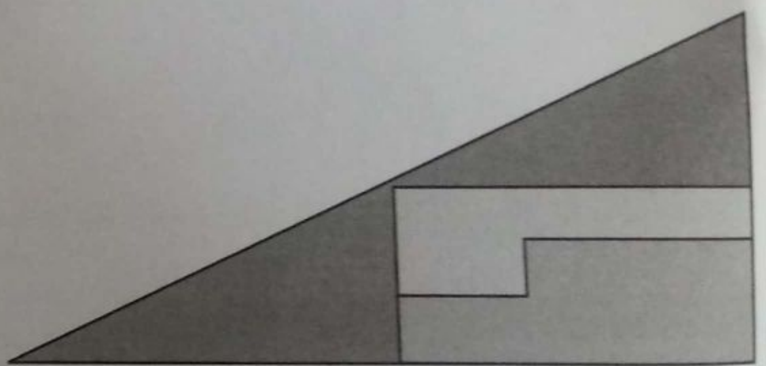
۴- هرگاه قرار باشد فقط یک دلیل برای اجرای ارزشیابی ارائه دهید، چه دلیلی را اقامه می‌کنید.

۵- تمایزهای ارزشیابی‌های مدرسه‌ای (formative) و جامع یا سراسری (Summative) را حداکثر در پنج سطر توضیح دهید.

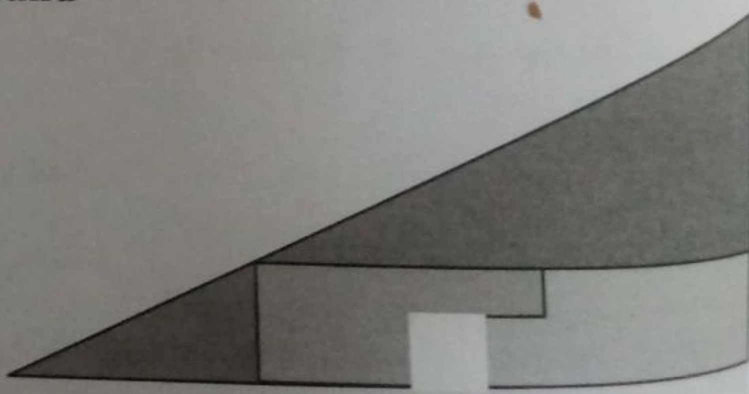
۶- در خصوص رابطه و اثرات ارزشیابی در آموزش و یادگیری بحث کنید (حداکثر در پنج سطر).

یک سرگرمی و یک معما!

How can this be true?
Mathematical
Games!



Below ,the four parts are moved around



Where does this hole come from?
The partitions are exactly the same as those above.

۵-۱۶-۱ خودآزمایی ۲

۱- یک تفاوت اساسی ارزشیابی رسمی و جامع کدام است؟

الف) ارزشیابی رسمی توسط مدرسه انجام می‌شود و ارزشیابی جامع توسط نهادهای بیرون مدرسه

ب) ارزشیابی جامع توسط مدرسه انجام می‌شود.

ج) ارزشیابی رسمی آزمون تستی و ارزشیابی جامع آزمون تشریحی است.

د) ارزشیابی رسمی آزمون تشریحی و ارزشیابی جامع آزمون تستی است.

۲- نقش ارزشیابی در رابطه با آموزش کدام است؟

الف) ارزشیابی فرمانده و آموزش فرمانبردار است. ب) آموزش در خدمت ارزشیابی است.

ج) ارزشیابی در خدمت آموزش است. د) آموزش فرمانده و ارزشیابی فرمانبردار است.

۳- پرسش باز انتها چگونه پرسشی است؟

الف) پرسشی است که با حل آن مسأله خاتمه می‌یابد.

ب) پرسشی است که با حل آن مسأله خاتمه نمی‌یابد.

ج) پرسشی است که انتهای آن پرسش دیگری مطرح است.

د) پرسشی است که انتهای آن باز است.

۴- یک هدف ارزشیابی تحصیلی کدام است؟

الف) اطلاعات در باب بازخورد سیستم آموزشی می‌دهد.

ب) اطلاعات در باب پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان می‌دهد.

ج) برای استخدام آتی دانش‌آموزان ضروری است.

د) نتیجه فعالیت دبیران را مشخص می‌کند.

۵- نگرش به ارزشیابی چگونه نگرشی باید بوده باشد؟

الف) می‌خواهیم بدانیم دانش‌آموزان چه چیزهایی می‌دانند.

ب) می‌خواهیم بدانیم دانش‌آموزان چه چیزهایی نمی‌دانند.

ج) دانش دانش‌آموزان برای ما اهمیتی ندارد ارزشیابی جنبه رسمی دارد.

د) دانش دانش‌آموزان مهم است اما ارزشیابی جنبه رسمی دارد.

۶- ارزشیابی رسمی چگونه ارزشیابی است؟

الف) ارزشیابی است که در پایان ترم یا سال تحصیلی توسط مدرسه انجام می‌گیرد.

ب) ارزشیابی است که در پایان مقطع تحصیلی توسط مدرسه انجام می‌گیرد.

ج) ارزشیابی است که در پایان ترم یا سال تحصیلی توسط نهادهای بیرون مدرسه انجام می‌گیرد.

د) ارزشیابی است که در پایان مقطع تحصیلی توسط نهادهای بیرون مدرسه انجام می‌گیرد.

۷- یک هدف آزمون‌های جامع کدام است؟

الف) مقایسه مدارس
ب) سنجش پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان

ج) مقایسه کشورها به‌لحاظ آموزشی
د) مقایسه سنجش پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان

۸- استانداردسازی پرسش‌های چندگزینه‌ای چگونه توصیف می‌شود؟

الف) فرآیندی طولانی است، مطابق اصولی مشخص
ب) در حوزه‌ای محدود به‌عنوان نمونه اجرا می‌گردد.

ج) در یک بار اجرا، مطابق اصولی مشخص
د) در حوزه‌ای وسیع به‌عنوان نمونه اجرا می‌گردد.

۹- گفته شـــده است که از طرح پرسش‌های چندگزینه‌ای ســؤالی منفی باید احتراز گردد. دلیل این امر چیست؟

الف) روان‌سنجی
ب) در ریاضیات مناسب نیستند.

ج) مشکل می‌نمایند
د) سهل‌الوصول هستند.

۱۰- چرا باید از طرح پرسش‌های فاقد محتوا در ریاضیات احتراز کرد؟

الف) فقط حافظه را می‌سنجند
ب) مشکل هستند.

ج) سهل‌الوصول هستند
د) ابهام دارند

۱۱- در طراحی پرســش‌های چندگزینه‌ای یک درس نســبت پرســش‌های دانشی، بینشی و مهارتی چگونه است؟

الف) ۵۰ درصد مهارتی و مابقی دانشی و بینشی

ب) ۵۰ درصد دانشی و مابقی بینشی و مهارتی

ج) به نسبت بررسی کتاب و درس و لحاظ این حیطه‌ها

د) به نسبت حجم کتاب درسی

۱۲- دو مزیت مهم پرسش‌های چندگزینه‌ای نسبت به پرسش‌های تشریحی کدامند؟

الف) زمان کوتاه تصحیح و امکان مقایسه

ب) زمان بیشتر طراحی و امکان مقایسه دقیق‌تر

ج) زمان کوتاه تصحیح و امکان مقایسه دقیق‌تر

د) طراحی پرسش‌ها به‌صورت انبوه و مقایسه دقیق‌تر

۱۳- گفته شده است از طراحی پرسش‌هایی با عنوان «کدام گزینه درست است؟» خودداری گردد. دلیل این امر چیست؟

الف) این پرسش‌ها فاقد گزینه‌اند
ب) این پرسش‌ها فاقد محتوایند

ج) این پرسش‌ها دقیق نیستند
د) گزینه‌ها هم‌وزنی ندارند

۱۴- پرسش‌های تشریحی باز انتها برای کدام رده بیشتر مناسب است؟

الف) به‌عنوان مسائل جایزه‌دار
ب) به‌عنوان مسائل امتحانی معمولی

ج) به‌عنوان مسائل امتحانات رسمی
د) به‌عنوان مسائل امتحانات جامع

۱۵- کدام‌یک از انواع مسائل تشریحی را می‌توان مسائل پژوهشی قلمداد کرد؟

الف) مسائل بسته
ب) مسائل چندقسمتی

ج) مسائل باز انتها
د) مسائل یک قسمتی

۱۶- یکی از کاستی‌های پرسش‌های چندگزینه‌ای کدام است؟

الف) عدم توانایی در سنجش تفکر
ب) عدم توانایی در سنجش تفکر انتقادی

ج) عدم دقت لازم در انتخاب گزینه‌های هم‌وزن
د) عدم دقت لازم در انتخاب گزینه‌های مناسب

۱۷- در ارزشیابی محوری نتیجه آزمون چگونه تلقی می‌گردد؟

الف) نتیجه یا نمره اثر کمی بر گروه‌بندی دانش‌آموزان دارد.

ب) نتیجه یا نمره بسیار مهم می‌باشد.

ج) نتیجه و نمره امتیازی خصوصی است که بین دبیر و دانش‌آموز باقی می‌ماند.

د) نتیجه گویای همه حقایق تربیتی نمی‌باشد.

۱۸- دیدگاهی که معتقد به غیرمحوری بودن ارزشیابی است چگونه توصیف می‌شود؟

الف) اعتبار و اهمیت ارزشیابی فاقد اعتبار است.

ب) اعتبار و اهمیت ارزشیابی دارای اعتبار اجتماعی است.

ج) اعتبار و اهمیت ارزشیابی فاقد اعتبار اجتماعی و عمومی است.

د) اعتبار و اهمیت ارزشیابی دارای اعتبار آموزشی است.

۱۹- کدامیک از دو ارزشیابی رسمی و جامع بیشتر مهم‌اند؟

الف) هر دو ارزشیابی مهم هستند و سیستم ارزشیابی باید در خدمت هر دو بوده باشد.

ب) ارزشیابی رسمی مهمتر است و سیستم باید در خدمت این ارزشیابی بوده باشد.

ج) ارزشیابی جامع مهمتر است و سیستم باید در خدمت این ارزشیابی بوده باشد.

د) به یک اندازه مهم‌اند لکن سیستم باید در خدمت ارزشیابی رسمی بوده باشد.

۲۰- هرگاه مقصودمان از ارزشیابی تشخیص نیازهای یادگیری بچه‌ها و مشکلات آموزشی باشد، کدام ارزشیابی بیشتر مناسب است؟

الف) جامع　　　ب) رسمی

ج) جامع و رسمی　　　د) پرسش‌های کوتاه کلاسی

پاسخ‌نامه

شماره پرسش	گزینه درست
۱	الف
۲	ب
۳	ب
۴	ب
۵	الف
۶	الف

شماره پرسش	گزینه درست
۷	الف
۸	الف
۹	الف
۱۰	الف
۱۱	ج
۱۲	ج
۱۳	ب

شماره پرسش	گزینه درست
۱۴	الف
۱۵	ج
۱۶	ب
۱۷	ب
۱۸	ج
۱۹	الف
۲۰	ب

فصل ششم

اصول و استانداردهای آموزشی

هدف‌ها

- در این فصل دانشجویان با مفاهیم برنامه تحصیلی (curriculum) و چشم‌انداز برنامه (vision) آشنا می‌شوند.
- دانشجویان، با هر تخصصی که داشته باشند، در کسوت دبیری می‌بایست با اصول و استانداردهای آموزشی آشنایی کافی داشته باشند.
- دانشجویان باید بتوانند به این تشخیص نایل شوند که از میان دو یا چند راه‌حل برای یک مسئله ریاضی کدامیک به‌لحاظ روش و متدلوژی یادگیری ارجحیت دارد.
- آموزش و پرورش یک خدمت‌رسانی زیربنایی است، مانند هر خدمت و سرویس دیگر اجتماعی محتاج استاندارد شدن و تبیین اصول حاکم بر آن است.

فصل ۶-۱ چشم‌انداز (Vision)

هدف‌های کلی و هدف‌های خاص آموزش ریاضیات دبیرستانی را تبیین کردیم. با این حال پرسش‌هایی مطرح است که محتاج تعمق بیشتر و شاید پژوهش‌های بالاتری است.

آیا در تدریس ریاضیات دبیرستانی موفق هستیم؟

آیا همه دانش‌آموزان در کسب ریاضیاتی با کیفیت بالا موفق هستند؟

آیا دانش‌آموزان پس از فراغت از تحصیلات دبیرستانی، می‌توانند از ریاضیاتی که یاد گرفته‌اند استفاده کنند؟

آیا برای ما، به‌عنوان برنامه‌ریزان، دبیران و سیاست‌گذاران آموزشی، فقط بخش خاصی از دانش‌آموزان در یادگیری و یاددهی ریاضیات مطرح‌اند و یا همه دانش‌آموزان جامعه هدف ما را تشکیل می‌دهند؟

آیا یادگیری و آموزش ریاضیات با کیفیت عالی به همه دانش‌آموزان نقشی در ارتقاء و توسعه ملی‌مان دارد؟

اصولاً چه ریاضیاتی را می‌توانیم ریاضیات با کیفیت عالی بنامیم؟ ویژگی‌ها و استانداردهای آن کدام است؟

اصولاً دیدگاه و ایده‌آل‌مان از وضعیت ریاضیات دبیرستانی چیست؟

آیا لازم است که یک چشم‌انداز مشخص و تعریف‌شده‌ای از وضعیت ایده‌آل ریاضیات دبیرستانی داشته باشیم؟

متأسفانه ملاحظه می‌شود که بخش اعظمی از آنچه دانش‌آموزان در دبیرستان آموزش می‌بینند، خیلی زود بعد از ترک دبیرستان فراموش می‌کنند. پژوهش‌های میدانی مؤید این نظریه است. حتی آن دسته از دانش‌آموزان که موفق به ورود به آموزش عالی شده و وارد دانشگاه می‌شوند، قسمت اعظم مطالب و مباحث تدریس‌شده را کلاً فراموش کرده‌اند.

در مـوارد کاربردی نیز وضعیت مناسـبی را در آمـوزش و یادگیری ریاضیات ملاحظـه نمی‌کنیم. اگر از یک دانش‌آموز و یا حتی دانشـجو پرسـش کنیم که چنانچـه کالایی را مثلاً با تخفیـف ۱۰ درصد ۲۲۰۰ تومان خریده‌ایم، قیمت قبلی آن چقدر بوده است به‌آسانی نمی‌توانند پاسخ دهند.

اگر از دانش‌آموزان دبیرسـتانی بخواهیم که یک زمین مسـتطیل شکل را بدون استفاده از وسیله اندازه‌گیری تخمین زده و مساحت تقریبی آن‌را مشخص کنند، غالباً عاجز خواهند بود.

پروژه‌های انجام‌شده در خصوص مسائل آموزشی دبیرستانی مؤید کارایی ضعیف آن است.

شـکی نیست که بسـیاری از مباحث تخصصی تدریس‌شده و قضیه‌های گوناگونی که در دبیرستان می‌آموزیم نمی‌توانند برای همیشه در خاطره و حافظه دانش‌آموزان ماندگار باشند.

اما، به‌هرحال، از این همه ریاضیات که تدریس می‌شـود نباید انتظاری داشت؟ قطعاً انتظارات تربیتی در همه حیطه‌هـا و موضوعات درس می‌بایسـت مدنظر قرار گیـرد. انتظاراتی که دلالت بر فراگیـری و اثرات تربیتی در نوجوانان و جوانان دارد و می‌تواند و می‌بایسـت تا پایان عمر به‌عنوان مؤلفه‌ای رفتاری شایسـته در وجود دانش‌آموزان در حوزه‌های شخصی و اجتماعی تعریف کرده و رعایت کنند.

و مهمتر از همه، ما به شـهروندانی نیاز داریم که فرآینـد تصمیم‌گیری را بدانند. از تعهد اخلاقی و کارایی بالایی برای انجام وظایف آتی خود و وظایف روزمره بهره‌مند باشند.

باید یادآوری کنیم که هر یک از سـه هدف کلی فوق‌الاشـاره الزامات متعددی دارد که تنها در طول تحصیلات ابتدایی و متوسـطه می‌توان آنها را تأمین کرد. برای مثال دانش‌آموزی که رقابت‌پذیر اسـت، در آینده برای آنکه بتواند در انجام وظایف شـغلی خویش با همگنان خود رقابت کند، نیازمند مطالعه و دانش‌افزایی مستمر خواهد بود. این امر به‌نوبه خود شـهروندان را به کتاب خواندن، دانسـتن بیشـتر، و در نتیجه زندگی سـالم‌تر رهنمون می‌کنـد. در این‌صورت افراد جامعه داوطلبانه و به‌طور خودجوش به‌صـورت مادام‌العمر به‌دنبال فراگیری دانش و ارتقـاء معلومات عمومی و تخصصـی خویش خواهند بود. **به چنین جامعـه‌ای، جامعه یادگیری یا جامعه یادگیرنده اطلاق می‌گردد.** متأسـفانه، ما غالباً گله‌مند هستیم که سرانه مطالعه در جامعه ایرانی بسیار پایین اسـت و با سـرانه مطالعه در سایر کشـورها، به‌ویژه کشورهای پیشرفته، فاصله بسـیاری دارد. این امر نتیجه بد نظام آموزشی است که به‌جای آنکه یادگیری و آموزش را با تعامل عملی و فعالیت‌های سازمان‌یافته همراه کند، به‌صورتـی یک‌طرفه می‌خواهیم مطالب را به دانش‌آموزان **انتقال و تحمیل** کنیم. تحلیل سـایر الزامات اهداف سه‌گانه فوق و چشـم‌انداز بیان‌شـده را رها می‌کنیم و آن‌را به‌عنوان پروژه به پژوهشگران و علاقه‌مندان واگذار می‌نماییم. در اینجا به ذکر یک نکته دیگر بسنده می‌کنیم که به‌لحاظ تاریخی و آموزشی حائز اهمیت می‌باشد.

در زمانی نه چندان دور که دولت‌ها مسئول تأسیس مدرسه و درگیر آموزش و پرورش بچه‌ها نبودند، مکتب‌خانه‌هایی خصوصی در مساجد و مکاتب به امر آموزش و پرورش و یا بهتر بگوییم تعلیم و تربیت بچه‌ها می‌پرداختند. دانش‌آموزان و محصلین پس از پنج یا شش سال تحصیل در این مدارس وارد جامعه می‌شدند، برخی نیز برای ادامه مطالعه و پژوهش بیشتر به حوزه‌های علمی دینی شخصی رهسپار می‌شدند. تقریباً اکثریت نزدیک به اتفاق کسانی که اینگونه مدارس مقدماتی را طی می‌کردند، افراد باسواد به معنی واقعی آن روزگاران تلقی می‌شدند. این افراد چند شاخه معرفتی را مطالعه کرده و در زندگی بعدی خود می‌توانستند به‌درستی از آن استفاده کنند. این موضوعات عبارت بوده از:

- قرائت و درک قرآن مجید
- خواندن و نوشتن
- خوش‌خط نوشتن
- حساب و هندسه به‌ویژه چهار عمل اصلی
- ادبیات عمومی
- نامه‌نگاری (و امور اداری)

اینگونه مدارس به همه اهداف خود نایل می‌شدند. یک شهروند با پنج یا شش سال تحصیلی می‌توانست قرآن را به‌درستی قرائت کند و تا اندازه‌ای از معانی و درک آن اطلاع داشته باشد؛ می‌توانست از چهار عمل اصلی حساب در زندگی روزمره خود و حتی به‌عنوان یک حسابدار زمانه خود استفاده کند؛

می‌توانست نامه‌های اداری صحیح و درستی بنویسد و تقاضاهای مشخصی را در آن بیان کند.

می‌توانست به خوش‌خطی بپردازد و یا حداقل خوش‌خطی را ارج بگذارد.

از مدرس و ملای خود داستان‌های آموزنده و تربیتی یاد گرفته بود که می‌توانست برای دوستان و فرزندان خود به‌درستی نقل کند و به تربیت اخلاقی آنان بپردازد.

ملاحظه می‌کنیم که چنین مدارسی بدون تحمیل بودجه‌ای بر جامعه و دولت‌ها در کار خودشان بسیار موفق بودند. اما هم‌اکنون، به کرات ملاحظه می‌شود، فردی دوره کارشناسی ارشد را به پایان برده اما به‌موقع مراجعه برای شغل قادر نیست یک تقاضای ساده را خود نوشته و تحویل دستگاه اداری بدهد!

افرادی دوره متوسطه را پس از دوازده سال به پایان رسانده از انجام چهار عمل اصلی و محاسبات ذهنی در خریدهای خود عاجزند و کاستی‌های دیگری که از ذکر آن خودداری می‌شود.

۶-۲ برنامه تحصیلی چیست؟

برنامه تحصیلی در مقابل واژه (curriculum) می‌باشد. برنامه تحصیلی تنها ریزمواد درسی یا مجموعه‌ای از دروس نمی‌باشد. ریزمواد درسی فقط بخشی از برنامه تحصیلی است. برنامه تحصیلی **شامل مجموعه‌ای از فرایندها و برنامه‌های مشخص و عملیاتی است که با هدف تعلیم و تربیت بچه‌ها و دانش‌آموزان طراحی می‌گردد.** این برنامه‌ها شامل بیان چشم‌انداز برنامه، تهیه و تنظیم هدف‌های کلی و جزئی برنامه‌های درسی، استراتژی‌ها و روش‌های تدریس کلی، پروژه‌ها و تمرین‌های فردی و گروهی، ارزیابی و ارزشیابی‌های رسمی، نیمه‌رسمی طرح‌های مرتبط با تربیت معلمان و دبیران ریاضی و آموزش‌ها و کارگاه‌های ضمن خدمت دبیران است.

به اختصار می‌توانیم بگوییم که یک برنامه تحصیلی همه فعالیت‌هایی است که به یادگیری فعال و سازمان‌یافته دانش‌آموزان در چارچوب نظام آموزشی منجر می‌شود.

برنامه تحصیلی در شوراهای برنامه‌ریزی کشوری طراحی و تدوین می‌گردد. این امر یکی از حساس‌ترین وظایف اینگونه نهادهای برنامه‌ریزی و پژوهشی می‌باشد. برنامه تحصیلی در چارچوب چشم‌انداز برنامه و راهنمای کلی برنامه توسط متخصصین ذی‌ربط تدوین و طراحی می‌شود. پس از طراحی برنامه تحصیلی، لوازم و ابزار اجرایی آن تحت نام درس‌افزارها (Courseware) تألیف می‌شود. این درس‌افزارها شامل کتاب‌های درسی، کتاب‌های کار و تمرین، نوارهای آموزشی، مجموعه پرسش‌های آزمون‌های رسمی و نظایر اینها می‌باشد. پس از آن اجرای برنامه شروع می‌شود.

باید به ذکر این نکته مهم پرداخته شود که یک برنامه تحصیلی جدید نمی‌تواند و نمی‌بایست از سکون آغاز گردد. **بلکه:**

> **هر برنامه تحصیلی، به نوعی، تکامل‌یافته برنامه قبلی تحصیلی است که طریق توسعه آن بر اساس تجربیات و پژوهش‌های انجام‌شده به‌دست می‌آید.**

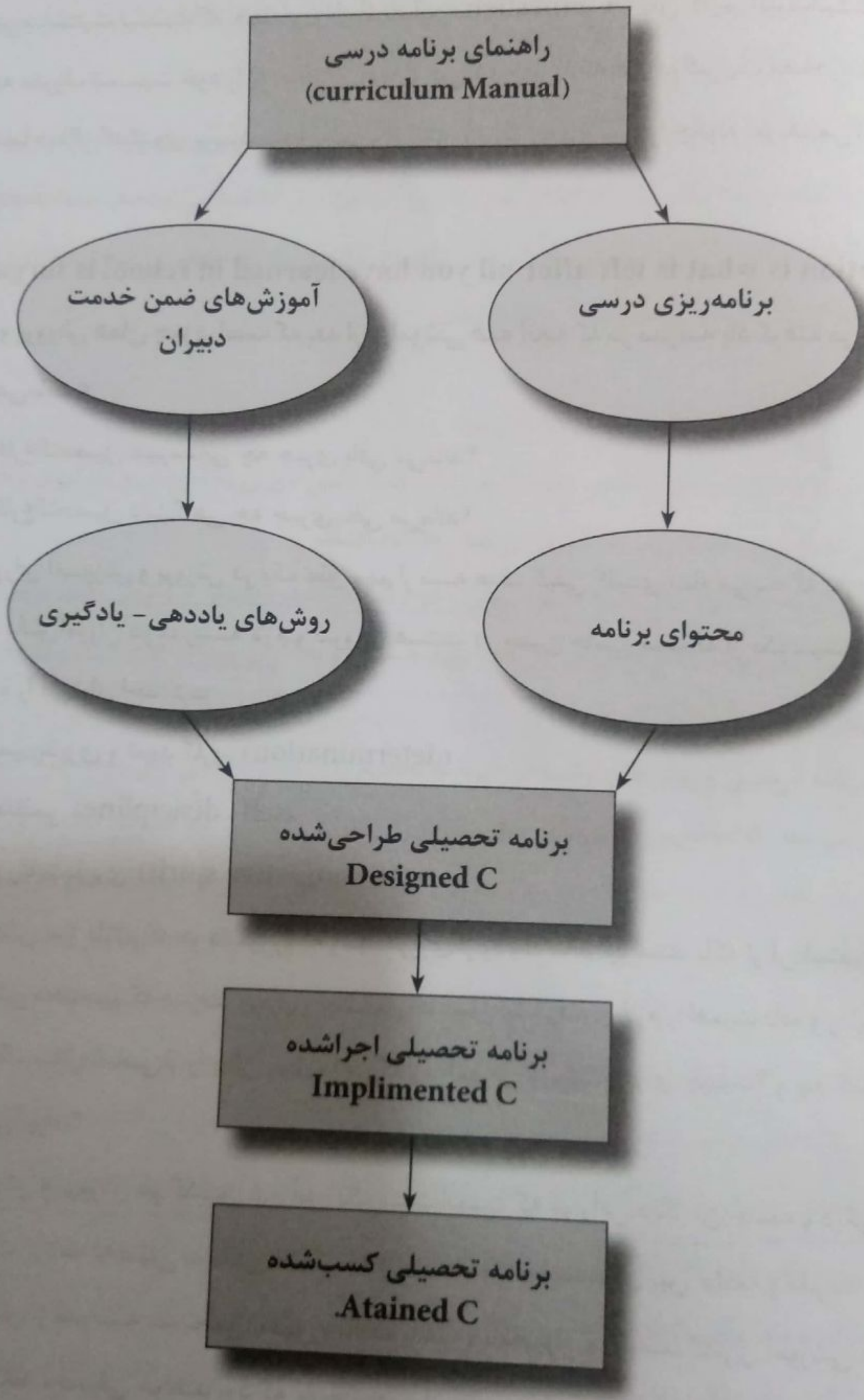
برنامه تحصیلی بر سه نوع است که در توالی هم قرار دارند:

- الف) برنامه تحصیلی طراحی‌شده
- ب) برنامه تحصیلی اجراشده
- ج) برنامه تحصیلی کسب‌شده

در عمـل نمی‌تـوان انتظار داشـت که یک برنامـه تحصیلی طراحی، با همـه اهداف و اجـزاء آن، در کلاس درس بـر وفق‌نظر طراحان برنامه به اجرا درآید. این امر ناشـی از کاسـتی‌های آموزش دبیران و یا مؤلفه‌های پشـتیبان‌کننده آموزش کلاسـی اسـت. هرگاه ۸۰ تا ۹۰ درصد یک برنامه در عمل اجرا گردد، آن برنامه را می‌توان یک برنامه موفق تلقی کرد.

پس از اجرای یک برنامه، بخش یا بخش‌هایی از آن توسط دانش‌آموزان به‌درستی کسب نمی‌شود. دلایل این امر نیز متنوع بوده و این ارزیابی معمولاً توسـط پژوهشـگران آموزشی و دانشکده‌های ریاضی انجام می‌گیرد. بازخوردهـای برنامه و میزان کسـب آن توسـط دانش‌آموزان و دبیران موفقیت و یا عـدم موفقیت یک برنامه تحصیلی را آشکار می‌سازد.
ذیلاً شمای اجزاء سازنده برنامه تحصیلی و ارتباط آن ملاحظه می‌گردد.

مؤلفه‌های سازای برنامه تحصیلی و طبقات اجرایی آن



۶-۳ چشم‌انداز برنامه

در اینجا بی‌مناسبت نیست که جمله‌ای را از آنیشتاین (A. Einestien) نقل کنیم. آلبرت‌انیشتاین پس از آنکه نظریه معروف نسبیت خود را به جامعه ریاضی و فیزیک جهان ارائه کرد درگیر یک مصاحبه شد. او در پاسخ به مصاحبه‌گر که از وی پرسید: شما تعلیم و تربیت (آموزش و پرورش) را چگونه تعریف می‌کنید چنین پاسخ می‌دهد:

"Education is what is left after all you have learned in school is forgotten"

«آموزش و پرورش همان چیزی است که بعد از فراموشی همه آنچه که در مدرسه یاد گرفته می‌شود برای فرد باقی می‌ماند.»

برای یک فارغ‌التحصیل دبیرستانی چه چیزی باقی می‌ماند؟

برای یک فارغ‌التحصیل دانشگاهی چه چیزی باقی می‌ماند؟

یکی از وزرای آموزش و پرورش در یک نطق مهم از سه هدف کیفی کلیدی نام می‌برد که به‌زعم او برای شکوفایی دانش‌آموزان در مدرسه لازم و ضروری هستند. در چنین حالتی است که از یک سیستم آموزشی بهترین بهره را می‌توان اخذ کرد:

- ← تصمیم‌پذیری و تعهد کاری (determination)
- ← خودنظمی (self- disicipline)
- ← روح رقابت‌پذیری (the competive spirit)

ما به شهروندانی نیاز داریم که در دنیای رو به رشد امروزی از رقابت سالم نهراسند، بلکه از آن استقبال کنند. ما به شهروندانی محتاجیم که در رفتار فردی و اجتماعی خودشان نظم رفتاری لازم را اهمیت داده و رعایت کنند. مقدمه فوق یک سؤال اساسی‌تر را پیش روی ما می‌گذارد: آموزش و پرورش برای چیست؟ و چه کسانی برای آن تصمیم می‌گیرند؟

سیستم آموزش و پرورش هر کشور در رأس یک مثلث است که دو رأس دیگر آن جامعه و دیگری برنامه تحصیلی است. برنامه تحصیلی به معنی عام آن (curriculum) واسطه‌ای بین جامعه و مدرسه است. اگر جامعه انتظاراتش از مدرسه مشخص، معین و بالنده باشد، برنامه‌ریزان و سیاست‌گذاران آموزشی به ناچار از طراحی یک برنامه تحصیلی خواهند بود که پاسخگوی نیاز جامعه باشد.

اما، مافوق همه اینها، چشم‌انداز آموزشی قرار دارد. چشم‌انداز آموزشی تعیین‌کننده ایده‌آل‌های یک نظام آموزش و پرورش است. بدون داشتن ایده‌آل، در هر حیطه‌ای، نمی‌توانیم انتظارات مشخص و متعالی از فعالیت‌های آن بخش را داشته باشیم.

به‌عنوان نمونه، به بخشی از چشم‌انداز مطرح‌شده در یک نظام آموزشی می‌پردازیم و به یاد داریم که همه مؤلفه‌های یک سیستم آموزشی، فضای فیزیکی، مدیریت آموزشی اختصاصی بودجه، استخدام معلمین و تربیت آنان و نظایر اینها برای آن است که یک دانش‌آموز در کلاس درس به تحصیل بپردازد، کلاس درسی که باعث شکوفایی استعدادهای خدادادی او بوده باشد.

۶-۳-۱ چشم‌اندازی برای ریاضیات مدرسه

یک کلاس درس یا مدرسه‌ای را تصور کنیم که در آن همه دانش‌آموزان به آموزش و یادگیری ریاضیاتی با کیفیت عالی دسترسی داشته و در یادگیری آن نقش داشته باشند.

انتظارات آرزومندانه و عملی برای همه دانش‌آموزان وجود داشته باشد. معلمین و دبیران دانش‌پذیر آن دارای منابع آموزشی کافی بوده که از آن برای کار خود بهره جسته و به‌عنوان دبیران حرف‌های پیوسته در ارتقاء دانشی و شغلی به‌سر می‌برند.

محتوای برنامه درسی و روش‌های ارائه آن (برنامه تحصیلی) از نظر ریاضی غنی بوده، به دانش‌آموزان فرصت‌هایی می‌دهد که مفاهیم و روش‌های مهم ریاضی را با ادراک درست یاد بگیرند. تکنولوژی یک مؤلفه ضروری محیط یادگیری است. دانش‌آموزان با اعتمادی راسخ در امور ریاضی پیچیده اشتغال دارند. اموری که به دقت توسط دبیران خود انتخاب شده‌اند. همه آنان به دانش ریاضی با تنوعات گوناگون و وسیعش توجه دارند، برخی اوقات به یک مسئله از منظرهای ریاضی مختلفی می‌پردازند یا آنکه ریاضیات را به طرق مختلفی نمایش می‌دهند تا آنکه روش‌هایی بیابند که آنها را قادر به پیشرفت کند. دبیران و معلمین به دانش‌آموزان کمک می‌کنند به حدسیه‌سازی بپردازند، حدسیه‌های خود را اصلاح و بررسی کنند. حدسیه‌هایی که بر پایه شواهد عقلی و تجربی ارائه گردند و در این راه از استدلال‌های متنوع و روش‌های برهان برای اثبات و یا ردیه حدسیه‌های خود استفاده می‌کنند. به تنهایی و یا به‌صورت گروهی و با دسترسی به تکنولوژی، به کار تولیدمدارانه و منعکس‌کننده تحت راهنمایی ماهرانه دبیران خود می‌پردازند. دانش‌آموزان قادرند به‌طور شفاهی و یا کتبی ایده‌های ریاضی و نتایج به‌دست‌آمده خود را به‌طرز مؤثری مطرح کنند. آنها به ریاضیات ارزش قائلند و در یادگیری آن به‌گونه‌ای فعال سهیم هستند.

بدون شــک چنین چشــم‌اندازی محتاج یک برنامه تحصیلی معقول و معتبر، معلمیــن و دبیران دانش‌پذیر و رقابت‌پذیر بوده دبیرانی که قادرند آموزش را با ارزیابی و قضاوت حرف‌های و سیاست‌های آموزشی درآمیخته به‌گونه‌ای که منجر به توسعه و حمایت یادگیری‌شده، و همچنین با حمایت کلاس درسی را سامان دهند که دسترس فوری به تکنولوژی داشته و نیز تعهد دوجانبه‌ای به عدالت آموزشی و کار عالی داشته باشند. چالش بر کاســتی‌ها گســترده اســت اما ضروری اســت. دانش‌آموزان ما صاحب این حق‌اند و نیازمند بهترین آموزش ممکن برای ریاضیات هستند، آموزشی که آنان را قادر می‌سازد به آرزوهای خود جامه عمل بپوشانند و به هدف‌های شغلی خود در دنیایی دائماً در حال تغییر برسند.

۶-۴ اصول ریاضیات مدرسه

تصمیم‌ســازی‌هایی که توســط دبیران، مدیران مدرسه و دیگر دســت‌اندرکاران آموزشی در خصوص محتوا و مشــخصات ریاضیات مدرســه اتخاذ می‌گردد نتایج مهمی هم برای دانش‌آموزان و هم جامعه به بار می‌آورد. چنین تصمیم‌گیری‌هایی می‌بایست بر پایه یک راهنمای جامع و معقول استوار باشد. هدف **از اصول ریاضیات مدرسه ارائه مبنایی جهت یک راهنمای جامع و منطقی می‌باشد.**

ایــن اصــول در واقع، وجوه خاص آموزش ریاضیــات کیفی را تبیین می‌کنند. در ادامه، اســتانداردهایی برای توصیــف محتوا و روش‌هایی که در راســتای آن دانش‌آموزان می‌توانند به یک یادگیری فعال اشــتغال یابند، می‌بایســت ارائه گردد. اصول و اســتانداردهای آموزشــی توأماً به‌منظور تأمین هدف کلی از آموزش و پرورش ریاضی، که همانا چشم‌انداز ریاضیات مدرسه است، فرمول‌بندی و طراحی می‌گردند.

این اصول، به مثابه جهت آموزش و یادگیری ریاضیات مدرسه، سرلوحه کار خواهد بود.

تساوی و عدالت آموزشی: تعالی در آموزش و یادگیری ریاضیات مستلزم تساوی در انتظارات بالا و حمایت حداکثری از همه دانش‌آموزان می‌باشد.

برنامــه تحصیلی: یــک برنامه تحصیلی چیزی بیش از گردابه‌ای از ســرفصل‌ها، مواد درســی و فعالیت‌های آموزشــی اســت؛ چنین برنامه‌ای می‌بایســت هماهنگ، متمرکز بر ریاضیات مهم بوده و در سرتاســر مقاطع تحصیلی به‌طرزی هنرمندانه توزیع شده باشد.

یاددهی: آموزش و یاددهی مؤثر ریاضی مستلزم:

۱. درک آنکه دانش‌آموزان چه می‌دانند و به یادگیری چه چیزی نیاز دارند.

۲. و سپس به چالش کشیدن آنها و حمایت ماهرانه از آنها به سمت و سویی است که به‌خوبی آن‌را یاد بگیرند.

یادگیری: دانش‌آموزان می‌بایست ریاضیات را توأم با درک آن فراگیرند، دانش جدید را بر پایه تجربه و دانش قبلی خود به‌طرز فعالانه بسازند.

ارزیابی و ارزشیابی: ارزشیابی دانش‌آموزان می‌بایست پشتیبان‌کننده یادگیری ریاضیات مهم بوده و اطلاعات مفیدی هم برای معلمین و دبیران و هم دانش‌آموزان فراهم کند.

تکنولوژی: تکنولوژی برای یاددهی و یادگیری ریاضیات ضروری است؛ تکنولوژی بر ریاضیاتی که آموزش داده می‌شود تأثیرگذار است و پروسه یادگیری دانش‌آموزان را توسعه و گسترش می‌دهد.

این اصول نیازمند توضیح و تفسیر بیشتری است. در اینجا به اختصار و مجمل توضیحاتی در باب آن ارائه می‌گردد.

قبل از همه باید این نکته را متذکر شویم که «اصول ریاضیات مدرسه» را نباید با «اصول یادگیری ریاضیات» که در درس‌های قبلی فراگرفته‌اید یکی بی‌انگارید. اصول ریاضیات مدرسه را باید به‌عنوان مجموعه پنداشت‌هایی تلقی کرد که بر مؤلفه‌های مهم ریاضیات مدرسه حاکم‌اند: این مؤلفه‌ها مشتمل‌اند بر محتوای ریاضیات مدرسه (سرفصل‌ها، اهداف و ریزمواد درسی)، روش‌های یادگیری، مدیریت ریاضیات مدرسه به‌طور خاص و مدیریت مدرسه به‌طور عام، مدیریت کلان آموزشی و تکنولوژی و پشتیبانی ابزاری از امور یاددهی و یادگیری ریاضیات.

در مورد اصول اول- تساوی عدالت- ممکن است گفته شود که همه دانش‌آموزان استعداد یادگیری ریاضیات را ندارند، پس چگونه به همه آنها باید ریاضیاتی مهم آموزش داد؟ در پاسخ باید یادآوری کنیم که حوزه علمی ریاضیات مدرسه به معنی مفهومی آن شامل مهارت‌ها و دانش‌هایی است که دانستن آن برای هر شهروند باسواد الزامی است. در روزگاران یونان قدیم نیز واژه mathemative به معنی «دانستنی‌های عمومی» قلمداد می‌شده است. در یک جامعه پیشرفته، هر شهروند می‌بایست به حداقل ریاضیات و دانستنی‌هایی مجهز بوده باشد تا در زندگی فردی و اجتماعی موفق گردد. به‌علاوه باید اعتراف کرد که خداوند به همه انسان‌ها استعداد فراگیری ریاضیات را عطا کرده است، اگر دانش‌آموزی ضعیف می‌نماید مقصر اصلی «ریاضیات مدرسه» و عاملین آن یعنی معلمین، دبیران، برنامه‌نویسان، سایر دست‌اندرکاران و دانشکده‌های دانشگاه‌ها هستند. دانش‌آموز ریاضیات سال قبل را به‌درستی آموزش ندیده است و معلم سال بعد این کاستی را متوجه دانش‌آموز به‌طرزی انحصاری می‌داند. البته ممکن است برخی از دانش‌آموزان محتاج کمک و یاری بیشتری در کسب تجربیات ریاضی و یادگیری آن باشند.

نکته مهم

مأموریت و رسالت دستگاه آموزشی فقط تعلیم و تربیت نخبگان خاص در رشته‌های علمی نمی‌باشد، بلکه تحت پوشش قرار دادن همه دانش‌آموزان به‌طرزی مناسب و شایسته است.

برنامه تحصیلی امری است که در کشور ما به‌گونه‌ای متمرکز توسط شوراهای برنامه‌ریزی درسی سامان می‌یابد. معلمین و دبیران ریاضی فقط با نقد برنامه درسی و ارسال نظرات و پیشنهادات آموزشی خود می‌توانند در سامان‌دهی این برنامه مؤثر باشند.

اصول یاددهی و یادگیری تا اندازه‌ای و به تفصیل در قالب اصول یادگیری فعال قبلاً توضیح گردیده‌اند. معهذا باید متذکر شویم که آموزش ریاضیات یک فعالیت پیچیده است و هیچ‌گونه دستورالعمل ساده، فراگیر و سراسری، که برای همه موضوعات ریاضی قابل اعتماد باشد، وجود ندارد.

در خصوص اصل ششم، یعنی تکنولوژی، باید این نکته را اضافه کنیم که امروزه فرآیندهای یاددهی- یادگیری به‌قدری متنوع و مؤثر طراحی می‌شود که به همراه یک تکنولوژی مناسب، دانش‌آموزان خود می‌توانند به امر یادگیری بپردازند و در نهایت فرآیند «خودفراگیری» اهمیت مضاعفی یافته است.

امروزه ده‌ها سایت آموزشی ریاضی وجود دارد که شاگردان می‌توانند به آنها مراجعه کرده و به خودفراگیری دانش ریاضی مشغول شوند.

۶-۵ مسائل پروژه‌ای

۱. این گفته که «درک مفهومی مؤلفه‌ای مهم برای تسلط موضوعی و توسعه دانش است» را تفسیر کنید و نمونه‌هایی مشخص را ارائه دهید که چنانچه دانش‌آموزی از درک یک مفهوم عاجز باشد، چگونه این کاستی بر مهارت‌ها و دانش‌های بعدی وی تأثیرگذار خواهد بود؟

۲. آیا «یادگیری توأم با درک» ارتباطی با مسائل جدیدی که دانش‌آموزان در آینده خود با آن مواجه خواهند بود دارد؟ توضیح دهید و در صورت ممکن نظرات خود را با دیگر دانشجویان و مدرس خود مطرح کنید.

۳. ارزشیابی بر (علیه) دانش‌آموزان است یا برای دانش‌آموزان؟ توضیح دهید.

۴. ارزشیابی به دو طریق مختلف می‌تواند اتفاق افتد:

الف) به‌عنوان بخشی از آموزش و یادگیری کلاسی.

ب) به‌عنوان یک امتحان رسمی و قطع فعالیت کلاسی.

کدامیک از این دو شیوه را ترجیح می‌دهید؟ دلایل خود را توضیح دهید.

۵. آیا تکنولوژی می‌تواند جای درک اساسی ریاضیات و شهود ریاضی را بگیرد؟ توضیح دهید و سعی کنید دلایل تجربی را ارائه کنید.

۶. در تاریخ ریاضی گفته شده است که ارشمیدس با آن همه نبوغ ریاضی خود روزها را صرف وقت کرده است تا عدد π را کشف کند و موفق به محاسبه مساحت دایره گردد. اما اینک برخی از معلمین ما سعی دارند در یکی دو دقیقه و یا یک جلسه درسی به معرفی π بپردازند.

فکر می‌کنید این روش (غیرفعال) چه تأثیری در یادگیری دانش‌آموزان داشته و آیا دانش‌آموزان و یا حتی دانشجویان به تأثیر π در ریاضیات آگاهی دارند. می‌توانید به‌عنوان یک پژوهش ساده از تعدادی فارغ‌التحصیلان دبیرستانی در خصوص این مسئله پرسش کنید.

۶-۵-۱ استانداردهای ریاضیات مدرسه

استانداردهای ریاضیات مشخص‌کننده محتوا و فرآیندهایی است که دانش‌آموزان می‌بایست در طول تحصیل‌شان آنها را کسب نموده و قادر به استفاده از آن باشند. در این بخش به اختصار ارزش‌های ریاضیات مدرسه را به‌عنوان چنین استانداردهایی ارائه می‌دهیم. در این مورد، استانداردهایی متعالی مورد نظر است که بر اساس آن به توان جامعه‌ای را به‌وجود آورد که قادر به تفکر بوده و به طریقی ریاضی‌گونه استدلال کرده و دارای بنیانی سودمند از دانش و مهارت‌های ریاضی باشد. البته چنین استانداردهایی خاص دوره دبیرستان نبوده بلکه آنها به‌عنوان تلفیقی از هدف‌های کلی آموزش و یادگیری ریاضیات و فرآیندهای اجرایی آن باید قلمداد گردند که در سرتاسر دوره تحصیل دانش‌آموزان از کلاس آمادگی تا پایان دبیرستان باید مورد توجه و امعان نظر قرار گیرند.

این استانداردها برحسب حوزه‌ای محتوایی و همچنین حوزه‌های عملکردی و به طریق ذیل طبقه‌بندی شده‌اند:

- اعداد و اعمال بر آنها
- جبر
- هندسه
- اندازه و اندازه‌گیری
- تحلیل داده‌ها و احتمال (آمار و احتمال)
- حل مسئله
- استدلال و برهان
- ارتباط، تعامل و تعاون
- ارتباط مفهومی و طرح‌واره
- نمایش‌دهی[1] و ساماندهی (مدلسازی ریاضی)

1. reoresentation

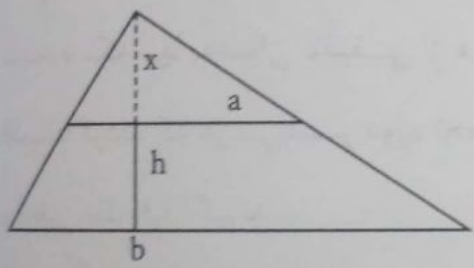
هر یک از این استانداردهای ده‌گانه به زیربخش‌هایی مشخص‌تر تقسیم‌بندی می‌گردد تا مؤثرتر مورد ملاحظه برنامه‌ریزان، معلمین و دبیران قرار گیرد.

برای نمونه استانداردهای بخشی ارتباط مفهومی به‌شرح ذیل تبیین می‌گردند.

همه دانش‌آموزان (از دوره آمادگی تا پایان دبیرستان) باید قادر باشند:

- ارتباط ایده‌ها و مفاهیم ریاضی را دریافته و از آن استفاده کنند.
- دریابند که چگونه ایده‌های ریاضی به هم مرتبط بوده و یکی بر دیگری ساخته شده و دانش ریاضی را به‌عنوان یک کل به هم پیوسته تشکیل می‌دهد.
- ریاضیات موجود در حیطه‌های خارج از ریاضیات را شناسایی کرده و از ریاضیات برای آن استفاده کند.

به‌عنوان مثال ارتباط بین روش محاسبه مساحت یک ذوزنقه و محاسبه حجم یک هرم ناقص را بررسی می‌کنیم:



$$\text{مساحت مثلث کوچک} = \frac{۱}{۲}ax$$

$$\text{مساحت مثلث بزرگ} = \frac{۱}{۲}b(x+h)$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱}{۲}b(x+h) - \frac{۱}{۲}ax$$

$$= \frac{۱}{۲}bx + \frac{۱}{۲}bh - \frac{۱}{۲}ax$$

بنابراین تشابه مثلث‌ها

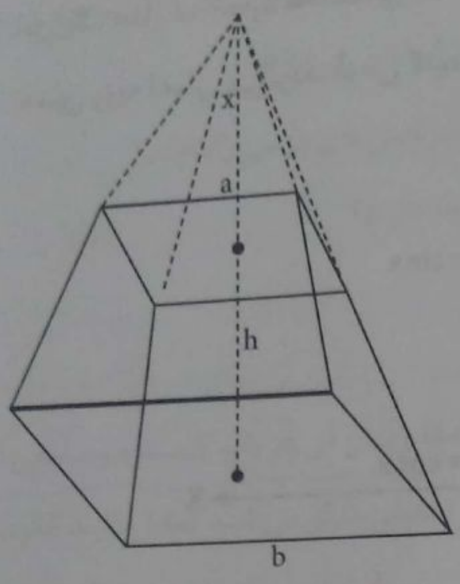
$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$

$$bx = a(x+h)$$

بنابراین:

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱}{۲}a(x+h) + \frac{۱}{۲}bh - \frac{۱}{۲}ax = \frac{۱}{۲}h(a+b)$$

مشابه این به محاسبه حجم هرم ناقص می‌پردازیم:



$=\frac{۱}{۳}a^{۲}x$ حجم هرم کوچک (مربع‌القاعده)

$=\frac{۱}{۳}b^{۲}(h+x)$ حجم هرم بزرگ (مربع‌القاعده)

$\frac{۱}{۳}b^{۲}(h+x)-\frac{۱}{۳}a^{۲}x$ حجم هرم ناقص

اما:

$\frac{x}{x+h}=\frac{a}{b}$ و لذا $bx=a(x+h)$ و یا $x=\frac{ah}{b-a}$

$=\frac{۱}{۳}b^{۲}x+\frac{۱}{۳}b^{۲}h-\frac{۱}{۳}a^{۲}x$ حجم هرم ناقص

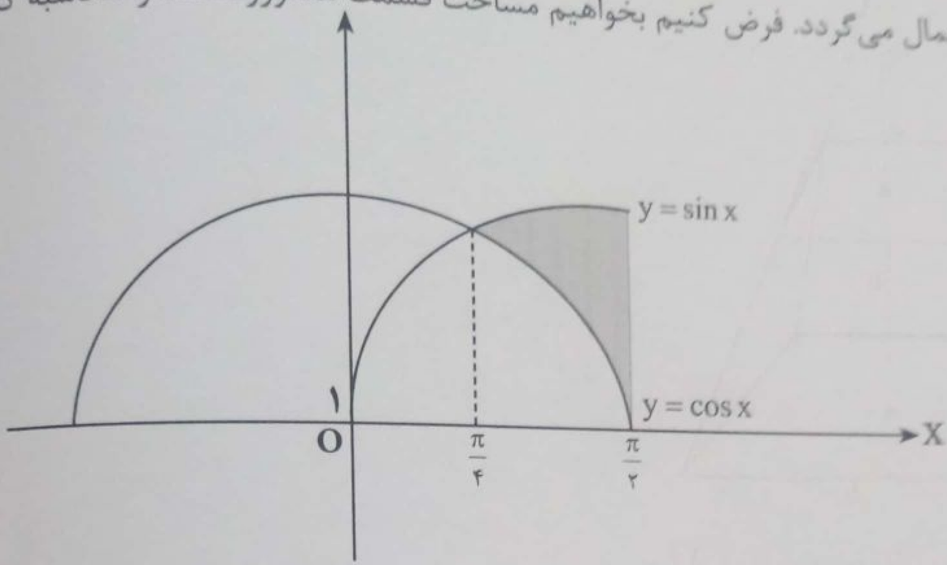
$$=\frac{۱}{۳}b^{۲}h\frac{a}{b-a}+\frac{۱}{۳}b^{۲}h-\frac{۱}{۳}a^{۲}\frac{ah}{b-a}$$

$$=\frac{۱}{۳}\frac{a(b^{۲}-a^{۲})}{b-a}h+\frac{۱}{۳}b^{۲}h$$

در نتیجه: $=\frac{۱}{۳}(b^{۲}+ab+a^{۲})h$ حجم هرم ناقص

بدین‌نحو دانش‌آموزی نحوه محاسبه حجم هرم ناقص را با نحوه محاسبه ذوزنقه (مثلث ناقص) مرتبط می‌بینند.

این یک عمل استاندارد محاسباتی است. در سال‌های بعد، به وقت محاسبه مساحت‌های محدود به نمودارها همین رویه اعمال می‌گردد. فرض کنیم بخواهیم مساحت قسمت هاشورزده‌شده را محاسبه کنیم:



$$S=\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\sin x\,dx-\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\cos x\,dx$$

$$=\cos x\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۰-(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\sqrt{۲}-۱$$

۶-۵-۲ استدلال و براهین

به‌عنوان نمونه دیگری از اســتانداردهای ریاضیات مدرسه، از اســتدلال و برهان، نام برده شده است. در اینجا توضیحاتــی ولو مختصر، در باب برهان و اســتدلال ارائه می‌گردد. نقش برهــان در ریاضیات آنقدر پر اهمیت است که به قولی:

No Proofs No Mathematics

بدون برهان ریاضیاتی وجود ندارد[1]

۱. از برتراند راسل، فیلسوف و ریاضی‌دان معاصر انگلیسی نقل می‌کنند که وی ابتدا دانشجوی فلسفه بوده است. وقتی برای احکامی که ارائه می‌شود به دنبال استدلال و دلیل پرسش‌هایی از معلم خود می‌کند معلم و دبیر وی در پاسخ به وی می‌گوید: اگر می‌خواهی برای هر حکمی و قضیه‌ای دلیل و برهانی مستدل داشته باشی، باید هندسه و ریاضیات بخوانی. برتراند تغییر رشته داده و به تحصیل ریاضیات می‌پردازد. در نهایت پس از کسب کرسی ریاضیات در دانشگاه کمبریج به تحصیل و پژوهش فلسفه پرداخته و هم در فلسفه عام و هم در فلسفه ریاضیات نیز صاحب‌نظر می‌گردد. او استاد مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب، مؤسس مؤسسه ریاضیات و پدر ریاضیات نوین ایران بوده است. برتراند راسل به سال ۱۹۷۰ میلادی در لندن درگذشت. در زمان حیات علاوه‌بر فعالیت علمی و فلسفی یکی از منتقدان بانفوذ جنگ ویتنام به‌شمار می‌رفت. برتراند راسل به همراه ریاضی‌دان دیگر کمبریج به‌نام آرتور وایتهد کتابی تحت عنوان principia mathematica در سه مجلد نوشت. در این برنامه سعی کردند ثابت کنند که ریاضیات

لکن در مورد چگونگی آموزش و توسعه آن در دانش‌آموزان نظرات و پرسش‌های گوناگونی ممکن است مطرح شود.

آیا استدلال منطقی و برهان را فقط طی درس هندسه باید به دانش‌آموزان یاد داد؟

آیا فقط از مقطع آخر متوسطه باید برهان‌ها و طریقه ارائه آن‌را در سرفصل‌های درسی گنجاند؟

آیا اثبات و ردیه به یک اندازه در آموزش و یادگیری ریاضیات اهمیت دارند؟

و پرسش‌های دیگری از این قبیل.

اما نظر متخصصین آموزش ریاضی در باب برهان و استدلال:

استدلال ریاضی و برهان رویه‌های قدرتمندی برای توسعه دیدگاه‌ها و بیان آن در باب گستره وسیعی از پدیده‌ها فراهم می‌کند. افرادی که به‌دنبال دلیل بوده و به طریقی تحلیلی تفکر می‌کنند تمایل دارند الگوها، ساختار و نظام‌هایی را که هم در موقعیت‌های جهان واقعی و هم در اشیاء نمادی وجود دارند متذکر شوند و لذا آنان به ناگزیر از حدسیه‌پردازی و اثبات هستند. در نهایت یک برهان ریاضی روش و طریقی رسمی است برای آنکه یک استدلال و راست‌نمایی خاصی را بیان داریم.

توانایی در اقامه دلیل برای درک ریاضیات ضروری است. دانش‌آموزان چگونه به معنایی از ریاضیات می‌رسند و چه انتظاری از ریاضیات دارند با توسعه ایده‌ها، بررسی پدیده‌ها، راست‌نمایی نتیجه‌ها و استفاده از حدسیه‌ها در همه حوزه‌های محتوایی- اما با انتظارات و پیچیدگی‌های متفاوت- و در همه مقاطع تحصیلی؛ در سال آخر دبیرستان، دانش‌آموزان می‌بایست قادر به درک و ارائه برهان‌های ریاضی شده باشند. یعنی متونی مشتمل بر استنتاج‌های خشک منطقی مستخرج از نتایجی از مفروضات و می‌بایست چنین استدلال‌ها و بحث‌های منطقی را ارج بگذارند.

استدلال و برهان ریاضی را نمی‌توان به سادگی در یک واحد درسی مثل منطق و یا به‌وسیله برهان‌سازی‌های هندسی آموزش داد. برهان یک موضوع بسیار مشکل برای دانش‌آموزان ریاضیات پیش‌دانشگاهی و حتی دانشجویان سال‌های اول دانشگاه است. یک علت این، به‌زعم برخی از محققین آموزش ریاضی، از این قرار است که تنها تجربه دانش‌آموزان دوره دبیرستان و بعد از آن در ساختن برهان‌ها درس هندسه دبیرستانی بوده است. استدلال و برهان می‌بایست بخش سازنده‌ای از تجربیات و کار ریاضی دانش‌آموزان از دوره آمادگی تا

Godfrid Frege فرگه همزمان خدا آفرید کرد. استنتاج منطق از گونه طبیعی اصولی از می‌توان را ریاضی موضوعات و رشته‌ها همه دیگر به‌عبارت نیست، منطق جز چیزی

چیزی جز منطق نیست، به‌عبارت دیگر همه رشته‌ها و موضوعات ریاضی را می‌توان از اصولی طبیعی گونه از منطق استنتاج کرد. همزمان خدا آفرید فرگه Godfrid Frege

در آلمان نیز به کاری مشابه مشغول بود. لکن هم راسل و هم فرگه در نهایت دریافتند که تنظیم ریاضیات به‌عنوان علمی وحدت‌یافته و منتج از منطق ناممکن است. مکاتباتی نیز بین این دو ریاضی‌دان وجود داشته است و هر دو ظاهراً بر این نکته اتفاق‌نظر داشته‌اند. گرچه سال‌های متمادی از عمر خویش را صرف این پروژه کرده بودند. البته هم پروژه راسل و هم پروژه فرگه هر دو متأثر از تلاش‌هایی بوده است که قبلاً توسط داود هیلبرت ریاضی‌دان صورت‌گرای آلمانی در رابطه با فلسفه و مبانی ریاضیات صورت گرفته بود.

Scanned by CamScanner

پایان دوره دبیرستان بوده باشد. استدلال ریاضی یک عادت ذهنی است و همانند همه عادات دیگر، می‌بایست از طریق استفاده مستمر و مکمل در بسیاری از دروس دیگر رشد و توسعه یابد.

اینک به توصیف اهداف بخشی این استاندارد می‌پردازیم.

برنامه‌های آموزشـــی و درس دانش‌آموزان از کلاس آمادگی تا پایان سال آخر دبیرستان باید بتواند دانش‌آموزان را قادر سازد که:

- استدلال و برهان را به مثابه پایه‌های ریاضیات تلقی کنند؛
- به حدسیه‌سازی بپردازند و حدسیه‌ها را بررسی و پژوهش کنند؛
- متون ریاضی و برهان‌ها را ارزیابی و توسعه دهند؛
- انواع مختلفی از استدلال و روش‌های برهان را انتخاب و از آن استفاده کنند.

هر یک از این هدف‌های اســتفاده آموزشـــی خود محتاج تشــریح بیشتر اســت، لیکن در درس‌های پیشین تا اندازه‌ای با آن آشنا شده‌ایم.

نقد و بررســی: هدف یک، یک هدف بینشـــی است. دانش‌آموزان وقتی باور کنند که استدلال و برهان نقشی مبنایی در ریاضیات دارد، سعی می‌کنند به نوشتن استدلال ریاضی عادت کنند و نقش استدلال را در اثبات و یا ردیه احکام ریاضی نقشـــی کلیدی و حیاتی تلقی کنند. متأسفانه ملاحظه می‌شود که برخی از دانشجویان، حتی در مقطع کارشناســـی ارشد! از نوشتن درست استدلال عاجزند، اصولاً در برخورد با یک پرسش امتحانی نمی‌دانند که مفروضات به‌درستی چه می‌گویند و یا آنکه چگونه مفروضات را می‌توان تحلیل کرد و یا مهارت کافی در نوشتن متوازن ریاضی نداشته و لذا از طرح ایده خود و یا استدلال خود عاجزند.

دو هدف بعدی فوق‌الاشاره هدف‌هایی مهارتی هستند، هدف‌هایی نظیر حدسیه‌سازی، ارزیابی یک راه‌حل برای یک مسأله، توسعه و تکمیل یک استدلال و یا یک برهان.

هدف آخر دانشـــی- مهارتی اســـت. دانش‌آموزان می‌بایســـت با انواع برهان مانند برهان خلف، برهان به‌وسیله حالات، برهان استقرایی به‌عنوان دانش آگاهی داشته و بتوانند در موارد مختلف برهان مورد نظر و مناسب را تشخیص داده و آن‌را انتخاب کنند.

حدس یک راه گذر بزرگ به کشف است

Scanned by CamScanner

۶-۵-۳ یک مسأله شمارش

چند مستطیل بر روی یک کادر ۸×۸ شطرنجی وجود دارد؟ منظور مستطیل‌هایی است که اضلاع آنها روی خطوط پررنگ‌تر کاغذ شطرنجی- یعنی خطوطی که سانتی‌مترها را مشخص می‌کنند- واقع‌اند و این مستطیل‌ها شامل مربع‌ها نیز می‌باشند.

راه‌های متعددی در برخورد با این مسأله و حل آن وجود دارد و به دانش‌آموزان باید دقت کافی داده شود تا این مسأله را بررسی نمایند نه آنکه دبیران مستقیماً به حل آن پرداخته و آن‌هم به روش یا روش‌هایی که در ذهن خود دارند.

یک دبیر موفق با طراحی چنین مسأله‌هایی می‌تواند بهره جسته و دانش‌آموزان را به روش‌ها و ریاضیات جالبی رهنمون کند و نیز می‌تواند به ارتباطاتی که در چنین پدیده‌هایی وجود دارد بپردازد که ممکن است نادیده انگاشته شود.

غالباً دانش‌آموزان این مسأله را با شروع به شمردن مستقیم مستطیل‌ها حل می‌کنند، اما به زودی به این مشکل می‌رسند که کدام مستطیل‌ها را شمارش کرده‌اند، به‌طوری‌که شمارش از دست آنها خارج می‌شود. چنین فرصت‌هایی دانش‌آموزان را به این مهم رهنمون می‌کند که لازم است سیستماتیک (منظم) عمل کنند، راهبردی پیدا کنند که طی آن همه مستطیل‌های کادر شناسایی شده و هر مستطیل یک‌بار و فقط یک‌بار به‌شمار آید.

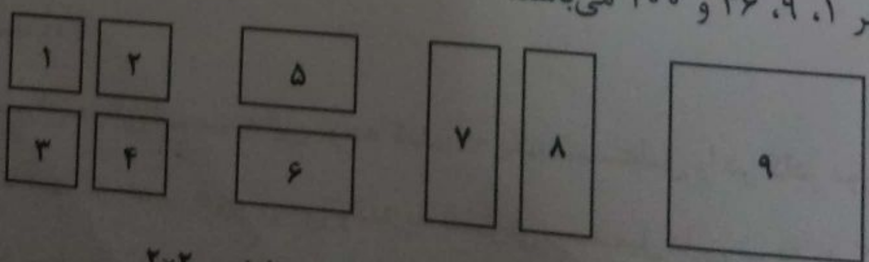
باید انتظار داشت که در بدو امر، برخی دانش‌آموزان به شمارش ادامه می‌دهند در حالی‌که برخی دیگر به راه‌های دیگری می‌اندیشند.

برای مسأله‌هایی از این نوع، غالباً بررسی راهیابی حالت خاص [۱] مفید خواهد بود:

«یک مسأله مرتبط با این مسأله ولی ساده‌تر را آزمایش می‌کنیم»

اما سؤال این است که چه مسأله مرتبطی را باید به محک زد و از آن چه چیزی عایدمان خواهد شد؟

برخی از دانش‌آموزان خواهند گفت که بهتر است کادرهایی ۸×۸ و ۴×۴ و یا حتی ساده‌تر ۲×۲ را بررسی کرده و مستطیل‌های موجود در آنها را شمارش کنیم. تعداد چنین مستطیل‌هایی برای حالت‌های ۱×۱، ۲×۲، ۳×۳ و ۴×۴ به‌ترتیب برابر ۱، ۹، ۳۶ و ۱۰۰ می‌باشد.



مستطیل‌های موجود در یک کادر شطرنجی ۲×۲

این نتایج ما را به این نتیجه رهنمون می‌کند که تعداد مستطیل‌های واقع در یک صفحه شطرنجی n×n برابر $(۱+۲+\cdots+n)^۲$ می‌باشد. مشاهده‌ای زیبا اما اینکه چرا تعداد این مستطیل‌ها می‌بایست برابر چنین عددی باشد؟ چیزی که هنوز بی‌پاسخ است.

ممکن است برخی از دانش‌آموزان بر یک کادر کوچک متمرکز شده و سعی در ارائه یک راه سیستماتیک برای شمارش مستطیل‌ها کرده و سپس آنچه را که یافته‌اند به مسأله ۸×۸ برگشته و اعمال کنند. برخی دیگر ممکن است با فرض آنکه تعداد مستطیل‌های n×n از عبارت فوق طبعیت می‌کند سعی کنند که این عبارت را برای آن نیز نشان دهند، چیزی که از آن به استقراء یاد می‌شود. چنین دانش‌آموزانی به‌زودی درمی‌یابند که چنین استنتاجی مشکل بوده و لذا توجه خود را به راه‌حل دیگری معطوف خواهند کرد.

راهیابی «پرداختن به مسأله مرتبط ساده‌تر» را می‌توان به راه‌های دیگری نیز اعمال کرد. به‌جای کار با یک کادر شطرنجی n×n دانش‌آموزان می‌توانند به‌عنوان نمونه مستطیل‌های یک کادر ۸×۱ را شمارش کنند. اینکه چنین کادری دارای ۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱ مستطیل جزء مختلف است می‌تواند به طریقی چند نشان داده شود، دانش‌آموزان در این مرحله می‌توانند به مقایسه روش‌های خودکارآیی آنها توجه کنند.

وقتی روی کادر ۸×۲ کار می‌کنند، ممکن است به این توجه کنند که الگویی که بر اساس آن مستطیل‌های مثال ۸×۱ را یافته‌اند می‌تواند برای سطر بالایی، سطر دوم و نیز در سراسر هر دو سطر توسعه یابد. این راهیابی به‌صورتی طبیعی قابل گسترش به کادرهای ۸×۳ و نظایر آن می‌باشد. دانش‌آموزان به ارزش این راهیابی‌ها که به‌آسانی قابل تعمیم به دیگر کادرها است باید توجه کرده باشند. دبیران می‌توانند در این مرحله از بچه‌ها بخواهند در مورد کارشان صحبت کنند و نشان دهند که راهیابی‌هایشان در موارد مشابه دیگری کارا بوده و دیگران را از درستی آن متقاعد کنند. همچنانکه دانش‌آموزان به چنین اموری می‌پردازند، آنها در واقع به کاوش الگوهایی سیستماتیک پرداخته و به‌صورتی جبری برقراری و درستی چنین الگوهایی را تحقیق می‌کنند.

نقش دبیران پرسش‌هایی سقراط‌گونه است که به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا مسأله را مرتباً فرمول‌بندی نمایند:

یک مستطیل را چه چیزی مشخص می‌کند؟

به مجهول نگاه کنید [۱]

برخی از دانش‌آموزان ممکن است به این توجه کنند که یک مستطیل را در کادر مورد نظر می‌توان با دو گوشه مقابلش شناخت. در چنین صورتی می‌توانند به شمارش مستطیل‌هایی بپردازند که گوشه سمت چپ بالای آنها در صفحه شطرنجی ۸×۸ ثابت نگهداشته شده است.

یک گوشـــه در صفحه شـــطرنجی انتخاب می‌کنیم. هرگاه m خط شـــطرنج زیر آن گوشـــه و n خط شطرنج راست آن وجود داشته باشد، تعداد مستطیل‌های با آن گوشه ثابت در سمت چپ بالا برابر $m \times b$ است. در این‌صورت می‌توانیم تعداد مســـتطیل‌ها را همچنانکه در شـــکل بعد نشـــان داده شده است، مشخص کنیم. در اینجا حاصل‌ضربی که در بر مربع صفحه شطرنجی نوشته شده است، برابر تعداد مستطیل‌هایی است که دارای یک گوشـــه چپ بالای مشـــترک هستند. کارمان وقتی تمام است که ۶۴ عدد این خانه‌ها را با هم جمع کنیم. اولین ســـتون به حاصل‌جمع $۸(۸+۷+\cdots+۱)$ می‌انجامد، دومین ســـتون به $۷(۸+۷+\cdots+۱)$ و نظایر اینها. لذا حاصل‌جمع ستون‌ها برابر است با:

$$(۸+۷+\cdots+۱)(۸+۷+\cdots+۱) = (۸+۷+\cdots+۱)^{۲}$$

این نتیجه مؤید حدسیه‌ایســـت که دانش‌آموزان پیش از این ســـاخته بودند، به هنگامی‌که کادرهای شطرنجی ۱×۱، ۲×۲، ۳×۳ و ۴×۴ را بررســـی می‌کردند و بدین‌طریق فرصتی به‌دســـت آمـــده که طی آن ملاحظه می‌کنند که:

چگونه یک راهبرد می‌تواند بر نتیجه‌ای که از روش دیگر حاصل شـــده اســـت نورافشانی کند. همچنین وقتی الگو به‌دســـت آمد و ظاهر گردید، دانش‌آموزان می‌بایســـت تشویق شوند تا نتایجشان را مجرد کرده و به حالت کلی‌تر تعمیم دهند. برای مثال، باید قادر باشـــند تا تعداد مســـتطیل‌های یک کادر $n \times m$ را حدسیه‌ســـازی کرده و عبارت $(۱+۲+\cdots+n)(۱+۲+\cdots+m)$ را به‌دست آورند. بـــا ارتبـــاط با کادرهای دیگر قبلـــی در باب حاصل جمع اعداد طبیعی متوالی، باید قادر باشـــند این عبارات را به‌صورت $\frac{n(n+۱)(m)(m+۱)}{۴}$ درآورند.

۸×۸	۷×۸	۶×۸	۵×۸	۴×۸	۳×۸	۲×۸	۱×۸
۸×۷	۷×۷	۶×۷	۵×۷	۴×۷	۳×۷	۲×۷	۱×۷
۸×۶	۷×۶	۶×۶	۵×۶	۴×۶	۳×۶	۲×۶	۱×۶
۸×۵	۷×۵	۶×۵	۵×۵	۴×۵	۳×۵	۲×۵	۱×۵
۸×۴	۷×۴	۶×۴	۵×۴	۴×۴	۳×۴	۲×۴	۱×۴
۸×۳	۷×۳	۶×۳	۵×۳	۴×۳	۳×۳	۲×۳	۱×۳
۸×۲	۷×۲	۶×۲	۵×۲	۴×۲	۳×۲	۲×۲	۱×۲
۸×۱	۷×۱	۶×۱	۵×۱	۴×۱	۳×۱	۲×۱	۱×۱

تعداد مستطیل‌های موجود در یک صفحه شطرنجی

روش‌های دیگر راهیابی نیز ممکن است مفید افتد. برخی از دانشجویان ممکن است دریابند که هر مستطیل در کادر شـطرنجی ۸×۸ به‌وسیله خطوطی که مرزهای بالایی و پایین آن (به تعداد $\binom{۹}{۲}$ انتخاب وجود دارد) و نیز به‌وسـیله خطوطی که مرزهای چپ و راست آن‌را محدود می‌کنند (آن نیز $\binom{۹}{۲}$ انتخاب دارد) مشخص و تعیین می‌گردد. بنابراین به تعداد $\binom{۹}{۲}\binom{۹}{۲}$ مستطیل در چنین صفحه شطرنجی ۸×۸ وجود دارد.

لذا، این مسـأله به دانش‌آموزان فرصت‌هایی می‌دهد تا روش‌های شـمارش خود را مرور کرده و به‌کار گرفته و همچنین توانایی خود را در به‌کارگیری دانش قبلی خود به منصه ظهور رسانده و به حل مسأله نایل شوند.

آیا مسأله بدین‌جا خاتمه می‌یابد؟

تنوعی از راه‌حل‌ها دارای اهمیت است.

حتی وقتی تنوعی از راه‌ها برای حل مسأله ارائه گردد، کار مسأله تمام نیست!

یک دبیر دانشـمند با یک کلاس پویا که با روش حل مسـأله کار می‌کنند، به سـرعت مسأله را می‌توانند باز تعریف و توسیع‌های جالبی از آن‌را ارائه دهند.

مسأله مشابه این مسأله در فضای سه‌بعدی (احجام) چگونه مسأله‌ای است؟

۶-۷مسأله‌های پروژه‌ای

۱. نقد و بررسی در رابطه با مسأله حل‌شده در متن فوق:

الف) وقتی راه‌حل $\binom{9}{2}\binom{9}{2}$ و یا در حالت کلی آن $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ برای مسأله وجود دارد که طبق اصل ضرب جواب مسأله را فوراً به‌دست می‌دهد چه ضرورتی به ساختار سیستماتیک جواب و حدسیه‌های مقدماتی برای شکل جواب است؟ نظر خود را با دوستان و مدرس خود مطرح کنید.

ب) در هر دو راه‌حل موجود در این مسأله، راهیابی‌های آموزشی را تجزیه و تحلیل کرده و ارتباط راه‌حل سیستماتیک را در ارتباط با قضیه سیلو (قضیه اول سیلو- ر.ک. [۷]) و برهان آن تبیین نمایید.

۲. سه عدد x , y و z را چنان پیدا کنید که در دستگاه معادلات زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} 9x-6y-10z=1 \\ -6x+4y+7z=0 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$$

هرگاه بخواهید این مسأله را حل کنید، کدامیک از سه مسأله زیر که تعمیم‌هایی از این مسأله‌اند، به شما کمک بیشتری می‌کند، (i)، (ii) و یا (iii)؟

(i) سه مجهول را از یک دستگاه سه معادله می‌یابیم.

(ii) سه مجهول را از یک دستگاه سه معادله می‌یابیم که دو تای معادلات نخست آن خطی و سومی درجه دوم باشد.

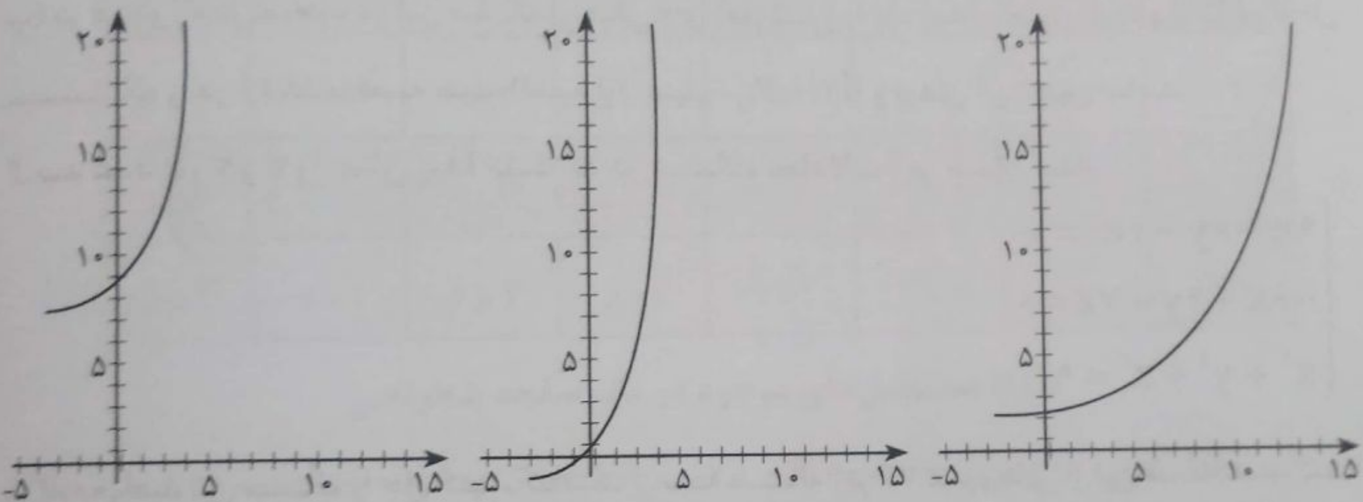
(iii) n مجهول را از یک دستگاه n معادله می‌یابیم که $n-1$ معادله نخست آن خطی باشند.

۳. (نقش کامپیوتر در آموزش و یادگیری ریاضیات). گفته شده است که مفهوم تابع گسترده‌ترین مفهوم در سرتاسر ریاضیات است. دانش‌آموزان دبیرستانی باید این فرصت را داشته باشند تا با کمک کامپیوتر و یا یک ماشین‌حساب مناسب و استفاده از نرم‌افزارهای آموزشی نظیر (CAS) سیستم‌های جبری کامپیوتری به مطالعه و بررسی توابع، کلاسه کردن آنها و رؤیت رفتار آنها بپردازند. برای مثال باید یاد بگیرند که تابع $f(x)=x^2-2x-3$ یک تابع درجه دوم است که نمودار آن یک سهمی است و نمودار آن رو به بالا باز می‌شود زیرا ضریب x^2 مثبت است.

با استفاده از نرم‌افزار یاد شده به‌آسانی می‌توانند تأثیرات پارامترها را در رفتار توابع مشاهده کنند. برای نمونه، بررسی توابع به فرم $f(x)=ax^2+bx+c$ منجر به نتایج جالبی می‌شود.

نتایج تغییرات پارامترهای a و c به‌آسانی در نمودار توابع مشاهده می‌شود. به‌علاوه وقتی b تغییر می‌کند مکان رأس سهمی‌ها خود یک سهمی می‌سازد. (چرا؟)

دانش‌آموزان در این مقطع باید دریابند که چگونه توابع کلاسه و رده‌بندی می‌شوند. برای مثال توابع خطی، توابع درجه دوم و توابع نمایی مفهوم‌سازی می‌شوند زیرا همه توابع در هر یک از این رده‌ها دارای ویژگی‌های مشترکی هستند. برای مثال، نمودارهای سه توابع نمایی به فرم $f(x) = a \cdot b^x + c$ با $a > ۰$ و $b < ۱$ در شکل زیر ارائه شده است.



$g(x) = ۳ \times ۲^x + ۴$ $\qquad h(x) = ۲ \times ۳^x - ۱$ $\qquad k(x) = ۲ \times ۱/۱^x$

دبیران برای کمک به دانشجویان به‌منظور توصیف مشخصات این سه نمودار چه پرسش‌هایی را می‌توانند مطرح کنند؟

- برای مقادیر بزرگ x چه اتفاقی برای این توابع می‌افتد؟
- برای مقادیر بزرگ اما منفی x چطور؟
- این توابع در کجا محور x را قطع می‌کنند؟

یک دانش‌آموز پاسخ می‌دهد که وقتی x با مقادیر مثبت بزرگ می‌شود هر سه این توابع به‌سرعت افزایش می‌یابند.

- وقتی $a < ۰$ و $۰ < b < ۱$ چه اتفاقی می‌افتد؟

دانش‌آموزان باید دریابند که تغییر در علامت a منجر به قرینه شدن نمودار نسبت به محور افقی می‌شود. در حالی‌که تغییر b به $\frac{1}{b}$ منجر به انعکاس (تقارن) نمودار نسبت به محور y می‌گردد. اما شکل نمودارها محفوظ می‌ماند. باید دانش‌آموزان چنان راهنمایی شوند تا ویژگی‌های مشترک همه توابع نمایی را مشاهده کنند.

اکنون سناریو (طرحی) بنویسید که طی آن بتوانید بحث توابع نمایی را به‌صورت شهودی و فعال و با استفاده از نرم‌افزارهایی که در مدرسه موجود است تدریس کنید. با دیگر همکاران خود مطرح کرده و چنانچه مقدور باشد طرح خود را به‌صورت گروهی تدوین نمایید.

مراجع

فارسی

۱. بیژن‌زاده، محمدحسن؛ نگرشی بر فلسفه و آموزش ریاضیات، رشد آموزش ریاضی، ش ۱، تهران ۱۳۶۳.

۲. بیژن‌زاده، محمدحسن؛ رشد تفکر ریاضی، رشد آموزش ریاضی، ش ۱۸، تهران ۱۳۶۷.

۳. بیژن‌زاده، محمدحسن؛ راهنمای ریاضی سوم دبستان، وزارت آموزش و پرورش، تهران ۱۳۶۱.

۴. ایرانمنش، علی؛ شاهورانی، احمد و دیگران، ریاضیات ۲. نظری فنی و حرفه‌ای، وزارت آموزش و پرورش، تهران ۱۳۸۸.

۵. بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر و دیگران، ریاضیات ۱، وزارت آموزش و پرورش، تهران ۱۳۸۸.

۶. مفیدی، دکتر فرخنده؛ آموزش و پرورش پیش‌دبستانی و دبستانی، دانشگاه پیام نور تهران، ۱۳۷۲.

۷. الدرمن، والترا، آشنایی با نظریه گروه‌ها، ترجمه دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۷.

۸. مدقالچی، دکتر علیرضا؛ آنالیز ریاضی ۲، دانشگاه پیام نور ۱۳۸۸.

۹. رستمی، محمدهاشم؛ هندسه؛ انتشارات مدرسه

انگلیسی

9. Capel. Suzan; Leask, Marilyn, and Turner, Tony, Learning to teach in the secondary schools, Rout ledge, London and NewYork, 1995.

10. Einestein, A; Remarks on Bertrand Russell, Theory of knowledge, North-western university press, 1944.

11. Neale, D.C. The Role of attitudes in learning Mathematics, arithmetic teacher 16, 631-640, 1969.

12. Ma, x; Xu, J. The casual ordering of Mathematics anxiety and Mathematics achievement; J. of adolescence, 27, 165- 179, Elsevier pub. www. Elsevier. Com. 2014.

13. Mohammad, Yosof; Tall, D. Changing attitudes Univ. Maths Through Problem solving, educational studies Maths 37 kluwer academic pub, 1999.

14. Quinn, B; Jadra, A.D. Casual Relationship Between attitudes and achievement for elementary maths and reading. J. of Educational research. 80, 366-372. 1987.

15. www. Mathworld.wolfram.com