چگونه مسئله را حل کنیم

نوشته جورج پولیا

ترجمه احمد آرام

sinβ=?

چگونه مسئله را حل کنیم

نوشتهٔ جورج پولیا

ترجمهٔ احمد آرام

این کتاب ترجمه‌ای است از:

HOW TO SOLVE IT

BY

G.POLYA

چگونه مسئله را حل کنیم

نویسنده: جورج پولیا

مترجم: احمد آرام

چاپ اول- پاییز ۱۳۶۶- پنج هزارنسخه

چاپ و صحافی: مؤسسه کیهان

بسم اللّه الرّحمن الرّحیم

سخنی از مترجم

نزدیک شصت سال پیش از این که در دبیرستان شاهپور شیراز به تدریس فیزیک اشتغال داشتم، نخستین کتاب فیزیک فارسی را برای تدریس در کلاسهای ششم متوسّطه به چاپ رسانیدم و انتشار دادم، و در ضمیمهٔ آن رساله‌ای را از زبان فرانسه دربارهٔ چگونگی حلّ مسائل فیزیک ترجمه و به آن کتاب ضمیمه کردم. با این سابقهٔ ذهنی، روزی که در بهارسال ۱۳۶۳ هجری شمسی درشهرسان‌ماتئو،کالیفرنیا، به کتابی به نام انگلیسی How To Solve It یعنی «چگونه آن را حل کنیم»- که مقصود حلّ مسئله است برخوردم، در پیرانه سر خواستار بازگشت به حوادث جوانی شدم و عزم بر آن جزم کردم که این کتاب را که به راستی حاوی راهنماییهای بسیار سودمندی برای حلّ مسائل ریاضی و جز آن است و یکسان برای کار استاد و شاگرد هر دو مفید فایده است، به فارسی ترجمه کنم و تنها تغییری که در آن دادم قرار دادن کلمهٔ «مسئله» به جای «آن» در عنوان کتاب است که روشنتر مقصود از نگارش کتاب را معرّفی می‌کند.

امید دارم همان گونه که من، بنا بر عادت جاری خودم که پیش از آغاز کردن به ترجمهٔ هر کتاب یک بار آن را می‌خوانم، در ضمن این خواندن به فواید فراوان آن متوجّه شدم و به همین جهت به ترجمهٔ آن پرداختم، خواننده نیز با خواندن اجمالی کتاب چنان احساس کند که این اثر حقیقتاً برای تمرین دادن دانشجویان به راهیابیهای گوناگون برای حلّ مسائل مختلف سودمند و کارساز است که در این صورت بنده هم در واقع به پاداش شایستهٔ خود رسیده‌ام.

در اینجا اعتراف به یک نکته ضرورت دارد. چون ترجمهٔ کتاب را از آنجا که پس از پایان قسمتهای مختلف مقدّمه که در اصل کتاب با اعداد رومی شماره‌گذاری شده آغاز کردم، کیفیتی پیش آمد که ناگزیرتغییر مختصری در بعضی از قسمتها را سبب شد. پنج قسمت کتاب را که اکنون به صورت پنج فصل درآمده، در ابتدا به صورت پنج «بخش» ترجمه کرده بودم، ولی چون غافلانه بیست قسمت بخش اوّل کتاب را که عنوان «در کلاس درس» دارد و در اصل انگلیسی هر قسمت با لفظ Section مشخّص شده نیز به لفظ «بخش» ترجمه کرده بودم، در مرور مجدّد ترجمه عنوان «بخش» را برای این بیست قسمت نگاه داشتم و برای پنج بخش کتاب عنوان پنج فصل را برگزیدم. و باید بگویم که این در حقیقت مجازاتی برای خود من بود که از آنچه به دیگران توصیه می‌کنم که کتاب را از آغاز آن ترجمه کنند و خود نیز همیشه چنین می‌کرده‌ام، تخطّی کرده‌ام.

پایان یافتن ترجمهٔ کتاب در شهر سان‌ماتئو در خانهٔ دختر و دامادم که هر دو در کالج سان‌ماتئو تدریس می‌کنند مصادف با روزی شد که در اخبار تلویزیونی شبانه با تجلیل از مرگ دکتر پولیا مؤلّف کتاب حاضر یاد شد و فردای آن روز روزنامهٔ عمدهٔ سان‌فرانسیسکو مقاله‌ای به عنوان یادبود این دانشمند منتشر کرد که ترجمهٔ آن بلافاصله به نظر خوانندگان می‌رسد.

* * *

جورج پولیا، ریاضیدان نامدار بین‌المللی و نویسندهٔ پرفروش‌ترین کتابهای ریاضی، دیروز در پالوآلتو از دنیا رفت. وی ۹۸ سال داشت و پس از یک بیماری طولانی وفات کرد.

پروفسور پُولیا، استاد بازنشستهٔ دانشگاه استانفورد، نویسندهٔ بیش از ۲۵۰ مقاله و رساله دربارهٔ حساب احتمالات و آنالیز کومپلکس و مسائل دیگر و نیز دربارهٔ اختراع ریاضی و روش تدریس ریاضیّات است. احتمالاً بهترین کتاب وی **چگونه آن را حل کنیم** است که نخستین بار در ۱۹۴۵ به چاپ رسید و تاکنون به ۱۵ زبان ترجمه شده است.

وی را پدر و مؤسّس تأکید جدید دربارهٔ امر حلّ کردن مسئله و تأثیر عظیم آن در آموزش علوم ریاضی خوانده‌اند. دکتر پُولیا به سال ۱۸۸۷ در بوداپست به دنیا آمد. مادرش اصرار داشت که وی برای آنکه همچون پدرش بتواند حرفه وکالت دعاوی را در دادگستری اختیار کند، به مدرسهٔ حقوق برود. گفتهٔ خود وی در مصاحبه‌ای که همین اواخر از وی انتشار یافت چنین است: «به تحصیل حقوق آغاز کردم، ولی بیش از یک

نیمسال نتوانستم آن را ادامه بدهم. سپس مدّت دو سال به آموختن زبان و ادبیّات پرداختم. حقیقت آن است که بیشتر به فیزیک و فلسفه علاقه‌مند بودم و دربارهٔ آنها فکر می‌کردم. سپس دریافتم که استعداد من برای فیزیک به اندازهٔ کافی خوب نیست، و برای فلسفه بسیار خوب است، و برای ریاضیّات حالت متوسّط دارد.»

پس از دریافت درجهٔ دکتری از دانشگاه بوداپست در ۱۹۱۲، دکتر پُولیا عازم دانشگاه گوتینگن سوئد و سپس دانشگاه پاریس شد. سرانجام به خدمت آموزشی در مؤسّسهٔ تکنولوژی اتحادی سوئیس درآمد و این منصب را مدّت ۲۶ سال داشت.

هنگامی که دکتر پُولیا در سوئیس به کار تدریس اشتغال داشت، به دستیاری گابُور سِگُو ریاضیدان مجارستانی به نوشتن کتاب **مسائل و قضایای آنالیز** پرداخت که محتملاً مهمترین اثر او به شمار می‌رود و هنوز به صورتی گسترده منتشر می‌شود و مشتمل بر بیش از ۱۶۰۰ مسئلهٔ ریاضی و جوابهای آنها و به صورتی تنظیم یافته است که به دانشجوی ریاضی در ضمن مراجعهٔ به این کتاب اصول تحقیق و پژوهش ریاضی را تعلیم می‌کند.

چندین سال پس از بازنشسته شدن در ۱۹۵۳، دکتر پُولیا در یک انجمن معلّمان در ضمن سخنرانی خود چنین گفت: «هدف آموزشگاه باید آن باشد که منابع درونی کودک را پرورش دهد، نه این که تنها واقعیّتها را به او تسلیم کند. مرد عامی نمی‌داند که ریاضیّات دربارهٔ چه چیز بحث می‌کند و به چه کار می‌خورد. اگر درس ریاضی خوب تدریس شود، بسیار دلپسند و جالب توجّه خواهد شد. ریاضیّات معمولاً بد تدریس می‌شود!»

در زادروز ۷۵ سالگی وی، دانشگاه استانفورد برای قدردانی از وی، تالاری از شعبهٔ اطّلاعات فنّاوری کومپیوتری را به نام او نامگذاری کرد.

علاوه بر درجات دکتری افتخاری که از دانشگاههای آلبرتا وویسکونسین و واترلو و انستیتوی تکنولوژی اتّحادی سوئیس به پروفسور پُولیا داده شده، وی همچنین عضویّت فرهنگستان علوم فرانسه و فرهنگستان مجارستان و فرهنگستان علم و هنر کشورهای متّحد امریکا و نیز فرهنگستان ملّی علوم همین کشور را داشته و عضو افتخاری شورای انجمن ریاضیدانان فرانسوی نیز بوده است.

سان ماتئو، کالیفورنیا، تابستان ۱۳٦٤ خورشیدی

احمد آرام

از دیباچهٔ چاپ اوّل

یک کشور بزرگ سبب حل شدن یک مسئلهٔ بزرگ می‌شود، ولی در حلّ هر مسئله حبّه‌ای از اکتشاف وجود دارد. مسئلهٔ شما ممکن است چندان پیچیده نباشد، ولی اگر کنجکاوی شما را برانگیزد و ملکه‌های اختراع و اکتشاف شما را به کار وادارد، و اگر شما آن را با وسایل و تدابیر خود حل کنید، ممکن است از تنش و شادمانی حاصل از پیروزی در اکتشاف شاد شوید. چنین حال و تجربه در سالهای تجربه‌پذیری می‌تواند شوق و ذوقی برای کار عقلی و فکری پدید آورد و آثار خود را بر ذهن و روان و خصلت شخص در تمام عمر باقی گذارد.

بنابراین، معلّم ریاضیّات فرصت بزرگی در برابر خویش دارد. اگر وقت اختصاصی خود را به تمرین دادن شاگردان در عملیّات پیش پا افتاده بگذراند، علاقه و دلبستگی آنان را می‌کُشد، و مانع رشد و تکامل عقلی آنان می‌شود. و باید گفت فرصتی را که دراختیار داشته به صورت بدی مصرف کرده است. ولی اگر کنجکاوی دانشجویان را با مطرح کردن مسائلی متناسب با دانش و شناخت ایشان برانگیزد، و در حل کردن مسائل با طرح کردن پرسشهایی راهنما به یاری آنان برخیزد، می‌تواند ذوق و شوق و وسیله‌ای برای اندیشیدن مستقل در وجود ایشان پدید آورد.

همچنین دانشجویی که برنامهٔ دانشکدهٔ او مشتمل بر مقداری ریاضیّات است فرصتی خاص دراختیار دارد. ولی اگر او به ریاضیّات همچون وسیله‌ای برای گذراندن چند واحد امتحانی نظر کند و هر چه زودتر پس از پایان امتحان دانسته‌ها را از یاد ببرد، این فرصت را از دست داده است. و نیز ممکن است درآن صورت هم که دانشجو ذوق طبیعی برای درس ریاضی دارد از دست برود، بدان جهت که وی، همچون هر شخص دیگر، باید ذوقها و هنرمندیهای خود را کشف کند. اگر هرگز نان شیرینی دارای

تمشک نخورده و مزه آن را نچشیده باشد، چگونه می‌تواند آن را دوست بدارد. ولی باید برای دریافتن این که مسئلهٔ ریاضی همان اندازه ممکن است مایهٔ مسرّت خاطر باشد که حلّ یک جدول کلمات متقاطع چنین است، یا این که تمرین دماغی حلّ مسئله می‌تواند به اندازهٔ بازی تنیس لذّتبخش باشد، به کار انداختن تلاش و کوشش ضرورت دارد. اگر مزهٔ لذّت را در ریاضیّات بچشد، به آسانی آن را فراموش نخواهد کرد و سپس احتمال آن هست که ریاضیّات «چیزی» برای او بشود، کاری تفنّنی یا افزاری برای حرفهٔ او یا خود حرفهٔ وی، یا یک جاهطلبی و بلندپروازی بزرگ.

نویسنده زمانی را به یاد دارد که خود دانشجو بوده، آن هم دانشجویی بلندپرواز و مشتاقِ دست یافتن به مقداری فهم در ریاضی و فیزیک. به درسها و سخنرانیهایی گوش فرا می‌دادم، کتابها را مطالعه می‌کردم، راه‌حلها و واقعیّتهای عرضه شده را به خاطر می‌سپردم، ولی یک مطلب بود که مکرّر در مکرّر مایهٔ ناراحتی و پریشانخاطری من می‌شد: «آری، چنان می‌نماید که راه‌حل درست است و کار می‌کند، ولی چگونه باید چنین راه‌حلی را اختراع کرد؟ آری، این آزمایش ظاهراً به کار می‌خورد، و چنان می‌نماید که یک واقعیّت است، ولی مردمان چگونه می‌توانند چنین واقعیّتی را اکتشاف کنند؟ و من چگونه می‌توانم چنین چیزها را خودم اختراع یا اکتشاف کنم؟» امروز که نویسنده معلّم ریاضیّات در یک دانشگاه است، چنان می‌اندیشد یا امید دارد که بعضی از شاگردان مشتاقتر چنین پرسشهایی از او بکنند و او در آن بکوشد که وسیلهٔ خرسندی حسِّ کنجکاوی آنان را فراهم آورد. تلاش برای فهمیدن نه تنها حلّ این یا آن مسئله بلکه نیز انگیزه‌ها و روشهای حلّ مسئله، و کوشش برای بیان کردن این انگیزه‌ها و روشها برای دیگران، سرانجام مرا به نوشتن کتاب حاضر رهنمون شد. آرزومندم که این کتاب برای معلّمانی که می‌خواهند قابلیّت شاگردان خود را در حل کردن مسائل رشد دهند و تقویت کنند، و نیز برای دانشجویانی که خواستار تقویت کردن قابلیّتهای خویش هستند، سودمند واقع شود.

با آنکه در کتاب حاضر نیازمندیهای دانشجویان و استادان ریاضیّات مورد توجّه خاص بوده است، ممکن است این کتاب برای هر کس که به راههای اختراع و اکتشاف دلبستگی دارد سودمند و برانگیزندهٔ شوق و علاقه بوده باشد. چنین علاقه و دلبستگی ممکن است بیش از آن که شخصی بدون تفکر فرض می‌کند، گسترده و پردامنه باشد. جایی که در روزنامه‌ها و مجلّات برای درج کردن جدولهای کلمات متقاطع و معمّاهای دیگر به شیوه‌های گوناگون اختصاص یافته، آشکارا نشان می‌دهد که مردمان مقداری از وقت خود را برای حل کردن مسئله‌های غیر عملی مصرف می‌کنند. در آن سوی هوس حل کردن این یا آن مسئله که هیچ مزیّت مادّی با آن همراه نیست، یک کنجکاوی ژرفتر

و یک آرزو برای فهمیدن راهها و وسایل و تدبیرها و انگیزهها و روشهای حلّ مسئلهها وجود دارد.

صفحات آینده تا حدّی به صورت خلاصه نوشته شده، ولی تا سر حدّ امکان کوشیدهام که نوشتهها ساده باشد، و آنچه میخوانید بر پایهٔ تحقیقی طولانی و جدّی در راههای حلّ مسائل بنا شده است. این نوع کار و تحقیق که بعضی از مؤلّفان آن را به نام راهیابی (Heuristic) خواندهاند، این روزها رواج ندارد، ولی گذشتهای دراز داشته و شاید آیندهای دراز نیز در پی داشته باشد.

در ضمن بحث و تحقیق در روشهای حلّ مسائل، با چهرهٔ دیگری از ریاضیّات رو به رو میشویم. آری، ریاضیّات دو چهره دارد، علم دقیق اوقلیدس است، ولی چیزی دیگر نیز هست. ریاضیّات بدان گونه که از راه اوقلیدسی معرّفی میشود، علمی منظّم و قیاسی یا استنتاجی است، ولی ریاضیّات در حال ساخته شدن همچون علمی آزمایشی و استقرائی به نظر میرسد. هر دو جنبه به اندازهٔ خود ریاضیّات عمر دارد و قدیمی است؛ ولی جنبهٔ دوم از یک لحاظ جدید است، ریاضیّات در شرف تکوین واختراع، هرگز پیش از عرضه شدن درست با این روش به دانشجویان، یا به خود استاد، یا به عامهٔ مردم، وجود نداشته است.

موضوع راهیابی پیوندهای چند جانبه دارد، ریاضیدانان و منطقیان و روانشناسان وکارشناسان تعلیم وتربیت و حتّیٰ فیلسوفان ممکن است مدّعی آن شوند که قسمتهایی از راهیابی به قلمرو خاصّ ایشان تعلّق دارد. نویسندهٔ کتاب که کاملاً از امکان خردهگیری از نواحی مختلف آگاه است و از محدودیّتهای خود خبر دارد، تنها مدّعی یک چیز است، و آن این که: از مقداری تجربه و آزمودگی در حلّ مسائل وتعلیم ریاضیّات در سطوح مختلف برخوردار است.

موضوع به صورتی کاملتر و در کتاب گستردهتری از مؤلّف که در شرف اتمام است، مورد بحث قرار گرفته است.

دانشگاه استانفورد، اوّل اوت ۱۹۴۴

از دیباچهٔ چاپ هفتم

با کمال شادمانی باید بگویم که برای انجام دادن دست کم قسمتی از وعدهٔ داده شده در دیباچهٔ چاپ نخستین به کامیابی رسیده‌ام: دو جلد کتاب **استقراء و تمثیل در ریاضیّات**[1] **والگوهای استنتاج موجّه‌نما**[2] که روی هم رفته کار جدید مرا به نام **ریاضیّات واستدلال موجّه‌نما**[3] تشکیل می‌دهد، ادامهٔ خطّ تفکّری است که در **چگونه مسئله را حل کنیم** آغاز شده بوده است.

زوریخ، ۳۵ اوت ۱۹۵٤

1.George Polia, **Induction and Analogy in Mathematics.**

2. G. Polia, **Patterns of Plausible Inference.**

3. **Mathematics and Plausible Reasoning.**

دیباچهٔ ویرایش دوم

در این ویرایش جدید دوم، علاوه بر اصلاحات کوچک، یک قسمت چهارم به نام «مسائل، اشاره‌ها، وراه‌حلها» بر متن کتاب افزوده شده است.

در آن ضمن که کتاب برای چاپ آماده می‌شد، مقاله‌ای انتشار یافت (ادارهٔ آزمونهای تربیتی،پرینستون، نیوجرزی، رجوع کنید به تایم، ۱۸ ژوئن ۱۹۵۶) و در آن ملاحظاتی وابسته و مقتضی صورتبندی شده بود که برای کسانی که در کار تربیت واردند تازگی نداشت، ولی وقت آن رسیده بود که برای عامّهٔ مردم صورتبندی شود-: «... ریاضیّات این افتخار مشکوک را دارد که در برنامهٔ آموزشگاهها موضوع کمتر جالب توجّه همگان است...معلّمان آینده از مدارس ابتدایی عبور می‌کنند برای آنکه از ریاضیّات بیزار شوند... و سپس به مدارس ابتدایی باز می‌گردند تا به نسل تازه‌ای نفرت داشتن از ریاضیّات را تعلیم دهند.»

امیدوارم که ویرایش حاضر، که برای توزیع گسترده‌تر در نظر گرفته شده، بعضی از خوانندگان خود را متقاعد سازد که ریاضیّات ، علاوه بر این که گذرگاهی ضروری برای کارهای مهندسی و دست یافتن به شناخت علمی است، مایهٔ شادی و لذّت باشد وچشم اندازی برای فعّالیّت عقلی از درجهٔ بالا به وجود آورد.

زوریخ، ۳۰ ژوئن ۱۹۵۶

فهرست

عنوان	صفحه
۱۰. مثال	۱۱
۱۱. اجرای نقشه	۱۳
۱۲. مثال	۱٤
۱۳. به پس نگریستن	۱۵
۱٤. مثال	۱٦
۱۵. برداشتهای گوناگون	۱۹
۱٦. روش سؤال کردن معلّم	۲۰
۱۷. پرسشهای خوب وپرسشهای بد	۲۲

مثالهای بیشتر

فصل دوم. چگونه مسئله را حل کنیم

فصل سوم. واژه‌نامهٔ کوچک راهیابی

عنوان	صفحه
دکارت	۱۵۶
راهیابی	۱۵۷
راهیابی نوین	۱۵۷
ریاضیدان آینده	۱۶۱
شرط	۱۶۲
شکل آن را بکشید	۱۶۳
علامتگذاری	۱۶۳
عناصر معاون	۱۶۹
فضلفروشی و مهارت	۱۷۲
قضیّهٔ فرعی	۱۷۳
قضیّهٔ معاون	۱۷۴
قواعد اکتشاف	۱۷۴
قواعد تعلیم	۱۷۵
قواعد سبک	۱۷۵
کار ضمیر ناخودآگاه	۱۷۵
کارکردن رو به عقب	۱۷۷
لایبنیتس	۱۸۳
متناقض	۱۸۳
مجهول چیست	۱۸۳
محالنمای مخترع	۱۸۴
مسائل عملی	۱۸۵
مسائل یافتنی، مسائل ثابت کردنی	۱۸۹
مسئلهٔ عادی	۱۹۱
مسئلهٔ کومکی	۱۹۲
معمّاها	۱۹۸
نشانه‌های پیشرفت	۱۹۹

فصل چهارم. مسائل، اشاره‌ها، راه‌حلها

مسئله‌ها	۲۱۲

عنوان	صفحه

چگونه مسئله را حل کنیم؟

فهمیدن مسئله

اول باید مسئله را بفهمید.

مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا تحقّق یافتن شرط مسئله امکانپذیر است؟ آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟ یا این که کافی نیست؟ یا حشو وزاید است؟ یا متناقض است؟

شکلی رسم کنید. علامتهای مناسب را به کار ببرید.

قسمتهای مختلف شرط را از هم جدا کنید. آیا می‌توانید آنها را برروی کاغذ بیاورید ؟

طرح نقشه

دوم ارتباط میان داده‌ها ومجهول راپیدا کنید. ممکن است مجبور شوید که در صورت یافت نشدن ارتباط مستقیمی میان داده‌ها و مجهول، مسئله‌های کمکی در نظر بگیرید. باید سرانجام یک نقشه برای حلّ مسئله طرح کنید.

آیا آن را پیشتر دیده بودید؟ آیا همین مسئله را به صورت دیگر دیده‌اید؟ **آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟** آیا از قضیّه‌ای که بتواند سودمند واقع شود آگاهید؟

به مجهول نگاه کنید! و بکوشید تا دربارهٔ مسئله‌ای بیندیشید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته باشد.

در این جا مسئله‌ای وابسته به مسئلهٔ شما وجوددارد که پیشتر حل شده است. آیا می‌توانید آن را به کار ببرید؟ آیا می‌توانید روش آن را به کار ببرید؟ آیا باید یک عنصر کمکی را وارد کنید تا به کاربردن آن را ممکن سازد؟ آیا می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟ آیا می‌توانید آن را به صورتی دیگر بیان کنید؟ به تعریفها رجوع کنید.

اگر نمی‌توانید مسئله طرح شده را حل کنید، نخست به حل کردن مسئله‌ای وابستهٔ به آن بپردازید. آیا می‌توانید مسئلهٔ وابسته‌ای را که بیشتر در دسترس باشد تخیّل کنید؟

یا یک مسئلهٔ کلّیتر؟ یا یک مسئلهٔ خاصتر؟ یا یک مسئلهٔ مشابه؟ آیا می‌توانید یک قسمت از مسئله را حل کنید؟ تنها یک جزء از شرط را نگاه دارید و باقی آن را کنار بگذارید، در این صورت مجهول تا چه اندازه معلوم می‌شود و چگونه تغییر می‌کند؟ آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟ آیا داده‌های دیگری به فکر شما خطور می‌کند که بتواند برای به دست آوردن مجهول سودمند باشد؟ آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها یا در صورت لزوم هر دو را چنان تغییر دهید که مجهول تازه و داده‌های تازه به یکدیگر نزدیکتر باشند؟

آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را به کار بردید؟ آیا همهٔ مفاهیم اصلی مندرج در مسئله را بکار بردید؟

اجرای نقشه

سوم اجرای نقشه.

در ضمن اجرای نقشهٔ حلّ مسئله، **هرگام را که برمی‌دارید وارسی و امتحان کنید**، آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گامِ برداشته شده درست بوده است؟ آیا می‌توانید درست بودن آن را ثابت کنید؟

به عقب نگاه کردن

چهارم
امتحان کردن جوابی که به دست آمده.

آیا می‌توانید **نتیجه را وارسی کنید؟**
آیا می‌توانید نتیجه را از راهی دیگر به دست آورید؟ آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در مسئله‌ای دیگر به کار برید؟

مقدّمه

ملاحظاتی که پس از این خواهد آمد مربوط به پرسشها وپیشنهادهایی است که در دو صفحهٔ پیش زیر عنوان «چگونه مسئله را حل کنیم» آمده است. هر پرسش یا پیشنهادی از این فهرست که پس از این در متن کتاب چاپ شود با حروف سیاه خواهد بود وبه همهٔ این فهرست به صورت «فهرست» یا «فهرست ما» اشاره خواهد شد.

در صفحات بعد، از هدف فهرست سخن خواهیم گفت وفایده وکاربرد عملی آن را با آوردن مثالهایی توضیح خواهیم داد ومفاهیم وعملیّات فکری و عقلی آن را بیان خواهیم کرد. به عنوان توضیحی مقدّماتی، اکنون این مطلب را گوشزد می‌کنیم که: اگر، با کاربرد درست وشایسته مخاطب این پرسشها وپیشنهادها را شخص خودتان قرار دهید، پرسشها وپاسخها می‌توانند در حلّ مسائل یار ومددکار شما باشند. واگر، با کار برد درست وشایسته، همین پرسشها وپیشنهادها را برای دانشجویان خود طرح کنید، به آنان در حلّ مسائلی که در دست دارند کمک کرده‌اید.

این کتاب به چهار فصل تقسیم شده است.

عنوان فصل اوّل «درکلاس درس» است. مشتمل است بربیست بخش.درمتن کتاب به هریک از این بخشها باآوردن شمارهٔ آنها که باحروف سیاه چاپ شده (مثلاً «بخش ۷») اشاره خواهیم کرد. دربخشهای از ۱ تا ۵ از هدف فهرست به صورت کلّی بحث کرده‌ایم. بخشهای ٦ تا ۱۷ مخصوص توضیح «تقسیمات عمده» و «پرسشهای عمدهٔ» فهرست است و درآنها از نخستین مثال عملی بحث می‌شود. دربخشهای ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ «مثالهای بیشتر» آمده است.

عنوان فصل بسیار کوتاه دوم «چگونه مسئله را حل کنیم» است. به صورت محاوره نوشته شده، دراین فصل،استادی تصوّری به پرسشهای کوتاه شاگردی تصوّری پاسخ می‌دهد.

فصل سوم و بسیار گسترده‌ترِ کتاب «واژه نامهٔ کوچک راهیابی» است؛ به آن زیر عنوان «واژه نامه» اشاره خواهیم کرد. مشتمل است برشصت و هفت مقاله یا مادّه که به ترتیب الفبایی مرتّب شده است. مثلاً معنی کلمهٔ راهیابی (که با حروف سیاه حروفچینی شده) در مقالهٔ با این عنوان در صفحهٔ ۱۵۷ آمده است. هنگامی که در متن کتاب به چنین مقاله‌ای اشاره کرده باشیم، نام آن مادّه نیز باهمین حروف سیاه یادشده در متن آمده است. بعضی از قسمتهای معدودی از مقالات جنبهٔ فنّی بیشتر دارد، این گونه مطالب را درمیان دو قلّاب آورده‌ایم. بعضی از مقالات ارتباطی بسیار نزدیک بافصل اوّل دارد که مطالب آن را تجسّم بیشتر می‌بخشد و درخصوص آن توضیحات بیشتر می‌دهد. بعضی دیگر به دورتر از هدف فصل اوّل ارتباط پیدا می کند و زمینهٔ آن را مورد بحث قرار می‌دهد. یک مقالهٔ کلیدی دربارهٔ **راهیابی نوین** آمده است. درآن ارتباط میان مقالات و طرح کلّی واژه نامه توضیح داده شده است،همچنین‌مشتمل برتوجیهاتی برای به‌دست‌آوردن اطّلاعاتی‌دربارهٔ مواد خاصّ فهرست است. باید تأکید کنیم که در آن جا یک نقشهٔ کلّی و نوعی وحدت وجود دارد، بدان جهت که مقالات واژه‌نامه تنوّع ظاهری فراوانی را نمایش می‌دهد. در مقالاتی درازتر به بحث اصولی و منظّم ولی فشرده در بارهٔ بعضی از موضوعات کلّی پرداخته‌ایم. مقالاتی دیگر متضمّن شرح و تفسیرهای خاصّ است، و بعضی جنبهٔ ارجاعی دارد، یا از معلومات تاریخی بحث می کند، یا نقلها و ضرب‌المثلها و حتّیٰ مطایبه‌ها است.

واژه‌نامه نباید به سرعت خوانده شود ؛ متن آن غالباً فشرده و موجز و تاحدّی ظریف و دقیق است. خواننده می‌تواند برای کسب اطّلاعِ در بارهٔ نکات خاصّ به واژه‌نامه مراجعه کند. اگر این نکات از تجربهٔ خود وی با مسائل حل کردنی خودش یا شاگردانش پیداشده باشد، خواندن واژه‌نامه احتمال سودمندی بیشتردارد.

عنوان فصل چهارم «مسائل، اشاره‌ها، و راه‌حلها» است. چندین مسئله که خاطرپسند خوانندهٔ بلندپروازتراست در آن عرضه شده. به دنبال هرمسئله (در فاصله‌ای مناسب) «اشاره»ای آمده است که راهی برای حلّ آن را نشان می‌دهد، و توضیح کاملتر در «راه حلها» می‌آید.

مکرّر به «استاد» و «دانشجو» (یا معلّم و شاگرد) اشاره کرده‌ایم. باید توجّه داشت

که «دانشجو» ممکن است در یک دانشکده مشغول تحصیل باشد یا در یک دبیرستان، یا هر کس دیگری باشد که به آموختن ریاضیّات اشتغال دارد. نیز «استاد» ممکن است در دانشگاه تدریس کند یا در دبیرستان، یا هر کسی باشد که علاقه‌مند به تعلیم ریاضیّات به دیگران است. نویسنده برحسب موقع وضعیّت را گاه از دیدگاه شاگردی در نظرمی‌گیرد و گاه از دیدگاه استادی (این آخری در فصل اوّل غلبه دارد). ولی در اغلب اوقات (مخصوصاً در فصل سوم) دید گاه عبارت از دیدگاه کسی است که نه دانشجو است ونه استاد بلکه کسی است که برای حلّ مسئله‌ای که در برابر خود دارد نگران است.

فصل اول: در کلاس درس

هدف

۱. کمک کردن به دانشجو. یکی از مهمترین هدفهای استاد (یادبیر یا آموزگار ویامعلّم) کمک کردن به شاگردان (یا نوآموزان یا دا نشا موزان یا دانشجویان) است. این وظیفه چندان آسان هم نیست، نیازمند زمان وتمرین ودلبستگی وپیروی از اصول اساسی است.

دانشجو می‌تواند از کار مستقلّ وشخصی خود تا آنجا که ممکن است بهره‌برداری کند وکارازموده شود. ولی اگر او را بامسئله‌ای که باید حل کند تنها بگذارند وبه او کمک نکنند یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند. واگر معلّم بیش از آن اندازه که لازم است به یاری شاگردِ خود برخیزد، دیگر کاری برای دانشجو باقی نمی‌ماند. استاد باید کمک کند، ولی نه بسیار زیاد ونه بسیار کم، تا چنان باشد که برای دانشجو **سهم معقولی از کاری که باید انجام دهد برجای بماند.**

اگر دانشجو شایستگی انجام دادن کارفراوان ندارد، کار استاد باید چندان باشد که دست‌کم آن اندازه تلاش برای دانشجو باقی بماند که تا حدّی اندیشهٔ مستقل بودن در عمل را احساس کند. برای این منظور، یاری استاد باید به صورت ناآشکار وغیرناخوانده باشد.

ولی بهترین راه آن است که کمک معلّم به شاگرد به صورتی طبیعی انجام پذیرد. معلّم باید خود را در جای شاگرد قرار دهد ووضع او را احساس کند ودر آن بکوشد که از آنچه در ذهن دانشجو می‌گذرد آگاه شود، وپرسشی را مطرح کند یا راهی را نشان دهد که **می‌توانسته است به نظر خود دانشجو برسد.**

۲. پرسشها وتوصیه‌ها وعملیات ذهنی. برای یاری رساندن مؤثّر ولی غیر

ناخوانده وطبیعی، کار معلّم به آنجا می‌انجامد که سؤالاتی را تکرار کند وگامهایی را که باید برداشته شود به صورت مکرّر خاطرنشان سازد. بدین ترتیب، در حلّ مسائل بیشمار می‌بایستی به طرح پرسشهایی از این‌گونه اقدام شود: **مجهول چیست؟** امکان آن هست که الفاظ این پرسش را تغییر دهیم و به طرح آن به صورتهای دیگر بپردازیم: چه چیز خواسته شده است؟ چه چیز را می‌خواهید پیدا کنید؟ به دنبال چه چیز می‌گردید؟ هدف از طرح این پرسشها متمرکز ساختن توجّه دانشجو بر روی مجهول و مطلوب مسئله است. گاه همین نتیجه را به صورتی طبیعیتر با یک پیشنهاد و تذکار به دست می‌آوریم: **به مجهول نگاه کن!** هدف پرسش و پیشنهاد هر دو یکی است، کارآنها برانگیختن یک عمل ذهنی است.

به نظر مؤلّف چنان می‌رسد که جمع‌کردن و گروهبندی پرسشها و پیشنهادهایی که هنگام بحث دربارهٔ مسائل حل‌کردنی طرح می‌شود، کاری ارزشمند است. فهرستی که آن را مورد بحث قرار خواهیم داد، مشتمل بر سؤالات و پیشنهادهایی از این قبیل است که با دقّت گردآوری شده و تنظیم یافته است، و نیز برای حل‌کنندهٔ مسئله‌ای که خود به تنهایی عمل می‌کند سودمند واقع می‌شود. اگر خواننده به اندازهٔ کافی با این فهرست آشنا شود و بتواند منظور از پیشنهادها را بفهمد، متوجّه خواهد شد که این فهرست، به صورتی غیرمستقیم، **آن عملیّات ذهنی را که به صورتی برجسته درحلّ مسائل سودمند واقع می‌شوند**، برمی‌شمارد. این عملیّات به همان‌ترتیب فهرست شده است که به احتمال زیاد در ضمن حلّ مسئله به ذهن شخصی که درحال حل‌کردن مسئله است می‌رسد.

۳. کلّیّت خصوصیّتی مهم از پرسشها و پیشنهادهایی است که در فهرست ما گنجانده شده است. این سؤالات را درنظر بگیرید: **مجهول چیست؟ داده‌ها چیست؟ شرط چیست؟** این پرسشها به صورتی کلّی قابل طرح است و می‌توانیم آنها را با داشتن تأثیری نیکو در گونه‌های مختلف مسائل به کار بریم. کاربرد آنها به گونه‌های ویژه‌ای از مسائل منحصر نیست. مسئلهٔ مورد نظر ما ممکن است جبری باشد یا هندسی، و ریاضی یا غیرریاضی، نظری یا عملی، مسئله‌ای جدّی یا **یامعمّائی محض**، تفاوتی‌نمی‌کند، طرح پرسشها مفیدو عملی است وبه ما درگشودن مسئله یاری می‌رساند.

البتّه نوعی**محدودیّت**وجود دارد، ولی این محدودیّت ارتباطی باموضوع ونوع مسئله ندارد. بعضی از پرسشها وپیشنهادها دراین فهرست تنها در حلّ «مسائل یافتنی»

کاربرد دارد نه در «مسائل ثابت کردنی». اگر مسئله‌ای از گونهٔ اخیر داشته باشیم، باید پرسشهای دیگری طرح کنیم؛ رجوع کنید به **مسئلهٔ یافتنی، مسئلهٔ ثابت کردنی.**

٤ . **عقل سلیم.** پرسشها وپیشنهادهای فهرست ما کلّی است، ولی از کلّیّت گذشته، همهٔ آنها ساده وآشکار وبرخاستهٔ از عقل واحساس ساده وسلیم است. مثلاً این پیشنهاد رامورد ملاحظه قرار دهید: **به مجهول نگاه کنید! و بکوشید تا یک مسئلهٔ معمولی را درنظر بیاورید که همین مجهول یامجهولی همانند آن داشته باشد.** این پیشنهاد به شما اندرز می‌دهد تاکاری رابکنید که اگر به راستی دربند حل کردن آن مسئله می‌بودید، بدون دریافت اندرزی به انجام دادن آن می‌پرداختید. آیا گرسنه‌اید؟ اگر چنین است خواست شما پیداکردن چیزی است که بخورید، وبرای پیداکردن خوراک ازراههای مشابهی استفاده می‌کنید. آیا یک مسئلهٔ ساختمانی هندسی در برابر خود دارید؟ می‌خواهید یک مثلّث بسازید که در این صورت همهٔ ذهن شما متوجّه راههای معمولی ساختن مثلّث می‌شود. آیا مسئله‌ای ازهرگونه که تصوّر شود دارید؟ اگر می‌خواهید مجهولی رامعلوم کنید به راههای معمولی ومتعارفی مخصوص یافتن آن مجهول متوجّه می‌شوید. اگر چنین کنید، درست از پیشنهادی پیروی کرده‌اید که پیش از این ازفهرست خودمان برای شما نقل کردیم. و نیز به راه درست رفته‌اید؛ پیشنهاد عبارت از پیشنهادی خوب است، و روشی رابه شما عرضه می‌دارد که پیروی ازآن غالباً باکامیابی همراه است.

همهٔ پرسشها و پیشنهادهای فهرست ما طبیعی و ساده و آشکار و مطابق باعقل سلیم است، ولی در آنها روش عقل سلیم ساده باالفاظ کلّی عرضه شده است. روشی رامعرّفی می‌کنند که به صورت طبیعی درنظر هر کس که جدّاً علاقه مند به حلّ مسئله واز عقل سلیم واحساس مستقیم برخوردار است جلوه گر می‌شود ولی آن کس که به راه درست می‌رود، معمولاً دربند آن نیست که رفتار خود را با الفاظ روشن بیان کند ومحتملاً نمی‌تواند چنین باشد؛ فهرست ما در آن می‌کوشد که این روشنی بیان رابه وجود آورد.

۵. **استاد وشاگرد. تقلید وتمرین.** هنگامی که معلمی به کار طرح پرسش یا عرضه کردن یک پیشنهاد به شاگردان خ د مشغول است، دو هدف رادرنظر دارد: نخست ، می‌خواهد به دانشجو در حلّ مسئلهٔ مورد نظر کمک کند. دوم، منظورش پرورش قابلیّت دانشجو به صورتی است که وی بتواند بعدها خود تنها به حلّ مسائل بپردازد.

تجربه نشان می‌دهد که اگر پرسشها وپیشنهادهای ما به صورتی شایسته به

کار گرفته شود، غالباً به دانشجو کمک می‌کند. از دو خصوصیّت مشترک میان آنها یکی مطابقت باعقل سلیم واحساس مستقیم است ودیگری کلّی بودن. بدان جهت که از عقل سلیم برمی‌خیزند غالباً به صورت طبیعی طرح می‌شوند؛ می‌توانند مستقیماً برذهن خود دانشجو خطور کنند. چون کلّی هستند، به صورتی نا آشکار و غیر ناخوانده یاری می‌دهند؛ تنها یک راه کلّی رانشان می‌دهند و به اندازهٔ کافی کار برای دانشجو باقی می‌گذارند که خود به تنهایی آنها را انجام دهد.

ولی دو هدفی که پیشتر ذکر کردیم، بایکدیگر ارتباط نزدیک دارند؛ اگر دانشجو توفیق حل کردن مسئلهٔ مورد نظر را پیدا کند، اندکی بر قابلیّت وشایستگی حلّ مسئله دروجود خویش می‌افزاید. سپس نباید فراموش کنیم که پرسشهای ما کلّی وقابل تطبیق بر اوضاع واحوال متعدّد است. اگر پرسش واحد به صورتی مکرّر سودمند واقع شود، دانشجو کمتر از توجّه به این امر غافل می‌ماند وبه این نتیجه راهبری می‌شود که در اوضاع مشابه خود به طرح چنین پرسشهایی برای خویشتن بپردازد. با پرسیدن یک سؤال به صورت مکرّر، امکان استخراج اندیشهٔ صحیح برای او فراهم می‌آید. با چنین موفّقیتی، راه درست به کار بردن پرسشها را کشف می‌کند و سپس واقعاً آن را به ملکیّت خود در می‌آورد.

ممکن است دانشجو معدودی از پرسشهای ما را چندان خوب جذب کند که خود سرانجام از قابلیّت طرح پرسشهای درست در هنگام مناسب برخوردار شود و عمل ذهنی متناظر با آن را به صورت طبیعی و به دقّت انجام دهد. چنین شاگردی قطعاً از فهرست ما بزرگترین بهره‌برداری ممکن را کرده است. برای رسیدن به این بهترین نتیجهٔ ممکن، استاد چه باید بکند؟

حل کردن مسائل، همچون مثلاً شناوری، یک مهارت تمرینی و عملی است. هر مهارت عملی را از راه تقلید و تمرین به دست می‌آوریم. برای آموختن فنّ شنا، از کاری که دیگران با دست و پای خود انجام می‌دهند تا سر خود را در هنگام شنا بالای آب نگاه دارند، تقلید می‌کنید، و سرانجام با تمرین کافی شایستگی شنا کردن بهرهٔ شما می‌شود. برای آموختن فنّ حلّ مسائل، باید به ملاحظه و مشاهدهٔ آنچه دیگران برای حل مسئله می‌کنند و تقلید از ایشان بپردازید، و سرانجام خود می‌آموزید که چگونه در ساختن مسائل توفیق حاصل کنید.

معلّمی که می‌خواهد قابلیّت شاگردان خود را در حلّ مسائل رشد دهد، باید علاقهٔ به مسئله‌ها و حلّ آنها را در ذهن ایشان زیاد کند و فرصت کامل تقلید و تمرین برای

آنان فراهم آورد. اگر معلّمی بخواهد اعمال ذهنی متناظر با پرسشها و پیشنهادهای فهرست ما را در میان دانشجویان خود پرورش دهد، باید هر چه بیشتر این پرسشها و پیشنهادها را برای آنان به صورتی طبیعی طرح کند. علاوه بر این، هنگامی که استاد مسئله‌ای را در برابر کلاس حل می‌کند، باید تا حدّی اندیشه‌های خود را به صورتی نمایشی برای شاگردان مجسّم سازد و همان پرسشهایی را برای خود طرح کند که هنگام کمک کردن به شاگردان برای حل کردن مسئله‌ها طرح می‌کرد. از برکت چنین رهبری، شاگردان کلاس درس سرانجام کاربرد صحیح پرسشها وپیشنهادها را درخواهند یافت، واز این راه به چیزی دسترسی پیدا خواهند کرد که از دانستن هرشناخت مربوط به یک واقعیت ریاضی خاص اهمّیّت بیشتر دارد.

تقسیمات عمده و پرسشهای عمده

۶. چهارمرحله. برای یافتن جواب مسئله، باید به صورت مکرّر دیدگاه و روش نگریستن خود را به آن مسئله عوض کنیم. باید وضع خود را مکرّر درمکرّر تغییر دهیم. هنگامی که کار را آغازمی‌کنیم، طرزتصوّرما نسبت به مسئله احتمالاً کامل نیست، آن‌گاه که در راه حل مسئله اندکی پیش رفتیم، نگرش دیگری پیداخواهیم کرد، و آن زمان که تقریباً به حلّ مسئله نزدیک شده‌ایم، بازهم طرزدید تازه‌ای خواهیم داشت.

برای آن‌که پرسشها و پیشنهادهای فهرست خودمان را به صورتی قراردادی گروهبندی کنیم، می‌توانیم دراین خصوص چهارمرحله درنظربگیریم. نخست، **فهمیدن** مسئله است، باید به صورتی آشکار بدانیم که چه چیز خواسته شده است. دوم، باید ببینیم که اجزاءِ مختلف مسئله چگونه به هم پیوسته‌اند و ارتباط مجهول با داده‌های مسئله از چه قرار است، تا ازاین راه اندیشه‌ای درخصوص حلّ مسئله پیداکنیم و برای آن **نقشه‌ریزی کنیم**. سوم **اجرای نقشه** است. چهارم، پس از پایان یافتن مسئله **به عقب نگاه کردن**و تجدیدنظرکردن و بحث کردن دربارهٔ آن است.

هریک ازاین مراحل اهمّیّتی مخصوص به‌خود دارد. ممکن است چنان اتّفاق افتد که دانشاموزی به یک اندیشهٔ درخشان استثنایی دست یابد و یکباره راه‌حل مسئله را بدون گذشتن از مقدّمات کشف کند. چنین اندیشه‌های نیکوالبتّه بسیار مطلوب است ولی ممکن است درصورتی که دانش‌آموز هریک از چهار مرحلهٔ یادشده را بدون داشتن اندیشه‌ای خوب ترک کند، چیزی ناخواسته و غیر نیکو ازآن نتیجه شود . بدترین حادثه هنگامی رخ می‌دهد که دانشجو درصورتی که هنوز درست مسئله را

نفهمیده است به کارحساب کردن و رسم کردن اشکال بپردازد،وعموماً پرداختن به جزئیّات بدون آگاهی داشتن از ارتباط و پیوستگی عمده یا ریختن نقشه‌ای برای حلّ مسئله کاری بیفایده است. اگر دانشاموز، در ضمن اجرای نقشه هرگام را که برمی‌دارد امتحان کند، از بسیاری از اشتباهات جلوگیری خواهد شد. در صورتی که از آزمایش مجدّد و ملاحظهٔ مجدّد راه حلّ به دست آمده خودداری شود، مقداری از بهترین تلاشهای صورت گرفته بیحاصل خواهد ماند.

۷. فهم مسئله. پاسخ دادن به یک پرسش که فهمیده نشده باشد، کاری ابلهانه است. کار کردن برای رسیدن به هدفی که مورد پسند نیست، غم‌انگیز است. در درون و بیرون مدرسه، غالباً ازاین کارهای ابلهانه و غم‌انگیز صورت می‌گیرد، ولی معلّم باید درآن بکوشد که از اتّفاق افتادن چنین چیزها درکلاس خود جلوگیری کند. دانشاموز باید مسئله را درست بفهمد. ولی تنها فهمیدن مسئله کافی نیست، بلکه باید میل پیدا کردن جواب آن را نیز داشته باشد. اگر در فهم یا درتمایل دانشاموز نقصی باشد. این نقص غالباً برخاستهٔ از خطای او نیست.مسئله باید خوب انتخاب شود و گاه باید مجسّم ساختن و نمایش دادن آن به صورتی طبیعی و دلپسند میسّر باشد.

قبل از هرچیز، بیان لفظی مسئله باید فهمیده شود. معلّم می‌تواند تا حدّی این نتیجه را مورد آزمایش قرار دهد، از شاگرد می‌خواهد که صورت مسئله را بیان کند، و شاگرد باید بتواند به صورتی روان به بیان کردن صورت مسئله بپردازد. همچنین لازم است که شاگرد بتواند بخشهای اصلی مسئله را که عبارت از مجهول و داده‌ها و شرط است بیان کند. بنابراین، معلّم هرگز نباید این پرسشها را فراموش دارد: **مجهول چیست؟ داده‌ها چیست؟ شرط چیست؟**

دانشجو باید اجزاءِ اصلی مسئله را به دقّت و مکرّر و از جهات گوناگون مورد ملاحظه قرار دهد. اگر شکلی به مسئله وابسته است، باید **آن شکل را رسم کند** و بر روی آن مجهول و معلومات (داده‌ها) را مورد اشاره قرار دهد. اگر دادن نامهایی به این چیزها ضرورت دارد، باید **علامات مناسب به کاربرد**، با توجّه کردن به انتخاب شایستهٔ علامات، ناگزیر از آن می‌شود که چیزهایی را که برای آنها علامت برگزیده است مورد ملاحظه قرار دهد. اگر بنا باشد که خواستار جواب قطعی نباشیم بلکه تنها نیازمند به یک پاسخ موقّتی و یک حدس هستیم پرسش دیگری ممکن است سودمند واقع شود از این قرار: **آیا امکان تحقّق یافتن شرط وجود دارد؟**

(در عرضه داشت بخش دوم کتاب حاضر، «فهم مسئله» به دو مرحلهٔ فرعی تقسیم شده است: «آشنا شدن» و «کارکردن برای فهم بهتر» .)

۸. مثال. بهتر است بعضی از نکات یادشدهٔ پیش از این را با آوردن مثالی مجسّم سازیم. برای این منظور مسئلهٔ سادهٔ ذیل را درنظر می‌گیریم. **قطر مکعّب مستطیلی را پیداکنید که طول و عرض و ارتفاع آن داده شده است.**

برای آنکه این مسئله به صورتی سودمند مورد بحث واقع شود، دانشاموزان باید از قضیّهٔ فیثاغورس و بعضی از کاربردهای آن در هندسهٔ مسطّحه آگاهی داشته باشند، ولی ممکن است آگاهی آنان از هندسهٔ فضایی چندان زیاد نباشد. استاددراین مرحله برآشنایی ناپروردهٔ دانشاموزان از روابط فضایی اعتماد خواهد کرد.

معلّم می‌تواند مسئله را با صورت تجسّم بخشیدن به آن برای شاگردان بیشتر جالب توجّه سازد. کلاس درس یک مکعّب مستطیل است که ابعاد آن را می‌توان اندازه گرفت و تخمین‌زد، شاگردان باید قطر کلاس را بیابند و «غیرمستقیم» اندازه‌بگیرند. معلّم به طول و عرض و ارتفاع کلاس اشاره می‌کند و قطر را با حرکت دادن به انگشت دست نشان می‌دهد، و با مراجعه مکرّر به کلاس، شکلی را که بر روی تخته کشیده است بهتر قابل فهم می‌سازد.

گفتگوی میان معلّم و شاگردان ممکن است بدین صورت باشد:

«مجهول چیست؟»

«طول قطر مکعّب مستطیل.»

«داده‌ها چیست؟»

«طول و عرض و ارتفاع مکعّب مستطیل.»

«برای داده‌ها علامات شایسته انتخاب می‌کند. کدام حرف باید نشانهٔ مجهول باشد؟»

« x »

«کدام حرفها را برای طول و عرض و ارتفاع انتخاب می‌کنید؟»

« a, b, c »

«**کدام شرط** a و b و c و x را به یکدیگر وابسته می‌کند؟»

« x قطر مکعّب مستطیل با طول a و عرض b و ارتفاع c است.»

«آیا مسئلهٔ درستی است؟ مقصودم آن است که **آیا شرایط برای یافتن مجهول کافی است؟**

«آری. اگر a و b و c را بدانیم، مکعّب مستطیل برای ما معلوم است. و چون مکعّب مستطیل معلوم باشد، قطر آن نیز معیّن خواهد بود.»

۹ـ طرح یک نقشه. هنگامی دارای یک نقشه و برنامه برای حلّ یک مسئله هستیم که، لااقل به صورت کلّی، بدانیم که برای به دست آوردن مجهول لازم است به

چه محاسباتی بپردازیم و چه شکلهایی را ترسیم کنیم. راه میان فهم مسئله و طرح نقشه ممکن است دراز و پرزحمت باشد. در حقیقت کار عمده برای حلّ یک مسئله دست یافتن به تصوّر اندیشه‌ای در بارهٔ نقشه و برنامهٔ حلّ مسئله است. این اندیشه ممکن است تدریجی حاصل شود یا، پس از آزمایشهای ظاهراً بی‌نتیجه و دوره‌ای از تردید، ناگهان، به صورت برقی که می‌جهد، همچون یک «اندیشهٔ روشن» به ذهن حل کنندهٔ مسئله برسد. بهترین کاری که معلّم در این خصوص می‌تواند برای شاگرد خود بکند، آن است که به صورتی غیرمستقیم سبب آن شود که چنین برقی در ذهن شاگرد بزند و اندیشهٔ روشن به نظر او برسد. پرسشها و پیشنهادهایی که می‌خواهیم دربارهٔ آنها بحث کنیم، همین اندیشه را برمی‌انگیزند.

برای آن که معلّم به خوبی وضع دانشاموز را پیش خود مجسّم سازد، لازم است دربارهٔ تجربهٔ خود فکر کند و دشواریهایی را که خود در حلّ مسائل داشته است از نظر بگذراند. البتّه این را می‌دانیم که اگر از موضوع موردنظر شناختِ کمی داشته باشیم، داشتن اندیشه‌ای نیکو در بارهٔ آن دشوار است، و در صورتی که هیچ شناختی نداشته باشیم، اصلاً به دست آوردن اندیشه‌ای در آن خصوص امکانپذیر نیست. اندیشه‌های نیکو بر شالودهٔ تجربهٔ گذشته و شناختی که از پیش به دست آمده بنا شده‌اند؛ برای داشتن اندیشهٔ نیکو، تنها به خاطر آوردن کفایت نمی‌کند، بلکه باید چیزی را به یاد بیاوریم که ارتباطی با موضوع مورد بحث داشته باشد؛ برای ساختن یک خانه تنها داشتن مصالح کفایت نمی‌کند، ولی ساختن خانه هم بدون داشتن مصالح لازم امکانپذیر نیست. مصالح لازم برای حلّ یک مسئلهٔ ریاضی، دانسته‌هایی از شناخت ریاضی قبلی ما است که از مسائل حل شده یا قضیّه‌های به اثبات رسیدهٔ پیش از آن به دست آورده‌ایم. بنابراین غالباً مصلحت آن است که کار با این پرسش آغاز شود که: **آیا از مسئلهٔ مشابهی که حل کرده باشید خبر دارید؟**

دشواری در آن است که معمولاً چندین مسئلهٔ پیش از آن حل شده وجود دارد که هر یک به صورتی با مسئلهٔ حل کردنی وابستگی دارد و به صورت جزئی با آن مشترک است. آیا چگونه می‌توانیم یک یا چند مسئلهٔ مناسب را از میان آنها انتخاب کنیم؟ یک نظر آن است که انگشت خود را بر روی نقطهٔ اساسی مشترک بگذاریم: **به مجهول نگاه کنید! و بکوشید تا فکر خود را به جانب یک مسئلهٔ آشنا متوجّه سازید که همین مجهول یا چیزی شبیه آن را داشته است.**

اگر در کار به یادآوردن یک مسئله که ارتباط نزدیک با مسئلهٔ حاضر دارد توفیق

حاصل کنیم، بخت یار ما خواهد بود. باید بکوشیم تا شایستهٔ رسیدن به چنین خوشبختی باشیم؛ با بهره‌برداری از آن به این شایستگی دست پیدا می‌کنیم. **در اینجا با مسئله‌ای رو به رو هستید که با مسئلهٔ حل شدهٔ پیشتر شما ارتباط دارد. آیا می‌توانید از این ارتباط بهره‌برداری کنید؟**

پرسشهای بیشتر، در صورتی که به خوبی فهمیده و در نظر گرفته شود، بیشتر اوقات به آغاز شدن رشتهٔ افکار و اندیشه‌های مربوط به حلّ مسئله کومک می‌کند، ولی همیشه نمی‌تواند چنین باشد، و کار جادویی از آنها برنمی‌آید. اگر کارگر نیفتند، باید درصدد یافتن نقاط تماس دیگر برآییم و جنبه‌های مختلف مسئله را اکتشاف کنیم؛ لازم است مسئله را تغییر دهیم و شکل بیان آن را به صورت دیگر درآوریم. **آیا می‌توانید دوباره صورت مسئله را بیان کنید؟** بعضی از پرسشهای فهرست ما اشاره به تدبیرهای مخصوصی است که سبب تغییر صورت مسئله می‌شود، همچون تعمیم و تخصیص و استفادهٔ از شباهت یا تمثیل و حذف کردن جزئی از شرط و نظایر اینها؛ جزئیّات حایز اهمّیت است ولی اکنون نمی‌توانیم به بحث دربارهٔ آنها بپردازیم. تغییر دادن شکل مسئله ممکن است سبب پیداشدن یک مسئلهٔ کومکی (معاون، معین) فرعی شود: **اگر نمی‌توانید مسئلهٔ طرح شده را حل کنید، نخست در آن بکوشید که به حلّ مسئله‌ای مشابه آن بپردازید.**

با کوشش برای استفادهٔ از مسائل و قضیّه‌های گوناگونِ شناخته شده و در نظر گرفتن اشکال مختلف صورت بیانی مسئله و آزمایش با مسائل گوناگون فرعی، ممکن است چندان از راه‌حلّ مسئلهٔ اصلی دور شویم که خطر گم کردن راه ما را تهدید کند. ولی پرسش خوبی هست که بار دیگر شما را به آن بازمی‌گرداند: **آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ آیا از همهٔ شرط استفاده کردید؟**

۱۰. مثال. به مثال شمارهٔ ۸ بازمی‌گردیم. به صورتی آن را ترک کردیم که شاگردان مسئله را چنانکه باید فهمیده و علاقه‌ای به حل کردن آن نشان داده بودند. آنان اکنون می‌توانند اندیشه‌ای که برخاستهٔ از ابتکار خود ایشان باشد داشته باشند؛ اگر استاد که به دقّت مواظب کلاس است نشانه‌ای از این ابتکار را اکتشاف کند، باید پرسش و پاسخ خود را با دانشجویان تجدید کند؛ باید آمادگی آن را داشته باشد که اگر دانشجویان به سؤالی پاسخ ندادند، تغییری در شکل آن بدهد و دوباره بپرسد. باید آمادهٔ آن باشد که گاه با سکوت دلسردکنندهٔ دانشجویان مواجه شود (که در ضمن نوشتن به جای آن چند نقطه... خواهیم آورد).

«آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟»

. . . .

«به مجهول نگاه کنید! آیا مسئله‌ای را می‌شناسید که همین مجهول را داشته باشد؟»

. . . .

«بسیار خوب، مجهول چیست؟

«قطر مکعّب مستطیل.»

«آیا از مسئله‌ای باهمین مجهول خبر دارید؟»

«نه، تاکنون مسئله‌ای مربوط به قطر مکعّب مستطیل نداشته‌ایم.»

«آیا از مسئله‌ای بامجهول مشابه خبر دارید؟»

. . . .

«توجّه کنید! قطر عبارت از یک قطعه خطّ است، آیا تاکنون مسئله‌ای مربوط به تعیین طول یک خط حل نکرده‌اید؟»

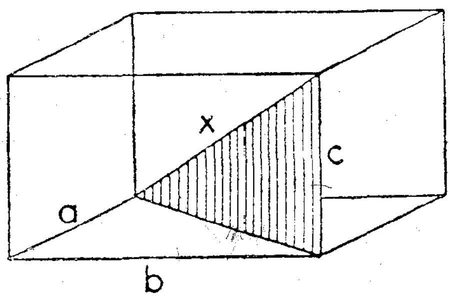
«البتّه که چنین مسئله‌ای را حل‌کرده‌ایم. مثلاً برای یافتن ضلعی از یک مثلث.»

«بسیار خوب! **پس اکنون با مسئله‌ای روبه رو هستید که وابستهٔ به مسائل پیشین شما است که آنها را حل کرده‌اید. آیا می‌توانید از دانسته‌های خود استفاده کنید؟»**

. . . .

«این مایهٔ خوشبختی شما است که مسئله‌ای مربوط به مسئلهٔ حاضر را به خاطر آوردیدکه پیشتر به حل آن موفّق شده بودید. آیا دوست دارید که آن را مورد استفاده قرار دهید؟ **آیا می‌توانید یک جزء فرعی ومعین اضافه کنید که استفادهٔ از آن را ممکن سازد؟»**

. . . .



شکل ۱

«توجّه داشته باشید که مسئلهٔ به یاد آمدهٔ شما مربوط به مثلث است. آیا هیچ

مثلّثی در شکل دیده می‌شود؟»

باید امیدوار باشیم که آخرین اشاره به اندازهٔ کافی صریح باشد که اندیشهٔ راه‌حلّ مبتنی بریک مثلّث قائم‌الزّاویه را (که در شکل ۱ باخطّ هاشور مشخّص شده) که قطر مجهول مورد نظر وترآن است، در ذهن دانشاموزان برانگیزد. با این همه معلّم باید آمادهٔ آن باشد که اگر این اشارهٔ به اندازهٔ کافی روشن برای برانگیختن شاگردان کافی نباشد، درصدد یافتن چاره‌ای دیگر برآید، وبدین ترتیب باید آمادگی آن داشته باشد که رفته رفته به آوردن اشاره‌های صریحتر متوسّل شود.

«آیا می‌خواهید یک مثلّث در شکل داشته باشید؟»

«چگونه مثلّثی را دوست دارید که در شکل موجود باشد؟»

«هنوز نتوانسته‌اید قطر را پیدا کنید، ولی گفتید که می‌توانید اندازهٔ ضلع مثلّث را به دست آورید. اکنون چه خواهید کرد؟»

هنگامی که، سرانجام، با کومکی کمابیش، شاگردان توانستند جزء معین یعنی مثلّث قائم‌الزّاویهٔ شکل ۱ را وارد بحث کنند، معلّم می‌تواند خود را متقاعد سازد که شاگردان پیش از آن که وارد کار محاسبه شوند، به اندازهٔ کافی از چیزهایی که باید بدانند آگاه شده‌اند.

«گمان می‌کنم که رسم کردن مثلّث فکر خوبی بود. اکنون یک مثلّث دراختیار دارید، ولی مجهول کجا است؟»

«مجهول وتر همین مثلّث است، می‌توانیم اندازهٔ آن را از روی قضیّهٔ فیثاغورس به دست آوریم.»

«به شرطی که دو ضلع آن مثلّث را بدانید، آیا اندازه‌های آنها را دارید؟»

«یک ضلع آن معلوم و همان c است. و یافتن دیگری، به گمان من، دشوار نیست. آری، ضلع دیگر وتر یک مثلّث قائم‌الزّاویهٔ دیگر است.»

«بسیار خوب! اکنون معلوم است که شما نقشه‌ای دراختیار دارید».

۱۱. اجرای نقشه. طرح نقشه و تصوّر اندیشه حلّ مسئله آسان نیست. برای آنکه به نتیجه برسد فرصت لازم دارد، شناختِ به دست آمدهٔ قبلی و عادتهای ذهنی خوب و متمرکز ساختن فکر بر روی هدف، و از همهٔ اینها گذشته یک چیز دیگر یعنی یاری کردن بخت در کار است. اجرای نقشه آسانتر است، آنچه به آن نیاز داریم به صورت عمده حوصله و شکیبایی است.

نقشه طرحی کلّی به دست می‌دهد، باید خود را متقاعد سازیم که جزئیّات با طرح

کلّی سازگار است، و بنابراین باید جزئیّات را یکی پس از دیگری با حوصله مورد آزمایش قرار دهیم تا این که هر چیز به صورت کامل روشن شود و گوشهٔ تاریکی که ممکن است خطایی در آن پنهان شده باشد باقی نماند.

اگر دانشاموز واقعاً نقشه‌ای را برای حلّ مسئله طرح کرده باشد، از آن پس کار معلّم نسبتاً آسانتر خواهد شد. خطر عمده آن است که دانشاموز نقشهٔ خود را فراموش کند. و این کیفیّت مخصوصاً در آن هنگام بیشتر اتّفاق می‌افتد که دانشجو نقشهٔ خود را از خارج دریافت کرده باشد و پذیرفتن وی مبتنی بر اعتماد و اتّکایی باشد که به استاد خود دارد؛ ولی اگر خود شخصاً نقشه ریخته ـ حتّیٰ در آن صورت که کومکی هم از خارج به او رسیده است ـ و با خرسندی اندیشهٔ نهایی را پذیرفته است، فکر آن نقشه را به آسانی گم نخواهد کرد. با این همه معلّم باید در این باره تأکید داشته باشد که دانشاموز **هر گام را که برداشته است امتحان کند** و از درستی آن مطمئن شود.

اطمینان حاصل کردن از درستی گام برداشته شده یا «شهودی» است ویا «صوری». باید تمام توجّه ذهن خود را به نکتهٔ مورد بحث چندان معطوف داریم تا به وضوح و روشنی بر ما معلوم شود که آن گام برداشته شده درست بوده است؛ *یا این که* نکتهٔ مورد بحث و تحقیق را از روی قواعد رسمی و صوری استنتاج کنیم. (تفاوتِ میان «بصیرت» یا شهود و «دلیل صوری» به اندازهٔ کافی در بسیاری از موارد مهم آشکار است؛ بحث بیشتر را در این خصوص به فیلسوفان وا می‌گذاریم.)

نکتهٔ مهم آن است که دانشجو باید راست و درست به صحّت هر گام که برداشته است یقین حاصل کند و متقاعد شود. در پاره‌ای از موارد، استاد باید تفاوتِ میان «دیدن» و «ثابت کردن» را با تأکید بیشتر بیان کند. آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست بوده است؟ **ولی آیا می‌توانید همچنین درست بودن این گام را اثبات کنید؟**

۱۲. مثال. خوب است کار خود را از آنجا که در پایان بخش ۱۰ آن را ترک کردیم از سر بگیریم. دانشجو، بالأخره، اندیشهٔ حلّ مسئله را به دست آورد. وی مثلّث قائم‌الزّاویه را می‌بیند که مجهول x وتر و ارتفاع c یک ضلع آن است، ضلع دیگر قطر یکی از وجوه مکعّب مستطیل است. شاید دانشجو ناگزیر از آن شود که علامات تازه‌ای به کار برد. وی برای نمایاندن ضلع دیگر حرف y را برمی‌گزیند که قطر یکی از وجوه با اضلاع آن a و b است. از این راه به صورتی روشنتر از اندیشهٔ راه‌حلّی آگاهی حاصل می‌کند که مبتنی بر وارد کردن

مسئله‌ای کومکی با مجهول y است و بالاخره، وی از دو مثلّث قائم‌الزّاویه روابط ذیل را به‌دست می‌آورد (به شکل ۱ رجوع کنید).

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

که پس از حذف کردن مجهول معاون از این دو معادله چنین خواهیم داشت:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

معلم حق ندارد کار شاگردی را که بر روی این جزئیّات به درستی کار می‌کند متوقّف سازد مگر، احتمالاً، این متوقّف ساختن برای آن باشد که آزمایش یک گام برداشته شده را به او توصیه کند. مثلاً ممکن است چنین بپرسد:

«آیا آشکارا می‌بینید که مثلّث با اضلاع x و y و c قائم‌الزّاویه است؟» به این پرسش ممکن است دانشجو به درستی پاسخ بدهد که «آری» ولی اگر با این اعتقاد مبتنی بر «بصیرت» و «شهود» دانشجو متقاعد نشود، پرسش خود را چنین ادامه می‌دهد:

«ولی آیا می‌توانید ثابت کنید که این مثلّث قائم‌الزّاویه است؟»

معلّم معمولاً باید از طرح این سؤال خودداری کند، مگر آن که کلاس آگاهی خوبی از هندسهٔ فضایی داشته باشد. حتّیٰ در این حالت اخیر نیز خطر آن وجود دارد که پرسش اتّفاقی برای اکثریّت دانشجویان سبب پیدایش یک دشواری عمده شود.

۱۴. به پس نگریستن. حتّیٰ شاگردان بسیار خوب، در آن هنگام که جواب مسئله را یافته و رشتهٔ برهان را به وضوح نوشته باشند، کتابهای خود را می‌بندند و منتظر چیزی دیگر می‌مانند. با این کار یک مرحلهٔ مهمّ و آموزنده را فراموش کرده‌اند. از نگریستن به تمام حلّ مسئله از راه دوباره سازی و دوباره آزمودنِ نتیجه و راهی که به آن انجامیده است، شناخت خود را می‌توانند نیرومند سازند و ملکهٔ حلّ مسائل را در خود تقویت کنند. یک استاد خوب باید این مطلب را خوب بفهمد و به شاگردان خود حالی کند که کار هیچ مسئله‌ای که حل شده، از هرگونه که باشد، کاملاً پایان نیافته است. همیشه کاری برای کردن باقی مانده است؛ با مطالعه و تحقیق کافی و به عمق چیزها نظر کردن، همیشه می‌توانیم در هر مورد حلّ مسئله را بهتر کنیم، و همیشه می‌توانیم بر فهم خود از حلّ مسئله بیفزاییم.

دانشجو اکنون نقشهٔ طرح شدهٔ خود را اجرا کرده است. جواب را نوشته و گامها را

یک به یک آزموده است. بنابراین حق دارد به صحّت جوابی که یافته معتقد باشد. با وجود این، اشتباه همیشه ممکن است، مخصوصاً اگر راه اثبات طولانی و پیچیده باشد. بنابراین، تحقیق کردن در صحّت جواب مطلوب است. مخصوصاً اگر روشی سریع و شهودی برای آزمایش کردن نتیجه یا راه اثبات وجود داشته باشد، از آن نباید چشم بپوشند. **آیا می‌توانید جواب را آزمایش کنید؟ آیا می‌توانید برهان را آزمایش کنید؟**

برای آن که خود را به حضور یک کیفیّت یا یک شیء متقاعد سازیم، چنان دوست داریم که آن را ببینیم و لمس کنیم. و همان‌گونه که دریافتِ از راه دو حسّ مختلف را ترجیح می‌دهیم، به همان گونه هم متقاعد شدن از راه دو استدلال متفاوت را ترجیح می‌نهیم: **آیا می‌توانید این نتیجه را از راهی دیگر به دست آورید؟** البتّه ما یک برهان کوتاه و شهودی را بر یک استدلال دراز و سنگین ترجیح می‌دهیم: **آیا می‌توانید با یک نظر آن را ببینید؟**

یکی از نخستین و مهمترین وظایف یک معلّم ایجاد کردن این طرز تفکّر در شاگردان است که مسائل ریاضی ارتباطی اندک با یکدیگر دارند، و با چیزهای دیگر اصلاً هیچ‌گونه ارتباطی ندارند. هنگامی که به جواب یک مسئله نگاه می‌کنیم فرصتی طبیعی برای آن داریم که دربارهٔ ارتباطهای آن به تحقیق بپردازیم. اگر دانشجویان به صورتی درست و خودآگاهانه به این کار بپردازند، نگریستن به جواب و راه حلّ مسئله را پس از تمام شدن آن جالب توجّه خواهند یافت. سپس مشتاق آن می‌شوند که ببینند با این تلاش چه کاری دیگر را می‌توانند انجام دهند و بار دیگر نیز به همین گونه به این عمل بپردازند. استاد باید دانشجویان را تشویق کند تا حالات دیگری را پیش خود تصوّر کنند که در آنها می‌توانند بار دیگر همین روش را به کار برند یا نتیجهٔ حاصل شده را مورد استعمال قرار دهند. **آیا می‌توانید این نتیجه یا این روش را در مسئلهٔ دیگر نیز به کار برید؟**

۱۴. مثال. در بخش ۱۲، دانشجو بالأخره جواب مسئله را به دست آورد: اگر یالهای نسبت به یکدیگر قائمِ مکعّب مستطیل را a و b و c فرض کنیم، قطر آن عبارت خواهد بود از

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟ استاد نمی‌تواند از شاگردان بی‌تجربه متوقّع پاسخ خوبی برای این پرسش باشد. با وجود این، دانشجویان بسیار زود از این مطلب آگاهی

پیدا می‌کنند که مسائل «حروفی» بر مسائل «عددی» محض ترجیح دارد؛ اگر داده‌های مسئله «با حروف» بیان شده باشد، جواب آن را می‌توان در معرض آزمایشهای چندی قرار داد که مسئله‌های «عددی» پذیرای آنها نیستند. مثال ما، با وجود آنکه بسیار ساده است، به اندازهٔ کافی این مطلب را نشان می‌دهد. معلّم می‌تواند سؤالهای چندی دربارهٔ نتیجه طرح کند که دانشجویان فوری به آنها پاسخ «آری» دهند؛ ولی یک پاسخ «نه» از وجود نقصی در نتیجه خبر می‌دهد. **آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟** آیا همهٔ داده‌های a و b و c در فرمولی که برای قطر به دست آوردید آمده است؟

«طول و عرض و ارتفاع نقش واحدی در پرسش ما دارند؛ مسئله نسبت به a و b و c متقارن است. آیا عبارتی که برای قطر به دست آوردید از لحاظ a و b و c متقارن است؟ اگر a و b و c را با یکدیگر عوض کنید جواب تغییر می‌کند؟»

مسئلهٔ ما مسئله‌ای از هندسهٔ فضایی است: یافتن قطر متوازی‌السّطوحی با ابعاد a و b و c به مسئله‌ای از هندسهٔ مسطّحه شباهت دارد: یافتن قطر مربّع مستطیلی با ابعاد a و b. آیا نتیجهٔ مسئلهٔ «فضایی» شبیه نتیجهٔ مسئلهٔ «مسطّحه» است؟

«اگر ارتفاع c کاهش پیدا کند و سرانجام هیچ شود، متوازی‌السّطوح به صورت یک متوازی الاضلاع درمی‌آید. اگر در فرمول شما $c = ۰$ باشد آیا درست فرمول مخصوص متوازی‌الاضلاع قائم‌الزّاویه را به دست خواهید آورد؟»

«اگر ارتفاع c افزایش پیدا کند، قطر نیز افزایش خواهد یافت. آیا فرمول شما این مطلب را نمایش می‌دهد؟»

«اگر همهٔ ابعاد a و b و c بر یک نسبت افزایش یابد، قطر نیز بر همان نسبت افزایش پیدا می‌کند. اگر در فرمول خود به جای a و b و c اندازه‌های $۱۲a$ و $۱۲b$ و $۱۲c$ قرار دهید، اندازه قطر نیز باید در ۱۲ ضرب شود. آیا چنین است؟»

«اگر a و b و c با متر اندازه گرفته شده باشد، فرمول شما اندازهٔ قطر را بر حسب متر به دست می‌دهد، ولی اگر آن اندازه‌ها با سانتیمتر معیّن شده باشد، فرمول باید باز هم صحیح باشد. آیا چنین است؟»

(دو پرسش اخیر اصولاً همسنگ (معادل) یکدیگر است، رجوع کنید به **آزمون با بُعد**).

این سؤالات چندین اثر نیکو دارند. نخست، یک دانش‌آموز با هوش در تحت تأثیر این واقعیّت قرار می‌گیرد که فرمولها از بوتهٔ این همه آزمون گذشته‌اند. پیش از آن چنان تصوّر می‌کرد که فرمول از آن جهت درست است که خود آن را با دقّت به دست آورده

است. ولی اکنون بیشتر نسبت به صحّت آن متقاعد شده، و اعتمادی که از این راه به دست آورده از منبع دیگری سرچشمه گرفته است، نتیجه یک «گواهی آزمایشی» است. سپس، از برکت پرسشهایی که پیشتر گذشت، جزئیّات فرمول دارای معنای تازه‌ای می‌شود و به وسیلهٔ واقعیّتهای گوناگون با یکدیگر پیوستگی پیدا می‌کنند. بدین ترتیب فرصت به خاطر سپرده شدن فرمول بیشتر می‌شود، و شناخت دانشجویان نیرومندیِ بیشتر پیدا می‌کند، و بالاخره، این پرسشها را به آسانی می‌توان در مورد مسائل مشابه یکدیگر به کاربرد. پس از مقداری آزمایش با مسائل مشابه، دانشجوی باهوش ممکن است به اندیشه‌های مندرج در آنها دسترس پیدا کند: و آن به کار بردن همهٔ داده‌های مربوط و تغییر داده‌ها و تقارن و تمثیل (قیاس) است. اگر به آن عادت کند که توجّه خود را به این گونه نکات معطوف دارد، قابلیّت حلّ مسئله در او به صورتی قطعی از این نتیجه بهره‌مند می‌شود.

آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟ ممکن است دوباره آزمودن گامهای پیاپی استدلال در حلّ مسائل دشوار و مهم ضرورت پیدا کند. معمولاً، همین اندازه کافی است که نقاط مهمّ و آسیب‌پذیر را برای آزمایش مجدّد در نظر بگیرند. در حالت مورد بحث ما، بهتر چنان است که به صورت قهقرایی پرسشی مورد بحث واقع شود که بحث دربارهٔ آن در آن هنگام که به جواب نرسیده بودیم شایسته نمی‌نمود: **آیا می‌توانید ثابت کنید** که مثلّث با اضلاع x و y و c قائم‌الزّاویه است؟ (به پایان بخش ۱۲ مراجعه کنید.)

آیا می‌توانید نتیجه یا روش را برای مسئلهٔ دیگری به کار برید؟ با اندکی تشویق و جرأت دادن، و پس از آوردن یکی دو مثال، دانشاموزان به آسانی به کاربردهایی دست می‌یابند که اصولاً عبارت از دادن تعبیری مجسّم و عینی به اجزاء و عناصر مجرّد ریاضی مسئله است. خود معلّم در آن هنگام که کلاس درس را برای مجسّم ساختن مکعّب مستطیل مسئله مورد استفاده قرار داد، به چنین کاری پرداخت. یک دانشجو ممکن است پیشنهاد کند که به جای کلاس درس از ناهار خوری مدرسه برای محاسبهٔ قطر استفاده شود. اگر دانشجویان داوطلبِ عرضه داشتنِ نمونه‌های تصوّری نشوند، خود استاد می‌تواند مسئله‌ای با اندک تغییر طرح کند، همچون: «با در دست بودن درازا و پهنا و بلندای یک متوازی‌السّطوح قائم‌الزّاویه، فاصلهٔ مرکز آن را از گوشه‌هایش حساب کنید».

ممکن است دانشجویان نتیجه مسئلهٔ تازه حل شده را به کار برند، و با در نظر گرفتن این که فاصلهٔ موردنظر نصف قطر است، به زودی اندازهٔ آن را حساب کنند، یا

ممکن است آن روش را به کار برند که در آن مثلثهایی قائم‌الزاویه مورد استفاده واقع می‌شود (این راه حلّ اخیر کمتر آشکار است و تا حدّی در حالت کنونی ناهنجار و ناشیانه به نظر می‌رسد).

پس از این کاربرد، معلّم می‌تواند هیئت چهار قطر متوازی‌السّطوح و شش هرمی را که وجوه متوازی‌السّطوح قاعده‌های آنها هستند و مرکز متوازی‌السّطوح رأس مشترک آنها و نیمقطرها یالهای طرفی آنها است مورد بحث قرار دهد. هنگامی که تخیّل و تصوّر هندسی دانشجویان به اندازهٔ کافی تقویت شد، استاد می‌تواند به پرسش خود بازگردد: **آیا می‌توانید نتیجه یا روش را برای مسئلهٔ دیگری به کار برید؟** اکنون احتمال بیشتر وجود دارد که شاگردان بتوانند تعبیری مجسّمتر، همچون آن که پس از این خواهد آمد، پیدا کنند:

«در مرکز بام مستطیل شکل یک بنا که ۲۱ متر درازا و ۱٦ متر پهنا دارد، یک پایهٔ پرچم به ارتفاع ۸ متر باید نصب شود. برای نگاهداری این پایه به چهار کابل با طولهای برابر نیازمندیم. محلّ بستن کابلها ۲ متر زیر رأس پایهٔ پرچم است و کابلها به چهار گوشهٔ بام بسته می‌شود. طول هر کابل چه اندازه است؟»

دانشجویان ممکن است **روش** مسئله‌ای را که به تفصیل حل کرده‌اند به کار برند و از مثلّث قائم‌الزّاویه‌ای در سطح قائم و مثلّث قائم‌الزّاویهٔ دیگری در سطح افقی بهره‌برداری کنند. یا این که از **نتیجه** استفاده کنند و مکعّب مستطیلی را مورد بهره‌برداری قرار دهند که قطر x آن یکی از چهار کابل و اندازهٔ یالهای آن چنین است:

$$a = 10.5 \qquad b = 8 \qquad c = 6$$

که با استفادهٔ مستقیم از فرمول، ۱٤٫۵=x به دست خواهد آمد.

برای مثالهای بیشتر، به **آیا می‌توانید از نتیجه استفاده کنید؟** مراجعه کنید.

۱۵. برداشتهای گوناگون. بهتر است هنوز تا مدّتی مسئله‌ای را که در بخشهای ۸و۱۰و ۱۲ و ۱٤ از آن بحث می‌شد مورد ملاحظه قرار دهیم. از کار اساسی یعنی اکتشاف سطح در ۱۰ بحث شد. حال چنان فرض می‌کنیم که استاد راه دیگری را انتخاب کرده باشد. با آغاز کردن از همان نقطه در بخش ۱۰، می‌توانست از راه دیگری برود و از شاگردان خود این سؤالات را بپرسد:

«**آیا از مسئله‌ای مربوط به این خبر دارید؟**»

«آیا مسئلهٔ **مشابه** آن را می‌شناسید؟»

«متوجّه باشید که مسئلهٔ طرح شده مسئله‌ای از هندسهٔ فضایی است. آیا می‌توانید مسئلهٔ مشابه ساده‌تری از هندسه مسطّحه برای آن پیدا کنید.»

«می‌بینید که مسئلهٔ طرح شده مربوط به شکلی در فضا است، و به قطر یک متوازی‌السّطوح قائم‌الزّاویه ارتباط دارد. مسئلهٔ مشابه آن در سطح چگونه می‌تواند باشد؟ باید به- قطر یک- قائم‌الزّاویه مربوط باشد.»

«متوازی الاضلاع».

شاگردان، حتّیٰ اگرکندکار و بی‌اعتنا هم باشند، و نتوانند چیزی را از پیش حدس بزنند، سرانجام سهم کوچکی در اندیشیدن برای یافتن پاسخ پیدا می‌کنند. علاوه بر این، اگر شاگردان بسیار کند باشند، معلّم نمی‌بایستی چنین پرسشی را برای آنان بدون بحث کردن قبلی در آن طرح کند، چه لازم بوده است که پیشتر آنان را با مسئلهٔ مشابه متوازی‌الاضلاع آماده کرده باشد. سپس به کار خود ادامه می‌دهد و این پرسش را طرح می‌کند:

«در اینجا مسئله‌ای مربوط به مسئلهٔ شما است که پیشتر آن را حل کرده‌اید. آیا می‌توانید از آن بهره‌برداری کنید؟»

«آیا می‌توانید عناصرکومک‌کننده‌ای (مُعِین) وارد کنید تا استفادهٔ از آن را امکانپذیر سازد؟»

سرانجام معلّم توفیق آن پیدا خواهد کرد که اندیشهٔ مطلوب را به ذهن شاگردان خود القا کند. و آن عبارت از تصوّر قطر یک متوازی‌السّطوح معلوم است به صورت قطر یک متوازی‌الاضلاع مناسب که لازم است در شکل گنجانده شود (همچون مقطع متوازی‌السّطوح باسطحی که از یالهای روبه‌روی یکدیگر گذشته باشد). اندیشه اصولاً همان اندیشهٔ پیشین است (بخش ۱۰) ولی برداشت متفاوت است. در بخش ۱۰، تماس با دانش و شناخت در دسترس شاگردان از طریق مجهول برقرار شد، یک مسئلهٔ پیشتر حل شده از آن جهت به خاطر آمد که مجهول آن همان مجهول مسئلهٔ طرح شده بود. در بخش حاضر قیاس و تمثیل (شباهت) سبب برقرار شدن تماسِ با اندیشهٔ حلّ مسئله می‌شود.

۱۶ ۰ روش سؤال کردن معلّم که در بخشهای ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۵ نشان داده شد، اصولاً از این قرار است: از یک پرسش یا پیشنهاد کلّی از فهرست ما آغاز می‌شود و، اگر لازم باشد، رفته رفته پرسشها و پیشنهادها چندان خصوصی و عینی می‌شود تا آن گاه که به پرسش یا پیشنهادی برسد که سبب برانگیختن واکنش یا

پاسخی در ذهن دانشاموز شود. اگر خواستار آن هستید که دانشاموز از اندیشهٔ خود بهره‌برداری کند، در صورت امکان بار دیگر کار را با یک سؤال یا پیشنهاد کلّی از فهرست آغاز کنید و باز در صورت لزوم پیش بروید تا به پرسش یا پیشنهادی خصوصیتر برسید، و همچنین.

البتّه فهرست ما نخستین فهرست ازاین گونه است، چنان به نظر می‌رسد که برای اکثر حالات ساده کفایت می‌کند، ولی شک نیست که امکان کاملتر شدن آن وجود دارد. ولی آنچه مهمّ است این است که پیشنهادهایی که از آنها شروع می‌کنیم باید ساده و طبیعی و کلّی و فهرست آنها کوتاه باشد.

پیشنهادها از آن جهت باید ساده و طبیعی باشد که در غیر این صورت نمی‌تواند غیر ناخوانده باشد.

اگر خواستار آن باشیم که پیشنهادها به پرورش قابلیّت شاگردان کومک کند و تنها صورت یک روش عمل نداشته باشد، این پیشنهادها باید کلّی باشد و نه تنها در حلّ مسئلهٔ مورد بحث بلکه در گشودن انواع مسائل سودمند واقع شود.

فهرست ازآن‌جهت‌باید کوتاه‌باشد که پرسشها بتواند غالباً به‌صورت‌غیرمصنوعی ودر اوضاع واحوال گوناگون تکرار شود، بدین ترتیب فرصت آن فراهم می‌آید که دانشجو آنها را جذب کند وپرسشها از این راه سهمی در پرورش عادت ذهنی او داشته باشد.

رفتن تدریجی از پرسشهای کلّی به پرسشهای خاص برای آن است که دانشجو هرچه بیشتر ممکن است در کار سهیم شود.

این روش پرسش روشی سخت وتغییر ناپذیر نیست، خوشبختانه از آن جهت چنین است که دراین گونه موضوعها روش جدّی وسخت مکانیکی وفضلفروشانه لزوماً بد است. روش ما پذیرای مقداری تغییر وکشسانی است وبرداشتهای گوناگون پیدا می‌کند (بخش ۱۵)، وباید ومی‌تواند چنان به کار گرفته شود که سؤالات پرسیده شدهٔ به توسّط استاد بتواند به ذهن خود دانشجو نیز برسد.

اگر معلّمی بخواهد روش یادشدهٔ در این کتاب را در کلاس درس خود به موقع اجرا بگذارد، باید با احتیاط عمل کند. باید به دقّت نمونهٔ معرّفی شده در بخش ۸ ومثالهای ذکرشدهٔ در بخشهای ۱۸و ۱۹و ۲۰ را مورد مطالعه قرار دهد. مثالهایی را که خود می‌خواهد دربارهٔ آنها بحث کند، باید به دقّت برگزیند، و برداشتهای مختلف را در نظر بگیرد. کارخود را با چند آزمایش باید آغاز کند تا به تدریج بر وی معلوم شود که

چگونه باید این روش را عملی سازد ودانشجویان چه اندازه آن را می‌پسندند وچه اندازه وقت می‌گیرد.

۱۷. پرسشهای خوب وپرسشهای بد. اگر روش پرسش که در بخش پیشین صورتبندی شد خوب فهمیده شده باشد، ازراه مقایسه به این داوری کومک می‌کند که کیفیّت بعضی از پیشنهادها که به قصد یاری کردن به دانشجویان طرح شده، چه اندازه عالی است.

بهتر است به وضعی که در آغاز بخش ۱۰ وجود داشت واین سؤال پرسیده شد که **آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟** بازگردیم. به جای این پرسش، به قصد مدد رساندن به دانشجو، می‌توان این سؤال را طرح کرد: **آیا می‌توانید از قضیّهٔ فیثاغورس بهره‌برداری کنید؟**

ممکن است نیّت بهتر باشد، ولی پرسش دربارهٔ بدتر است. باید توجّه داشته باشیم که این سؤال درچه وضعی طرح شده است، سپس خواهیم دید که رشتهٔ درازی از اعتراضات بر ضدّ این گونه «کومک» وجود دارد.

(۱) اگر دانشجو به حلّ مسئله نزدیک شده باشد، ممکن است از اشاره‌ای که در ضمن این پرسش وجود دارد آگاه شود، ولی او چنین نیست، وکاملاً امکان آن وجود دارد که اصلاً به اشاره‌ای که دراین پرسش وجود دارد توجّه نکند. بدین ترتیب درآن هنگام که کومک بسیار موردنیاز است، از این پرسش هیچ کومکی بهرهٔ دانشاموز نمی‌شود.

(۲) اگر اشاره فهمیده شود، همهٔ راز حلّ مسئله برملا می‌شود وکاری برای انجام دادن دانشاموز باقی نمی‌ماند.

(۳) اشاره طبیعت وماهیّت خاص دارد. حتّیٰ اگر دانشاموز بتواند از آن در حلّ مسئلهٔ کنونی بهره‌برداری کند، چیزی برای حلّ مسائل آینده نصیب او نمی‌شود. پرسش آموزنده نیست.

(٤) حتّیٰ اگر اشاره را خوب بفهمد، دانشاموز به‌ندرت می‌تواند از این مطلب آگاه شود که معلّم چگونه به اندیشهٔ آن افتاد که چنین پرسشی را طرح کند، و چگونه خود وی می‌تواند چنین سؤالی را بیابد و از خود بپرسد؟ بنابراین یک غافلگیری غیرطبیعی برای او پیدامی‌شود، همچون در آن حالت که حقّه‌بازی یک خرگوش را از درون یک کلاه بیرون می‌آورد، و این واقعاً آموزنده نیست.

هیچ‌یک از این اعتراضات نمی‌تواند برضدّ روشی که در بخش ۱۰ یا در بخش ۱۵ به کار رفت، اقامه شود.

مثالهای بیشتر

۱۸. مسئله‌ای از ساختمان هندسی. مربّعی را در یک مثلّث داده شده محاط کنید. دورأس مربّع باید بر روی قاعدهٔ مثلّث باشد و دورأس دیگر بر روی دوضلع دیگر آن، یک رأس بر روی هرضلع.

«مجهول چیست؟»

«یک مربّع.»

«داده‌ها چیست؟»

«یک مثلّث معلوم است و چیزی جز آن دانسته نیست.»

«شرط چیست؟»

«چهار رأس مربع باید بر روی اضلاع مثلّث باشد: دورأس برقاعده و از دو رأس دیگر هریک بر روی یکی از دوضلع دیگر.»

«آیا تأمین این شرطها ممکن است؟»

«گمان می‌کنم چنین باشد. مطمئن نیستم.»

«ممکن است حلّ این مسئله به نظرشما آسان نباشد. اگرنمی‌توانید مسئلهٔ طرح شده را حل کنید، در آن بکوشید که پیش از آن مسئله‌ای وابستهٔ به آن را حل کنید. آیا می‌توانید جزئی از شرط را تأمین کنید؟»

«مقصود شما از جزئی از شرط چیست؟»

«توجّه داشته باشید که شرط مربوط به همهٔ رأسهای مربّع است. مربّع چند رأس دارد»؟

«چهار».

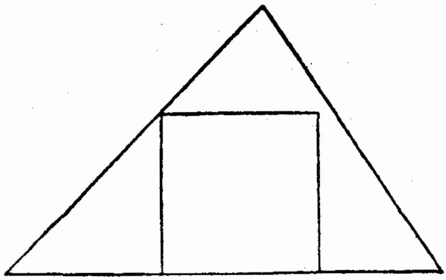
«جزئی از شرط به کمتر از چهار رأس مربوط است. تنها جزئی از شرط را نگاه دارید و باقی آن را حذف کنید.تأمین کدام جزء از شرط آسان است؟»

«ترسیم مربّعی با داشتن دورأس بر محیط مثلّث- یا حتّیٰ مربّعی با داشتن سه رأس بر محیط مثلّث!»

«یک شکل بکشید.»

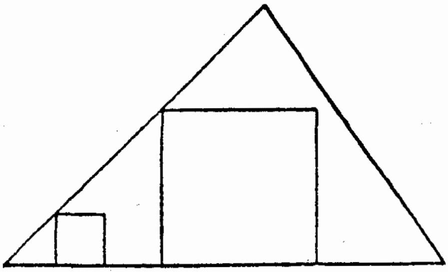
دانشجو شکل ۲را ترسیم می‌کند.

«شما تنها جزئی از شرط را نگاه داشته و جزءِ دیگر آن را حذف کرده‌اند. تا اینجا چه اندازه از مجهول معلوم شده است؟»



شکل ۲

«اگر تنها سه رأس از مربّع بر محیط مثلث باشد، مسئله حل نشده است.»
«بسیار خوب! یک شکل بکشید.»
دانشجو شکل ۳ را ترسیم می‌کند.



شکل ۳.

«مربّع، بنا به گفتهٔ شما، باجزئی از شرط که نگاه داشته‌اید معلوم نمی‌شود. چگونه ممکن است تغییر کند؟»

......

«سه رأس از مربّع شما برمحیط مثلّث است، ولی رأس چهارم هنوز برآنجا که باید قرار گرفته باشد نیست. مربّع شما، چنانکه خود گفتید، نامعلوم است ومی‌تواند تغییر کند. رأس چهارم آن نیز چنین است. **چگونه تغییر می‌کند؟**»

......

«اگر می‌خواهید، آن را آزمایش کنید. مربّعهای بیشتری را باداشتن سه رأس برمحیط مثلّث، همچون دو مربّع سابق داخل شکل، رسم کنید. مربّعهای کوچک وبزرگ بکشید. به نظر شما مکان هندسی رأس چهارم مربّع کجا است؟ **چگونه تغییر می‌کند؟**»

معلّم با این پرسشها شاگرد را به اندیشهٔ حلّ مسئله نزدیک کرده است. اگر شاگرد شایستهٔ آن باشد که به حدس مکان هندسی رأس چهارم را بر روی یک خطّ راست تشخیص دهد، به نتیجه رسیده است.

۱۹. مسئله‌ای ثابت کردنی. دوزاویه برروی دوسطح متفاوت قرار دارند، به صورتی که هر ضلع از یکی موازی با ضلع نظیر خود از دیگری است وجهتی همانند آن دارد. ثابت کنید که این دو زاویه با یکدیگر برابرند.

آنچه می‌خواهیم ثابت کنیم قضیّه‌ای اساسی از هندسهٔ فضایی است. این مسئله ممکن است برای دانشجویانی طرح شود که از هندسهٔ مسطّحه آگاهی کامل دارند وبامعدودی از واقعیّتهای هندسهٔ فضایی که مقدّمهٔ قضیّهٔ کنونی در کتاب اصول اوقلیدس است آشنا هستند. (قضیّهٔ ۱۰ از مقالهٔ یازدهم اوقلیدس.) نه‌تنها پرسشها وپیشنهادهای نقل شدهٔ از فهرست ما باحروف ایرانیک چاپ شده بلکه چیزهای دیگر متناظر با آنها نیز چنین است، همچون «مسئلهٔ اثباتی» که متناظر با «مسئلهٔ یافتنی است». (از تناظر به صورتی منظّم در **مسئلهٔ یافتنی، مسئلهٔ ثابت‌کردنی** ۵و ۶ بحث شده است.)

«فرض چیست؟»

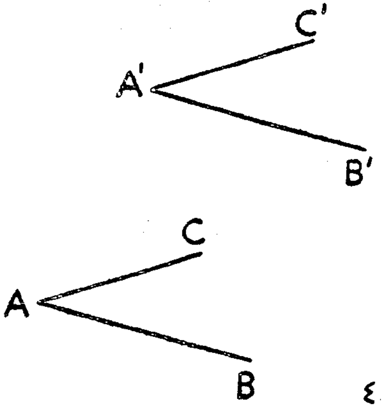
«دوزاویه در سطحهای متفاوت قرار دارد. هر ضلع از یکی موازی با ضلع متناظر از دیگری است وهمان جهت را دارد.»

«نتیجه چیست؟»

«دوزاویه با یکدیگر برابرند.»

«یک شکل رسم کنید. علامات شایسته به کار برید.»

دانشاموز خطوط شکل ٤ را رسم می‌کند و کمابیش با کمک معلّم حروف به کار رفتهٔ در شکل را برمی‌گزیند.



شکل ٤

«فرض چیست؟ خواهش می‌کنم آن را با کاربرد حروف و علامات بیان کنید.»

« A و B و C در سطح A' و B' و C' قرار ندارند. و $A'B' \parallel AB$ و $A'C' \parallel AC$. نیز AB همان جهت $A'B'$ را دارد و AC همان جهت $A'C'$ ».

«نتیجه چیست؟»

$$“\angle BAC = \angle B'A'C'.”$$

«به نتیجه نظر کنید! و در این اندیشه بیفتید که آیا با قضیهٔ آشنایی که همین نتیجه یا نتیجه‌ای مشابه آن داشته است برخورد کرده‌اید.»

«اگر دو مثلّث متشابه یکدیگر باشند، زاویه‌های متناظر در آنها با یکدیگر برابر است.»

«بسیار خوب! در اینجا قضیّه‌ای وابستهٔ به قضیّهٔ شما که قبلاً به اثبات رسیده است وجود دارد. می‌توانید آن را مورد استفاده قرار دهید؟»

«چنین فکر می‌کنم ولی هنوز نمی‌دانم چگونه.»

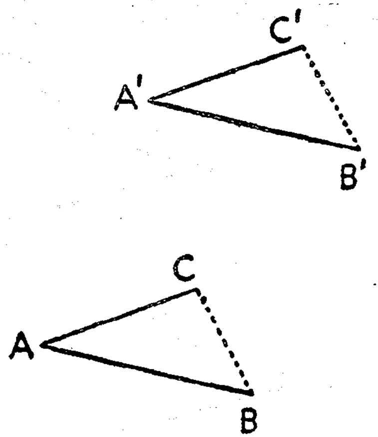
«آیا می‌توانید یک جزء کمکی وارد کار کنید تا استفادهٔ از قضیّه دانسته را ممکن سازد؟»

. . . . .

«بسیار خوب، قضیّه‌ای که شما نقل کردید دربارهٔ دو مثلّث متشابه است. آیا در شکل خود هیچ مثلّثی دارید؟»

«نه، ولی می‌توانم وارد کنم. برای این کار B را به C و B' را به C' متصل می‌کنم. سپس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را خواهیم داشت.»

«کار درستی است. ولی این مثلّثها به چه کار می‌خورد؟»



شکل ۵

«برای اثبات این نتیجه که $\angle BAC = \angle B'A'C'$».

«خوب! اگر بخواهید این را ثابت کنید، به چه نوع مثلّثهایی نیاز دارید؟»

«مثلّثهای متساوی‌السّاقین. البتّه B و C و B' و C' را چنان انتخاب می‌کنم که

$$AB = A'B', AC = A'C'$$

«بسیار خوب! اکنون چه چیز را می‌خواهید ثابت کنید؟»

«می‌خواهم متشابه‌بودن مثلّثها را ثابت کنم.»

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

که اگر این را به اثبات برسانم، بلافاصله نتیجهٔ $\angle BAC = \angle B'A'C'$ از آن به دست می‌آید.»

«خیلی خوب! هدف تازه‌ای درنظر دارید و می‌خواهید به نتیجه‌ای تازه برسید. به نتیجه نگاه کنید! ودراندیشهٔ یافتن یک قضیّهٔ آشنا بیفتید که عین این نتیجه یا چیزی شبیه آن را داشته باشد.»

«دومثلّث که در آنها هریک ازسه ضلع یکی با یکی ازسه ضلع دیگری برابر باشد، بایکدیگر متشابهند.»

«درست. شما می‌توانستید قضیّهٔ بدتری را انتخاب کنید. اکنون قضیّه‌ای در برابر خود دارید که پیشتر به اثبات رسیده و با قضیّهٔ ثابت کردنی وابستگی دارد.»

«اگر می‌دانستم که $BC = B'C'$ است، می‌توانستم از آن استفاده کنم.»

«صحیح است. پس اکنون هدف شما چیست؟»

«اثبات این که $BC = B'C'$ است.»

«دراندیشهٔ یافتن قضیّه دانسته‌ای باشید که عین این نتیجه یامشابه آن را داشته باشد.»

«آری، از قضیّه‌ای آگاهم که پایان آن چنین است ‹... بنابراین دوخطّ با یکدیگر برابرند.› ولی درست به کار نمی‌خورد.»

«آیا می‌شود جزئی کومکی به آن بیفزایید که استفاده کردن ازآن را امکانپذیر سازد؟»

....

«ببینید! چگونه می‌توانید در آن هنگام که ارتباطی میان BC و $B'C'$ وجود ندارد، ثابت کنید که BC برابر با $B'C'$ است؟»

....

«آیا از فرض استفاده کردید؟ فرض چه بود؟»

«فرض این بود که $AB \parallel A'B'$ و $AC \parallel A'C'$ بلی، البتّه باید ازاین فرض استفاده

کنم.»

«آیا ازهمهٔ فرض استفاده کردید؟ شما می‌گویید که $A'B' \parallel AB$. آیا همهٔ آنچه راجع به‌خطها می‌دانید همین است؟»

«نه، AB همچنین، بنابرساختمان، مساوی $A'B'$ است. این دوخطّ موازی با یکدیگر وباهم برابرند. و AC و $A'C'$ نیز چنین است.»

«دوخطّ متوازی ومتساوی- هیئتی جالب توجّه است. آیا آن را پیشتر دیده‌اید؟»

«البتّه! آری! متوازی‌الاضلاع! بهتر است A را به A' و B را به B' و C را به C' وصل کنم.»

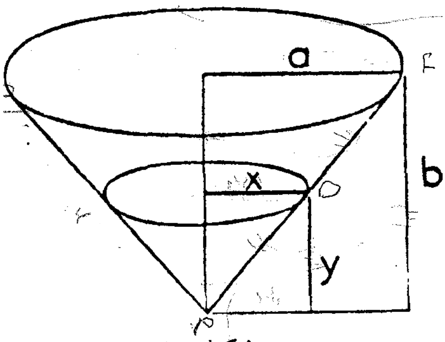
«این فکر بدنیست. حالا چند متوازی‌الاضلاع درشکل دارید؟»

«دوتا. نه، سه تا، نه، دوتا. مقصودم این که از روی دوتا می‌توانیم مستقیماً ثابت کنیم که آن دومتوازی‌الاضلاع است. سومی به شکل متوازی‌الاضلاع به نظر می‌رسد: امیدوارم بتوانم ثابت کنم که آن نیز متوازی‌الاضلاع است. و آن وقت برهان اثبات قضیّه به پایان خواهد رسید!»

از روی پاسخهایی که دانشاموز پیش از این داده، این نتیجه را می‌توانستیم بگیریم که وی دانشاموزی باهوش است. ولی با آخرین پاسخ شکّی در این امر باقی نمی‌ماند.

این دانشجو می‌تواند نتیجهٔ ریاضی را به حدس معلوم کند و آشکارا فرق میان اثبات و حدس را تشخیص دهد. وی همچنین می‌داند که اندازهٔ موجّه بودن حدسها با یکدیگر متفاوت است. وی واقعاً از کلاس درس ریاضی خود بهره گرفته است، تجربه‌ای واقعی در حلّ مسائل دارد و می‌تواند یک اندیشهٔ خوب را اکتشاف کند و آن را مورد بهره‌برداری قرار دهد.

۲۰. مسئله‌ای مربوط به نرخ. جریان آب به نرخ (میزان) r وارد ظرفی مخروطی شکل می‌شود که قاعدهٔ آن افقی است و رأس مخروط در زیر آن قرار گرفته است، شعاع



شکل ٦

قاعده a و ارتفاع مخروط b است. نرخ بالا آمدن آب را در مخروط درآن هنگام که عمق آب به y رسیده است تعیین کنید. و سپس با فرض ٤ متر= a و ۳ متر= b و ۲ متر r = مکعّب در دقیقه و۱ متر= y، اندازهٔ عددی مجهول r را به دست آورید. (شکل ٦).

«شعاع قاعدهٔ مخروط ٤ متر= a و ارتفاع مخروط ۳ متر= b و نرخ ریزش آب مخروط ۲ متر مکعّب در دقیقه= r و عمق آب در مخروط در لحظهٔ معیّنی برابر ۱ متر= y است.»

«درست. صورت مسئله ظاهراً این فکر را به ما القا می‌کند که باید موقّتاً از اندازه‌های عددی a و b و r و y چشم بپوشید و تنها در پایان کار و پس از به دست آوردن عبارت نمایندهٔ مقدار مجهول به حروف مقادیر عددی داده شده را در آن جای دهید و اندازهٔ عددی را به دست آورید. من همین طرز تصوّر را دنبال می‌کنم. حال بگویید که مجهول چیست؟»

« نرخ بالا آمدن سطح آب در آن هنگام که عمق y متر است.»

«مقصود چیست؟ آیا می‌توانید مطلب را به صورتی دیگر بیان کنید؟»

«مقصود میزان و نرخی است که عمق آب بر حسب آن افزایش پیدا می‌کند».

«آن چیست؟ آیا باز هم می‌توانید منظور خود را به شکل دیگر اظهار دارید؟»

«نرخ تغییر عمق آب.»

«درست است، نرخ تغییر y. ولی نرخ تغییر چیست؟ به تعریف بازگردید».

«مشتق عبارت از نرخ تغییر تابع است.»

«صحیح. مگر y یک تابع است. آیا می‌توانید تغییر y را تصوّر کنید؟»

«آری، y یعنی عمق آب با گذشت زمان افزایش پیدا می‌کند.»

«پس y تابعی از چه چیز است؟»

«از زمان t.»

«خوب، علامات شایسته را وارد کار کنید. نرخ تغییر y را چگونه با علایم ریاضی نمایش می‌دهید؟»

«با $\frac{dy}{dt}$.»

«بسیار خوب، پس مجهول شما این است. باید آن را بر حسب a و b و r و y بیان کنید. ضمناً یکی از داده‌ها نرخ است. کدام یک؟»

«r نرخی است که با آن آب وارد ظرف می‌شود.»

«آن چیست؟ آیا می‌توانید مقصود خود را باعبارتی دیگر بیان کنید؟»

«r نرخ تغییر حجم آب در ظرف است.»

«آن چیست؟ آیا باز هم می‌توانید مطلب را به شکلی دیگر عرضه دارید؟ آن را با علامتهای ریاضی چگونه نمایش می‌دهید؟

«با $r = \frac{dV}{dt}$.»

« V چیست؟»

«حجم آب ظرف در زمان t»

«خوب، بنابراین باید $\frac{dy}{dt}$ را بر حسب a و b و $\frac{dV}{dt}$ معیّن کنید. این کار را چگونه به انجام می‌رسانید؟»

.....

«حال که نمی‌توانید مسئلهٔ طرح شده را حل کنید، بکوشید تامسئله‌ای وابستهٔ به آن را حل کنید. اگر میان $\frac{dy}{dt}$ وداده‌های مسئله ارتباطی نمی‌بینید، بکوشید تا ارتباط ساده‌تری پیدا کنید که برای شما عنوان سنگ پرش وسط نهر داشته باشد.»

.....

«آیا نمی‌بینید که ارتباطهای دیگری وجود دارد؟ مثلاً آیا y و V مستقلّ از یکدیگر نیستند؟»

«نه. هنگامی که y افزایش پیدا می‌کند، V نیز باید افزایش یابد.»

«پس ارتباط وجود دارد. ارتباط چیست؟»

«بسیار خوب، V حجم مخروطی با ارتفاع y است ولی هنوز از شعاع قاعده اطّلاع ندارم.»

«باوجود این باید آن را درنظر بگیرید. آن را چیزی مثلاً x بنامید.»

« $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$ »

«صحیح. هنگامی که عمق y آب افزایش یابد، شعاع سطح آزاد x نیزافزایش پیدا می‌کند.»

«بنابراین، ارتباطی موجود است. ارتباط چیست؟»

«البتّه، از مثلّثات متشابه چنین به دست می‌آید.

$$x : y = a : b.$$ »

«یک ارتباط دیگر نیز می‌بینید. نمی‌خواهم از آن بهره برداری کنید. از یاد نبرید که می‌خواستید ارتباط میان V و y را به دست آورید.»

«چنین داریم:

$$x = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^3}{3b^2} \cdot$$ »

«بسیار خوب، این به یک سنگ پرش میان آب می‌ماند، آیا چنین نیست؟ ولی نباید هدف خود را فراموش کنید. **مجهول چیست؟**»

«$\frac{dy}{dt}$.»

«باید ارتباطی میان $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{dV}{dt}$ و کمّیّتهای دیگر پیدا کنید. و در اینجا شما یک رابطه میان y و V و دیگر کمّیّتها دارید. چه باید کرد؟»

«باید مشتق بگیریم! البتّه!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \frac{dy}{dt} \cdot$$ »

«بسیار عالی! دربارهٔ اندازه‌های عددی چه؟»

«اگر $a=4$ و $b=3$ و $\frac{dV}{dt}=r=2$ و $y=1$ باشد، در آن صورت

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \frac{dy}{dt} \cdot$$ »

فصل دوم. چگونه مسئله را حل کنیم

یک گفتگو

آشنا شدن

از کجا باید آغاز کنم؟ از صورت مسئله آغاز کنید.

چه می‌توانم بکنم؟ تا آنجا که می‌توانید، مسئله را به عنوان یک کلّ و به شکلی روشن در نظر خود مجسّم سازید. در این هنگام در بند جزئیّات نباشید.

از این کار چه سودی بهرهٔ من می‌شود؟ مسئله را می‌فهمید و با آن آشنا می‌شوید و اثر آن را در ذهن خود باقی می‌گذارید. توجّه و دقّت دربارهٔ مسئله همچنین حافظهٔ شما را به کار می‌اندازد و آن را آماده می‌سازد تا نکات مربوط به مسئله را به یاد شما بیاورد.

تلاش برای بهتر فهمیدن

از کجا باید آغاز کنم؟ باز هم از صورت مسئله آغاز کنید. هنگامی آغاز کن که این صورت مسئله در نظرت چندان روشن است و بر ذهنت چندان اثر گذاشته است که می‌توانی مدّت کوتاهی نگریستن به آن را ترک کنی بی‌آنکه ترس گم کردن و از یاد بردن آن را داشته باشی.

چه می‌توانم بکنم؟ بخشهای اساسی مسئلهٔ خود را از هم جدا کن. فرض و نتیجه قسمتهای اساسی یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» است؛ مجهول و داده‌ها و شرط قسمتهای اساسی یک «مسئلهٔ یافتنی» است. به قسمتهای اساسی مسئله بپرداز، و آنها را در ترکیبات مختلف در نظر بگیر، و هر بخش جزئی را با بخشهای جزئی دیگر و به تمام مسئله ارتباط بده.

با انجام دادن این کار چه سودی عاید من می‌شود؟ جزئیّاتی را که محتملاً پس از آن نقشی ایفا خواهند کرد، آماده و روشن می‌سازی.

شکار اندیشه‌های سودمند

از کجا باید آغاز کنم؟ پس از ملاحظه کردن و در نظر گرفتن بخشهای اصلی مسئله. در آن هنگام آغاز کن که، از برکت کار پیشین خودت، بخشهای اصلی به صورت مشخّص تنظیم یافته و به شکلی روشن تصوّر شده باشند، و در آن هنگام که حافظه پاسخگو به نظر می‌رسد.

چه می‌توانم بکنم؟ مسئلهٔ خود را از جوانب گوناگون ملاحظه کن و درصدد یافتن نقاط تماسّی از آن با شناخت و معرفت حاصل شدهٔ پیش از آن باش.

مسئلهٔ خود را از جهات مختلف موردملاحظه قرار دهید. دربارهٔ بخشها ی مختلف آن تأمّل کنید و جزئیّات گوناگون را بیازمایید، و این را به صورت مکرّر و از راههای متفاوت انجام دهید، و جزئیّات را به صورتهای مختلف با یکدیگر ترکیب کنید و از جوانب گوناگون به آنها نزدیک شوید. بکوشید تا برای هر جزئی معنی تازه و برای کلّ آنها تفسیری جدید به دست آورید.

درصدد یافتن پیوندهایی با شناختِ به دست آوردهٔ خود باشید. بکوشید تا در این باره بیندیشید که در موارد مشابه گذشته چه چیز به شما کومک کرده است. بکوشید تا در آن چه در معرض امتحان و آزمایش قرار داده‌اید مطلب آشنایی پیدا کنید، و بکوشید تا از چیزی که می‌دانید اشاره‌ای سودمند به دست آورید.

چه چیز می‌توانم تصوّر و ادراک کنم؟ یک اندیشهٔ مددکار، و شاید یک فکر قطعی که با یک نگاه راه رسیدنِ به پایان کار را به شما نشان می‌دهد.

با یک اندیشهٔ ناتمام چه می‌توانم کرد؟ باید آن را مورد ملاحظه و توجّه قرار دهید. اگر دارای مزیّتی به نظر برسد، باید آن را مدّت بیشتری مورد ملاحظه و مداقّه قرار دهید. اگر قابل اعتماد می‌نماید، باید معلوم سازید که چگونه می‌تواند شما را راهبری کند، و دوباره وضع را در معرض تحقیق و تدقیق قرار دهید. از برکت اندیشهٔ سودمند شما، وضع تغییر پیدا کرده است. وضع جدید را از جهات مختلف ملاحظه کنید و بکوشید تا با شناخت پیشین خود ارتباط برقرار سازید.

با دوباره پرداختن به کار چه چیز بهرهٔ من خواهد شد؟ ممکن است بخت یار شما شود و به اندیشه‌ای دیگر دسترسی پیدا کنید. شاید اندیشهٔ بعدی سر راست شما را به حلّ مسئله راهنمایی کند. شاید پس از اندیشهٔ تازه باز هم به اندیشه‌های دیگر نیازمند باشید. شاید بعضی از افکاری که به نظرتان می‌رسد سبب منحرف شدن شما از راه راست شود، با وجود این باید برای هرفکر تازه‌ای که برایتان پیدامی‌شود،

سپاسگزارباشید، حتّیٰ اگر این فکر بسیار کوچک و مبهم باشد و حتّیٰ برای اندیشه‌های مکمّلی که سبب افزوده شدن مقداری دقّت به افکار مبهم می‌شوند و بعضی ازآنها را اصلاح می کنند. حتّیٰ اگر هیچ اندیشهٔ قابل توجّه تازه‌ای درمدّتی از زمان پیدانشود، اگر طرز تصوّر شما ازمسئله کاملتر و منسجمتر و متجانستر شده یا تعادل بهتر پیداکرده است، باید سپاسگزارباشید.

اجرای نقشه

از کجا باید آغازکنم؟ ازآن اندیشهٔ مایهٔ خوشبختی که شما را به حلّ مسئله راهنماشد. ازآنجا که با اطمینان خاطر این احساس برای شما حاصل شده است که ارتباط اصلی را دریافته‌اید و یقین دارید که برای افزودن جزئیّاتی که مورد نیازاست توانایی دارید.

چه می‌توانم بکنم؟ دریافت خود را محکم کنید. همهٔ عملیّات جبری یا هندسی را که پیشتر فراگرفته‌اید و دخالت آنها را در حلّ مسئله ممکن می‌دانید، وارد کارکنید. ازطریق استدلال یا بینش شهودی یا ترکیبی از هردو، اعتقاد به صحّت هر گام را که برای حلّ مسئله برمی‌دارید برای خود تأمین کنید. اگر مسئله بسیار پیچیده است، باید میان گامهای «بزرگ» و گامهای «کوچک» تفاوت قائل شوید که هر گام بزرگ خود از چند گام کوچکتر ترکیب شده است. نخست به امتحان صحّت گامهای بزرگ بپردازید و پس ازآن به گامهای کوچکتر توجّه کنید.

از چنین کردن چه چیز بهرهٔ من می‌شود؟ عرضه داشتن حلّ مسئله به صورتی که هرگام آن بدون شکّ و تردید درست برداشته شده است.

به عقب نگریستن

از کجا باید آغازکنم؟ از حلّ مسئله که در هرجزء کامل و صحیح است.

چه می‌توانم بکنم؟ به حلّ مسئله از جهات گوناگون نگاه کنید و درصدد یافتن ارتباطهایی با دانش و شناخت پیشین خود برایید.

جزئیّات حلّ مسئله را مورد ملاحظه قراردهید و بکوشید تاآنها را به اندازهٔ امکان ساده کنید؛ دربخشهای پردامنهٔ حل نظرکنید و بکوشید تاآنها را کوتاهتر سازید. سعی کنید تا تمام راه‌حل را به یک نظر ببینید. بکوشید تا به سود بخشهای کوچک یا بزرگ راه‌حلّ آنها را تغییردهید، و آن را روی هم رفته بهتر کنید و به صورت شهودی درآورید تا هرچه بیشتر شکل شهودی پیدا کند و به صورتی طبیعی با شناخت اکتسابی شما سازگار شود. روشی را که راهنمای شما در حلّ مسئله شد مورد مداقّه قراردهید و نکتهٔ

موجود درآن را کشف کنید و از آن در حلّ مسائل دیگر مدد گیرید. نتیجه را مورد تحقیق قراردهید و ازآن در مسائل دیگر بهره‌گیری کنید.

از چنین کردن چه چیزی عاید من می‌شود؟ ممکن است راه‌حلّ تازه و بهتری به دست آورید. احتمال دارد به واقعیّتهای تازه وجالب توجّه دست یابید. در هر حالت، اگر به وارسی و تحقیق عادت کنید و راه‌حلّ خود را بدین ترتیب درمعرض مداقّه قراردهید، مقداری شناخت مرتّب و آراسته و آمادهٔ به کار بردن نصیب شمامی‌شود و قدرت حلّ مسئله در شما رشد پیدا می‌کند.

فصل سوم. واژه نامهٔ کوچک راهیابی

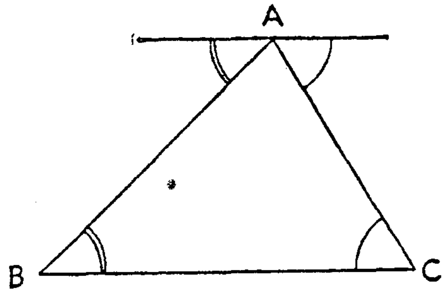
اثباتها برای چیست؟ یک داستان روایتی دربارهٔ نیوتون چنین است: هنگامی که وی دانشجوی جوانی بود، به تحصیل هندسه پرداخت، وبنابررسم زمان خود این درس را با خواندن کتاب «اصول» اوقلیدس آغاز کرد. قضیّه‌ها را می‌خواند وچون می‌دید که همه درست است از خواندن راههای اثبات آنها صرف‌نظر می‌کرد. از این در تعجّب بود که چرا همگان به خود زحمت آن را می‌دهند که چیز واضحی را به اثبات برسانند. ولی، چند سال بعد، نظر خود را عوض کرد و اوقلیدس را مورد ستایش قرار داد.

این داستان ممکن است درست باشد یا درست نباشد، وبا وجود این سؤال وی به جای خود باقی است: چرا باید اثبات قضیّه‌ها را بیاموزیم یا به دیگران تعلیم دهیم؟ کدام یک ترجیح دارد: اصلاً وبه هیچ وجه به اثبات نپرداختن، یا برای هرچیز دلیل آوردن، یا تنها برای بعضی از چیزها به اثبات پرداختن؟

۱. **اثباتهای کامل.** برای شخص منطقی تنها اثباتها و استدلالهای کامل وجود دارد. آنچه می‌خواهد دلیل باشد، باید هیچ شکاف و افتادگی و عدم قطعیّتی از هرگونه نداشته باشد، و اگر جز این باشد دلیل نیست. آیا چنین دلیلهای کاملی را که با یک استاندهٔ (استاندارد) عالی در زندگی روزانه یا در محاکم قضایی یا در علوم فیزیکی مطابق باشد در اختیار داریم؟ به ندرت امکان پیدا شدن چنین دلیلها فراهم می‌آید. بنابراین فهم این‌که به سختی می‌توانیم اندیشه‌ای دربارهٔ چنین دلیل کامل پیدا کنیم.

ممکن است با اندکی مبالغه بگوییم که بشریّت این اندیشه را از یک انسان و یک کتاب آموخته است: از اوقلیدس و کتاب اصولش. به هر صورت خواندن اصول هندسهٔ مسطّحه هنوز بهترین فرصت برای دست یافتن به اندیشهٔ دلیل درست و محکم است.

به عنوان مثال، اثبات این قضیّه را در نظر می‌گیریم: در هر مثلّث مجموع سه زاویهٔ آن برابر با دو زاویهٔ قائمه است[1]. شکل ۷ که یکی از محفوظات ذهنی اغلب ما است، چندان نیازمند توضیح نیست. در آن از رأس A خطّی به موازات قاعدهٔ



شکل ۷

BC رسم شده است. زوایای B و C از مثلّث هر یک با یکی از زوایای تشکیل شدهٔ در A که با علامات مشابه مشاهده می‌شود برابر است، بدان جهت که زوایای متبادله عموماً با یکدیگر مساوی هستند. بدین ترتیب معلوم می‌شود که مجموع سه زاویهٔ مثلّث برابر با مجموع سه زاویهٔ تشکیل شدهٔ در A است که با هم یک خطّ راست می‌سازند یا روی هم رفته برابر با دو قائمه‌اند و بنابراین قضیّهٔ مورد نظر اثبات شده است.

اگر دانشجویی بدون آنکه واقعاً چندین استدلال نظیر این را فهمیده باشد در کلاس ریاضیّات شرکت کند، حق دارد مدرسه و معلّمان خود را سخت ملامت کند. باید میان چیزهای با اهمّیّت کم و بیش تفاوت قائل شویم. اگر دانشاموزی با فلان واقعیّت هندسی خاص نتوانسته باشد آشنا شود، زیان فراوانی نکرده است، ممکن است آن واقعیّت چندان مورد استعمالی در آیندهٔ زندگی او نداشته باشد. ولی اگر از اثباتها و براهین هندسی بیخبر مانده باشد، بهترین و ساده‌ترین مثالهای استدلال و برهان را از دست داده و از دریافت اندیشه و اکتساب ملکهٔ استدلال کردن صحیح بی‌بهره مانده است. بدون این اندیشه، استانده و ملاکی که بتواند با آن دلایل ادّعایی گونه گون را که در زندگی نوین بروی عرضه می‌شود با هم مقایسه کند و درست

۱- جزئی از قضیّهٔ ۳۲ از کتاب اصول اوقلیدس. اثباتی که در اینجا آورده‌ایم از اوقلیدس نیست ولی یونانیان از آن آگاه بوده‌اند.

و نادرست را از یکدیگر باز شناسد، در اختیار نخواهد داشت.

کوتاه سخن آنکه، اگر تعلیم و تربیت عمومی بخواهد اندیشه‌های دلیل شهودی و استدلال منطقی را به دانشجویان ارزانی دارد، بایستی در آن جای خاصّی برای اثباتهای ریاضی در نظر گرفته شود.

۲. دستگاه منطقی. هندسه، بدان‌گونه که در کتاب اوقلیدس عرضه شده، تنها مجموعه‌ای از واقعیّتها نیست بلکه یک دستگاه و منظومهٔ منطقی است. بدیهیّات وتعریفها وقضیّه‌ها به ترتیب من عندی و نامشخّص مرتّب نشده‌اند، بلکه با نظمی خاص در کنار هم واقع شده‌اند. هر قضیّه چنان قرار گرفته است که بتواند بر شالودهٔ بدیهیّات وتعریفات وقضایای یادشدهٔ پیش از آن به اثبات برسد. می‌توانیم به ترتیب قرار گرفتن قضیّه‌ها به عنوان مهمترین دستاورد اوقلیدس، وبه نظام منطقی آنها همچون مهمترین هنر وشایستگی کتاب «اصول» نگاه کنیم.

هندسهٔ اوقلیدس تنها یک منظومهٔ منطقی نیست بلکه نخستین وبزرگترین نمونه از چنین منظومه است که علوم دیگر برای تقلید از آن تلاش کرده‌اند وهنوز هم تلاش می‌کنند. آیا لازم است که علوم دیگر ـ مخصوصاً آنها که، همچون روانشناسی یا علوم قضایی، از هندسه بسیار دورند ـ از منطق مستحکم اوقلیدس تقلید کنند؟ این پرسشی است که بسیار دربارهٔ آن بحث واختلاف نظر پیش آمده است، ولی کسی که بامنظومهٔ اوقلیدسی آشنایی نداشته باشد نمی‌تواند در این بحث وتبادل نظر شرکت کند.

منظومهٔ هندسی باملاط استدلال وبرهان یکپارچگی پیداکرده است. هرقضیّه با یک برهان وابستهٔ به بدیهیّات وتعریفات وقضایای پیش از آن می‌شود. بدون فهمیدن چنین برهانها واستدلالها نمی‌توانیم از جوهر این منظومه آگاهی پیداکنیم.

خلاصه آن که، اگر تعلیم وتربیت عمومی در صدد ارزانی داشتن اندیشهٔ نظام منطقی به دانشجویان است، باید در آن مقام خاصّی برای استدلال هندسی در نظر گرفته شود.

۳. نظام تقویت هوش. نویسندهٔ این کتاب چنان نمی‌اندیشد که فکر برهان شهودی واستدلال دقیق ومنظومهٔ منطقی برای هرکس چیزهای زاید وغیر لازمی باشد. ولی حالاتی هست که براثر نبودن وقت یادلایل دیگر، مطالعه وتحقیق در این اندیشه‌ها لازم به صورت مطلق شمرده نمی‌شود. ولی حتّیٰ در این حالات نیز استدلال ممکن است مطلوب باشد.

از اثباتها دلیل ومدرک به دست می‌آید، آنها نگاه دارنده وپیوندکنندهٔ اجزاء منظومهٔ منطقی به یکدیگرند. مثال پیشتر را که با شکل ۷ ارتباط داشت در نظر بیاورید. با این شکل ثابت شد که مجموع زوایای یک مثلث برابر با °۱۸۰ است. شکل موردنظر این واقعیّت را باواقعیّت دیگر یعنی برابر بودن زوایای متبادلهٔ حاصل از تقاطع یک خطّ راست بادوخطّ موازی پیوستگی داد. واقعیّتهای باهم ارتباط پیدا کرده جالب توجّه‌ترند وبهتر از واقعیّتهای ناپیوستهٔ به یکدیگر درخاطر می‌مانند. بدین ترتیب، شکل ما دوقضیّهٔ هندسی به هم پیوسته را در ذهن ما جایگزین می‌سازد و، بالاخره، شکل وقضیّهٔ آن به صورت یکی از خصوصیّتهای ذهنی ما در می‌آید.

اکنون به بیان حالتی می‌پردازیم که در آن اکتساب اندیشه‌های کلّی ضروری به نظر نمی‌رسد، وتنها اندیشهٔ مربوط به بعضی از واقعیّتها مطلوب است. حتّی در چنین حالات، لازم است واقعیّتها به صورت پیوسته وباگونه‌ای از نظام بیان شود، چه اکتساب موضوعات جدا از یکدیگر سختتر است واین گونه شناختها درمعرض فراموشی قرار می‌گیرد. هر گونه ارتباط که واقعیّتها رابه سادگی و به صورت طبیعی وماندگار به یکدیگر پیوند دهد، در اینجا مطلوب است. منظومه نیازمند آن نیست که بر پایهٔ منطق بنا شود، بلکه تنها باید چنان باشد که به صورتی مؤثّر به حافظه کومک کند؛ باید چیزی باشد که منظومهٔ هوش افزایی نامیده شده است. با وجود این، حتّیٰ از دیدگاه منظومهٔ هوش افزایی محض استدلالها مخصوصاً استدلالهای ساده ممکن است سودمند واقع شود. مثلاً، دانشجو باید این واقعیّت را دربارهٔ مجموع زوایای مثلّث بیاموزد وآن واقعیّت دیگر را در خصوص زوایای متبادله. آیا هیچ تدبیر ووسیله‌ای برای به خاطر سپردن این واقعیّتها ساده‌تر و طبیعیتر ومؤثّرتر از شکل ۱۲ وجود دارد؟

کوتاه سخن، حتّیٰ در آن هنگام که به اندیشه‌های منطقی اهمّیّت خاصّی پیوسته نیست، اثباتها واستدلالها می‌تواند به عنوان وسیله‌ای برای هوش افزایی سودمند واقع شود.

۴. **منظومهٔ کتاب دستورالعمل آشپزی.** از مزایای اثباتها سخن‌گفتیم ولی قطعاً هواخواه آن نیستیم که همهٔ برهانها به صورت «گسترده» عرضه شود. بر خلاف، حالاتی وجود دارد که در آنها به ندرت می‌توان چنین کرد، حالت مهمّی از آن تعلیم حساب دیفرانسیل و انتگرال به دانشجویان رشتهٔ مهندسی است.

اگر بنا باشد که این درس ریاضی بااستانده‌های نوین تعلیم داده شود، نیازمند

براهینی با درجهٔ معینی از دشواری وموشکافی است («اثباتهای اپسیلونی»).ولی مهندسان این شاخه از درس خود را برای کار برد آن می‌خوانند ونه وقت کافی در اختیار دارند ونه متمایل به آن هستند که برای دریافت ریزه کاریها به اثباتهای دور ودراز بپردازند. بنابراین، وسوسهٔ شدیدی برای آن وجود دارد که همهٔ این استدلالها کنار گذاشته شود. ولی اگر چنین کنیم، این درس ریاضی راتاسطح یک کتاب دستور آشپزی پایین آورده‌ایم.

در کتاب آشپزی توصیف دقیق موادّ لازم و روشهای عمل آمده ولی برای نسخه‌ای که به دست داده شده هیچ دلیلی در کتاب دیده نمی‌شود؛ اثبات باقلوا، خوردن آن است. کتاب آشپزی به صورتی کامل درخدمت هدفی است که برای آن نوشته شده. چون دستورها نوشته شده ونیازی به ضبط درحافظه ندارد، به منظومه‌ای منطقی یاهوش‌افزا احتیاجی نیست.

ولی نویسندهٔ یک کتاب درسی حساب انتگرال ودیفرانسیل، یامعلم یک کالج، اگر بخواهد از نزدیک از منظومهٔ آشپزی پیروی کند، نمی‌تواند به هدفی که درنظر دارد برسد. اگر روشهای عملی را بدون ثابت کردن آنها به دانشجویان بیاموزد، روشهای بیدلیل انگیزه‌ای برای فهمیده شدن پیدانمی‌کنند. درصورتی که قاعده رابدون آوردن برهان آن تعلیم دهد، قاعده‌های ناپیوستهٔ به یکدیگر هرچه زودتر فراموش می‌شود. ریاضیّات رانمی‌توان بدان گونه چشید که باقلوا چشیده می‌شود؛ اگر از آوردن هرگونه دلیل صرف نظر شود درس حساب انتگرال به آسانی به صورت فهرست وسیاهه‌ای از اطّلاعات سنگین وهضم ناشدنی درمی‌آید.

۵. **اثباتهای غیرکامل.** بهترین راه برای پرهیز کردن از دو راه نامطلوب که یکی پرداختن به استدلالهای دراز وسنگین است ودیگری تنزّل کردن به سطح دستورهای کتاب آشپزی، ممکن است استفادهٔ معقول از براهین غیرکامل باشد.

برای شخص منطقی دقیق، یک دلیل ناتمام اصلاً دلیل نیست، وقطعاً باید میان اثباتهای غیرکامل با اثباتهای کامل به دقّت تمایز قائل شویم، اشتباه کردن یکی با دیگری بداست، ویکی را به جای دیگری فروختن بدتر. این امر دردناک است که نویسندهٔ کتاب درسی یک دلیل غیرکافی رابه صورتی مبهم، باتردید آشکار میان شرمساری و ادّعای این که دلیل کاملی است، عرضه کند. ولی دلایل غیرکامل ممکن است درآن صورت که درجای مناسب وباشکل بیان مقتضی آمده باشند، سودمند واقع شوند. هدف آنها این نیست که جایگزین دلایل کامل شوند که هرگز چنین چیزی

امکانپذیر نیست بلکه می‌خواهند آنچه را عرضه می‌شود دلچسب ومنسجم سازند.

مثال ۱ -یک معادلهٔ جبری از درجهٔ n ام درست n ریشه دارد. این قضیّه که بنام قضیّهٔ جبری اساسی گاوس نامیده شده، می‌بایستی غالباً به دانشجویانی عرضه شود که آمادگی برای فهمیدن اثبات آن ندارند. ولی این رامی‌دانند که **معادلهٔ درجهٔ اوّل دارای یک ریشه است**ونیز می‌دانند که **معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشه است.**علاوه براین، قضیّهٔ دشوار دارای جزئی است که اثبات آن به آسانی میسّر است وآن این که:**هیچ معادلهٔ از درجهٔ n ام بیش از n ریشهٔ متفاوت با یکدیگرندارد** .آیا این واقعیّتها یک اثبات کامل برای قضیّه اساسی فراهم می‌آورد؟ به هیچ وجه. ولی برای آن کفایت می‌کنند که اندکی توجّه رابه آن جلب کنند وآن راموجّه جلوه‌گر سازند ودرذهن دانشجویان جایگزین سازند که خود هدف عمده است.

۲-حاصل جمع هردو زاویهٔ مسطّحهٔ تشکیل یافته ازیالهای یک زاویهٔ سه وجهی بزرگتر از زاویهٔ مسطّحه سوم است. آشکارا این قضیّه به تصدیق این مطلب منجر می‌شود که **دریک مثلّث کروی مجموع هر دو ضلع بزرگتر از ضلع سوم است.** با توجّه به این گفته طبیعتاً به فکر شباهت موجود میان مثلّث کروی و مثلّث مسطّح می‌افتیم. آیا با این نکات یک دلیل به وجود می‌آید؟ به هیچ‌وجه، ولی به ما کمک می‌کنند که قضیّهٔ طرح‌شده را بفهمیم و آن را به خاطر بسپاریم.

نخستین مثال ما از لحاظ تاریخی جالب‌توجّه است. مدّتی نزدیک ۲۵۰ سال ریاضیدانان به این قضیّهٔ اساسی بدون وجود اثبات کامل معتقد بودند- در واقع، بدون داشتن شالوده‌ای بیش از آنچه در بالا به آن اشاره شد. مثال دوم ما حاکی از **تمثیل** و قیاس تمثیلی به عنوان منبع مهمّی از حدسها است. در ریاضیّات همچون در علوم طبیعی و فیزیکی، اکتشاف غالباً از مشاهده و شباهت و استقراء آغاز می‌شود. این وسایل که به صورتی مطلوب و جالب در ساختن یک برهان راهیابانه به کار رفته باشد،مخصوصاً موردتوجّه فیزیکدانان و مهندسان واقع می‌شود. (رجوع کنید به **استقراء** و **استقراء ریاضی**، ۱ و ۲ و ۳.)

نقش و فایدهٔ اثباتهای غیر کامل تاحدّی از راه مطالعهٔ فرایند حلّ مسائل ما عرضه شده است. بعضی از تجربه‌های حاصل از حل کردن مسائل نشان می‌دهد که نخستین اندیشهٔ یک اثبات غالباً بسیار غیر کامل و ناتمام است. اساسیترین اشاره و عمده‌ترین ارتباط و نطفهٔ دلیل ممکن است در همین جا باشد، ولی جزئیّات باید بعداً به دست آید

که غالباً کاری نیازمند تلاش فراوان است. بعضی از مؤلّفان و البتّه نه همهٔ ایشان، از این موهبت برخوردارند که درست نطفه و جوهر برهان و اندیشهٔ عمدهٔ آن را به ساده‌ترین شکل عرضه می‌دارند، و به ماهیّت جزئیّات باقیمانده اشاره می‌کنند. چنین دلیلی با آن که ناکامل است، ممکن است آموزنده‌تر از دلیلی باشد که با جزئیّات کامل بیان شده است.

خلاصه آنکه، اثباتهای غیرکامل ممکن است همچون گونه‌ای ابزار و وسیلهٔ هوش‌افزایی (ولی البتّه نه به عنوان جانشین دلیل اثباتی کامل) درآن هنگام که هدف انسجام بیان پسندیده است نه قوام منطقی دقیق، به کار روند.

هواخواه اثباتهای غیرکامل‌شدن بسیار خطرناک است. ولی باید افراطهای ممکن را به وسیلهٔ قواعدی در داخل حدودی نگاه داشت. نخست، اگر اثباتی غیرکامل است، باید به توسّط شخصی در جایی به همین عنوان معرّفی شود. دوم یک مؤلّف یا یک معلّم حق ندارد یک دلیل غیرکامل را برای اثبات یک قضیّه به کاربرد مگر آنکه خود از دلیل کامل آن به خوبی آگاه باشد.

و باید اعتراف کرد که عرضه‌کردن یک دلیل ناتمام به صورتی که مطابق ذوق و سلیقهٔ شنونده باشد، اصلاً کار آسانی نیست.

اجرای نقشه. نقشه و برنامه‌ای را تصوّرکردن، با اجراکردن دو چیز متفاوت است. و این نکته درمورد مسائل ریاضی نیز از جهتی خاص صدق می‌کند؛ میان دریافت مسئله و اجراکردن نقشهٔ حلّ آن از لحاظ خصوصیّت کار تفاوتی وجود دارد.

۱. ممکن است به صورت موقّتی و مجاز از بعضی از براهین پیش از طرحریزی آخرین دلیل استفاده کنیم، به همان گونه که در ضمن ساختمان یک پل سیمانی چوب‌بستهایی به کار می‌بریم. ولی هنگامی که کار به اندازهٔ کافی پیش‌رفت، چوب‌بستها را برمی‌داریم و از آن پس پل قابلیّت آن را دارد که بر سر پای خود بایستد. به همین گونه، در آن هنگام که در حلّ مسئله به اندازهٔ کافی پیش رفتیم، هرگونه دلیل امتحانی را کنار می‌گذاریم و نتیجه می‌بایستی تنها به توسّط برهان دقیق و محکم مورد تأیید واقع شود.

در طرح نقشهٔ حلّ مسئله، نباید ازاینکه دلیل تنها صورت ظاهر قابل قبول دارد و راهیابانه است بیمناک باشیم. هر چیز که ما را به اندیشهٔ صحیح رهبری کند درست است، ولی در آن هنگام که اجرای نقشهٔ حلّ مسئله را آغاز کرده‌ایم، ایستگاه ما تغییر

می‌کند و تنها باید براهین دقیق و نتیجه‌بخش را مورد استفاده قرار دهیم.

در ضمن اجرای نقشهٔ حلّ مسئله هرگام را که برمی‌دارید امتحان و وارسی کنید. **آیا آشکارا می‌بینید که گام برداشته شده درست بوده است؟**

هر چه با زحمت بیشتر کار وارسی گامها در ضمن اجرای نقشه عملی شود، بهتر و آزادانه‌تر می‌توانیم از استدلال راهیابانه در ضمن طرحریزی نقشهٔ مسئله استفاده کنیم.

۲. باید توجّهی به ترتیبی که با آن ترتیب به اجرای جزئیّات نقشهٔ خود می‌پردازیم داشته باشیم، مخصوصاً در آن هنگام که مسئلهٔ ما مسئله‌ای پیچیده باشد. هیچ امر جزئی را نباید از نظر دور بداریم و می‌بایستی رابطهٔ هر جزئی را که در برابر خود داریم با تمام مسئله به خوبی بفهمیم و از دیدن ارتباط میان گامهای اساسی غافل نمانیم. بنابراین باید با نظم شایستهٔ خاصّ در اجرای نقشه پیش برویم.

مخصوصاً، رسیدگی به جزئیّات کوچک پیش از اطمینان پیدا کردن از این امر که گامهای عمدهٔ برهان صحیح و سالم است، کاری نامعقول است. اگر شکاف و شکستی در خطّ عمدهٔ برهان مشاهده می‌شود، وارسی کردن این یا آن امر جزئی کاری بیهوده است.

ترتیب کار کردنِ بر روی جزئیّات برهان ممکن است با ترتیبی که آنها را اختراع کرده بودیم بسیار تفاوت داشته باشد؛ و ترتیبی که با آن جزئیّات عرضهٔ قطعی را در پاکنویس یادداشت می‌کنیم نیز ممکن است به صورتی دیگر باشد. کتاب اصول اوقلیدس جزئیّات برهان را با ترتیبی منظّم و ثابت عرضه می‌دارد که غالباً تقلید شده و غالباً مورد خرده‌گیری قرار گرفته است.

۳. در طرز بیان اوقلیدس همهٔ برهانها در یک جهت پیش می‌رود: از داده‌ها به مجهول «در مسائل یافتنی» و از فرض به نتیجه «در مسائل ثابت کردنی». هر عنصر از خطّ و نقطه و جز آن باید به درستی از داده‌ها یا از عناصری استخراج شده باشد که صحیحاً از گامهای پیشتر برداشته به دست آمده بوده است. و ادّعای تازه می‌بایستی به درستی از روی فرض یا از روی ادّعای به ثبوت رسیدهٔ در گامهای پیشتر استخراج شده و به اثبات رسیده باشد. هر عنصر تازه و هر ادّعای تازه می‌بایستی در اوّلین بار که مشاهده می‌شود در معرض امتحان و وارسی قرار گیرد و بنابراین تنها یک بار چنین امتحانی دربارهٔ آن صورت می‌گیرد؛ می‌باید تمام توجّه خود را به گام حاضر معطوف داریم و به آن نیاز نداریم که به عقب نگاه کنیم یا به طرف پیش نظر داشته باشیم. آخرین عنصری که باید استنتاج شدن آن را امتحان

کنیم، مجهول است. آخرین ادّعایی که اثبات آن را باید بیازماییم نتیجه است. اگر همهٔ گامها صحیح برداشته شده باشد، آخرین گام و کلّ برهان نیز صحیح خواهد بود.

راه اوقلیدسی عرضه، در آن صورت که هدف آزمایش برهان در جزئیّات است، بدون محافظه‌کاری می‌تواند به درجه‌ای عالی توصیه شود. مخصوصاً، اگر برهان از خود ما و طولانی و پیچیده است، و باید نه‌تنها آن را بیابیم بلکه لازم است هر نقطهٔ آن را امتحان کنیم، و سپس هیچ چیز بهتر از آن نیست که تمام برهان را بر روش اوقلیدسی بر روی کاغذ ثبت کنیم.

با وجود این، روش عرضه داشت اوقلیدسی، در صورتی که هدف انتقال یک برهان به خواننده یا شنونده‌ای است که هرگز پیشتر آن را نشنیده است، این روش را نمی‌توان توصیه کرد. روش اوقلیدس برای نشان دادن هرنقطهٔ خاصّ عالی است ولی برای نشان دادن خطّ اصلی برهان به این اندازه خوب نیست. **خوانندهٔ باهوش** به خوبی می‌تواند از درستی هر گام آگاه شود، ولی برای دریافت منبع و هدف و ارتباط و کلّ برهان با دشواری روبه‌رواست. دلیل این دشواری آن است که طرز بیان اوقلیدسی غالباً در جهتی پیش می‌رود که درست متقابل با جهت طبیعی اختراع است. (عرضه داشت اوقلیدسی دقیقاً از ترتیب «ترکیبی» استفاده می‌کند. رجوع کنید به پاپوس، مخصوصاً شماره‌های ۳ و ۴ و ۵).

۴. بهتر است آنچه را که گفتیم خلاصه کنیم. روش عرضهٔ اوقلیدسی که دقیقاً از داده‌ها به مجهول و از فرض به نتیجه پیش می‌رود، برای امتحان کردن برهان در جزئیّات آن کامل است، ولی از مفهوم ساختن خطّ اساسی برهان دور است.

بسیار مطلوب است که دانشجویان براهین خود را با روش اوقلیدسی آزمایش کنند، و از داده‌ها به طرف مجهول پیش بروند و هر گام را وارسی و امتحان کنند، هرچند انجام دادن هیچ عملی از این‌گونه نباید صورت اجباری داشته باشد. امّا چندان مطلوب نیست که استاد ناگزیر از آن باشد که براهین بسیاری را با روش اوقلیدسی محض عرضه کند، هرچند عرضه داشت اوقلیدسی ممکن است پس از بحثی بسیار سودمند واقع شود که در آن، بدان سان که در این کتاب سفارش شده‌دانشجو با رهبری استاد اندیشهٔ اصلی حلّ مسئله را با هراندازه استقلال بیشتر که ممکن باشد پیدا کند. همچنین روش مورد قبول بعضی از کتابهای درسی پسندیده و مطلوب است که در آنها نخست یک طرح شهودی از اندیشهٔ اصلی عرضه می‌شود و پس از آن جزئیّات بنا بر ترتیب عرضهٔ اوقلیدسی می‌آید.

۵. ریاضیدان دقیق و باوجدان که می‌خواهد خود را به درست بودن آنچه گفته و ثابت کرده است متقاعد سازد، در آن می کوشد که به شکل شهودی به آن نظر کند و یک برهان صوری برای آن بیاورد. **آیا به اطمینان می‌توانید درستی آن را مشاهده کنید؟ آیا می‌توانید صحّت آن را به ثبوت برسانید؟** ریاضیدان باوجدان در این مورد همچون کدبانویی است که با شرافت و درستکاری برای خرید به بازار می‌رود. برای این که از کیفیّت چیزی که می‌خواهد بخرد آگاه شود، دوست دارد که آن را ببیند و لمس کند. بینش شهودی و برهان صوری دو راه مختلف ادراک حقیقت است که احساس کردن اشیاء مادّی از طریق دوحسّ دیدن ولمس کردن است.

بصیرت شهودی ممکن است با شتاب باشد و بیشتر از برهان صوری حاصل شود. هر دانشجوی باهوش، بدون داشتن شناخت منظّمی از هندسه فضایی می‌تواند به خوبی این مطلب را درک کند که اصطلاحاتی را که در جملهٔ دو خطّ راست موازی با خطّ راست سوم خود با یکدیگر متوازیند را به خوبی فهمیده است (سه خط ممکن است در یک سطح بوده باشد یا چنین نباشد). با وجود این خواندن مقالهٔ ۱۱ از کتاب اصول اوقلیدس آمادگی طولانی و دقیق وهوشمندانه‌ای لازم دارد.

پرداختن به شکل صوری به قواعد منطقی و فرمولهای جبری ممکن است به جایی بسیار دورتر از شهود برسد. در واقع هر کس می‌تواند یکباره این مطلب را دریابد که سه خطّ راست واقع بریک‌سطح که برحسب اتّفاق انتخاب شده‌اند،آن سطح را به هفت ناحیه تقسیم می کنند (تنها ناحیهٔ محدود شدهٔ آن را که به صورت مثلّث است واز تقاطع سه خطّ درست شده در نظر بگیرید) به ندرت کسی قابلیّت تصوّر کردن این مطلب را دارد که، حتّیٰ با به کاربردن تمام توجّه خود، این حقیقت را دریابد که از ۵ سطح اتّفاقی فضا به ٢٦ بخش تقسیم می‌شود. ولی به خوبی می‌توان ثابت کرد که چنین است و دلیل آن هم دراز یا دشوار نیست.

در ضمن اجرای نقشه، هرگام را که برداشته‌ایم آزمایش می‌کنیم. برای امتحان کردن گامها می‌توانیم به بصیرت شهودی اعتماد کنیم یا قواعد صوری منطقی را به‌کار بریم. گاه شهود مقدّم است وگاه استدلال صوری. از این هر دو راه توأماً بهره‌برداری کردن سودمند وجالب است. **آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده درست است؟** آری آن را آشکار و مشخّص می‌بینم. در این صورت شهود تقدّم دارد. ولی آیا استدلال صوری می‌تواند پیشی بگیرد؟ **آیا شما نیز می‌توانید ثابت کنید که آن درست است؟**

کوشش برای اثبات صوری آنچه به شهود دیده شده، و دیدن شهودی آنچه به

شکل صوری به اثبات رسیده، یک تمرین تقویت کنندهٔ عقلی و ذهنی است. بدبختانه در کلاس درس همیشه وقت کافی برای این کار وجود ندارد. مثال مورد بحث قرار گرفته در بخشهای ۱۲و ۱٤ از این لحاظ نمونه است.

آزمون با بُعد به خوبی شناخته شده و وسیله ای سریع و مؤثّر برای وارسی و امتحان فرمولهای هندسی یا فیزیکی است.

۱. برای یادآوری عمل آزمون با بعد، بهتر است مخروط قائم ناقصی با قاعدهٔ دایره‌ای را در نظر بگیریم که در آن:

R شعاع قاعدهٔ تحتانی،

r شعاع قاعدهٔ فوقانی،

h ارتفاع مخروط ناقص و

S وسعت مساحت سطح جانبی آن است.

اگر R و r و h معلوم باشند، S به آسانی از این فرمول به دست می‌آید:

$$S = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

که می‌خواهیم آزمون به وسیلهٔ بُعد را دربارهٔ آن انجام دهیم.

بعد یک کمّیّت هندسی به آسانی قابل دیدن است و R و r و h طولها ی هستند که اندازهٔ آنها با واحد عملی سانتیمتر اندازه گرفته شده و بُعد آنها سانتیمتر cm است. سطح S با سانتیمتر مربّع با بعد cm^2 اندازه گرفته می‌شود. π=۳,۱٤۱۵۹۰۰۰ عدد محض است، اگر بخواهیم برای کمّیّت عددی محض یک بعد قائل شویم، این بعد $cm^0=1$ است.

هرجمله از یک جمع باید بُعدی داشته باشد که همان بُعد حاصل جمع است. بدین ترتیب، R و r و $R + r$ بعد واحد cm دارند. دو جمله $(R - r)^2$ h^2 بعد واحد cm^2 دارند.

بُعد یک حاصل ضرب عبارت از حاصل ضرب ابعاد عوامل آن است و قاعده مشابهی برای نماها وجود دارد. چون به جای کمّیّتها ابعاد آنها را در دو طرف فرمول که مقصودمان امتحان کردن آن است قرار دهیم، چنین خواهیم داشت:

$$cm^2 = 1 \cdot cm \cdot \sqrt{cm^2}.$$

که درست است و این آزمایش هیچ اشتباهی را در این فرمول نشان نمی‌دهد. بنابراین فرمول از امتحان درست بیرون آمده است.

برای مثال دیگر رجوع کنید به بخش ۱٤ و آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟

۲. می‌توانیم امتحان با بُعد را دربارهٔ نتیجه نهایی مسئله یا نتایج متوسّط آن، و نیز در مورد کار خودمان و کار دیگران به کار بریم (که دریافتن اشتباهات و امتحان کردن درستی مقاله‌ها وسیله‌ای بسیار مناسب است)، همچنین می‌توانیم از آن برای امتحان فرمولهایی که به یادآورده‌ایم یا فرمولهایی که حدس می‌زنیم، استفاده کنیم.

اگر $4\pi r^2$ و $4\pi r^3/3$ را برای اندازه‌های سطح و حجم یک کره به خاطر دارید ولی مطمئن نیستید که کدام فرمول مربوط به کدام کمّیّت است، آزمایش با بعد به راحتی رفع تردید می‌کند.

۳. امتحان با بعد در فیزیک حتّیٰ از هندسه اهمّیّت بیشتر دارد.

آونگی «ساده» را درنظر می‌گیریم که عبارت است از جسم سنگینی آویخته به وسیلهٔ یک سیم که طول آن تغییر ناپذیر است و وزن آن قابل اغماض. فرض کنیم l طول سیم و g شتاب گرانشی و T دورهٔ نوسان آونگ باشد.

ملاحظات مکانیکی نشان می‌دهد که T تنها به l و g بستگی دارد. ولی آیا شکل این وابستگی چگونه است؟ ممکن است فرمول ذیل را به خاطر بیاوریم یا حدس بزنیم.

$$T = cl^m g^n$$

که در آن c و m و n مقادیر ثابت عددی را نمایش می‌دهند . یعنی، چنان فرض می‌کنیم که T متناسب با قوای l^m و g^n از l و g است.

به ابعاد نگاه می‌کنیم. چون T زمان است با ثانیه اندازه گرفته می‌شود و بُعد آن ثانیهٔ sec است. بُعد l با cm معرّفی می‌شود و بُعد شتاب g با $cm\ sec^{-2}$ و بُعد مقدار ثابت عددی c برابر با ۱ است. چون بُعدها را در فرمول احتمالی آونگ قرار دهیم، چنین خواهیم داشت :

$$sec = 1 \cdot (cm)^m\,(cm\ sec^{-2})^n$$

یا

$$sec = (cm)^{m+n}\,sec^{-2n}.$$

حال چون باید نماهای واحدهای cm و sec در دو طرف معادله با یکدیگر برابر

باشد و بنابر آن

$$0 = m + n \qquad 1 = -2n$$

پس

$$n = -\frac{1}{2} \qquad m = \frac{1}{2}.$$

می‌شود و در نتیجه فرمول آونگ بدین صورت درمی‌آید.

$$T = cl^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}} = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

آزمون با بعد در این حالت چیزهای فراوان نتیجه داد، ولی نمی‌تواند هر چیز را نتیجه دهد. نخست، هیچ اطّلاعی در بارهٔ مقدار ثابت c (که در حقیقت 2π است) در اختیار ما نمی‌گذارد. دوم، هیچ اطّلاعی در خصوص حدود صحّت به دست نمی‌دهد؛ این فرمول تنها برای نوسانهای با دامنهٔ کوچک آونگ و تنها به صورت تقریبی صحّت دارد (برای نوسانات «بینهایت کوچک» صحیح است). با وجود این محدودیّتها، در آن شک نیست که در نظر گرفتن ابعاد به ما این اجازه را داد که به صورتی سریع و با کمترین وسایل مقدّماتی، یک جزء اساسی نتیجه را که رسیدن به آن مستلزم داشتن وسایل پیشرفته است پیشگویی کنیم. و در بسیاری از حالات مشابه چنین است.

استاد ریاضی سنتی در افسانه‌های معمولی به صورت انسانی گیج و پریشان حواس جلوه‌گر می‌شود. معمولاً در میان مردم با یک چتر گم شده در هر دو دست خود دیده می‌شود. چنان ترجیح می‌دهد که رو به تختهٔ سیاه کلاس و پشت به شاگردان داشته باشد. می‌نویسد a و می‌خواند b در صورتی که مقصودش c است، ولی باید d باشد. بعضی از گفته‌های وی از نسلهای پیاپی به یکدیگر انتقال یافته است.

«برای حل کردن این مسئلهٔ دیفرانسیلی باید چندان به آن نگاه کنید تا راه حل برای شما آشکار شود.»

«این چندان به صورت کامل کلّی است که هیچ کاربرد مخصوصی از آن امکانپذیر نیست.»

«هندسه فنّ استدلال درست بر روی اشکال نادرست است.»

«روش من برای فایق آمدن بر دشواری، گشتن در پیرامون آن است.»

«اختلاف میان روش و تدبیر و شیوه (device) در آن است که تدبیر را دوبار (twice) به کار می‌برید.»

پس از این همه، شما می‌توانید چیزی از این استاد سنّتی ریاضی بیاموزید. باید آرزو کنیم که آن معلّم ریاضی که شما نتوانید از او چیزی بیاموزید سنّتی نشود.

استدلال راهیابانه. استدلالی است که نه به عنوان قطعی و نهایی بلکه تنها به عنوان موجّه‌نما و موقّتی در نظر گرفته می‌شود، و هدف آن کشف کردن راه‌حلّ مسئلهٔ حل‌کردنی است. غالباً به آن نیازمندیم که از استدلال اکتشافی و راهیابانه استفاده کنیم. هنگامی به یقین کامل می‌رسیم که تمام حلّ مسئله را پیدا کرده باشیم، ولی پیش از دست یافتن به قطعیّت غالباً باید خود را به یک حدس موجّه‌نما قانع سازیم. ممکن است پیش از رسیدن به حلّ نهایی به یک حلّ موقّتی احتیاج داشته باشیم و هنگامی به استدلال راهیابانه نیاز داریم که می‌خواهیم یک برهان قطعی را بسازیم، بدان گونه که برای برپا داشتن و ساختن پل نخست به چوببستها نیازمندیم.

به **نشانه‌های پیشرفت** نگاه کنید. استدلال راهیابانه غالباً بر پایهٔ استقراء یا تمثیل بنا می‌شود، به **استقراء و استقراء ریاضی**، و **تمثیل** ۸ و ۹ و ۱۰، رجوع کنید.

استدلال راهیابانه به خودی خود خوب است. آنچه بد است ترکیب کردن آن با دلیل قطعی است. آنچه از این هم بدتر است فروختن استدلال راهیابانه به عنوان دلیل قطعی است.

آموختن بعضی از موضوعها، مخصوصاً آموختن حساب انتگرال به مهندسان و فیزیکدانان، در صورتی که ماهیّت استدلال راهیابانه به خوبی فهمیده شده باشد، و مزایا و محدودیّتهای آن صریحاً نشان داده شود، و کتابهای درسی به صراحت براهین راهیابانه را معرّفی کند، اصولاً بهبود پیدا خواهد کرد. استدلالی راهیابانه که با سلیقه و بدون روپوش عرضه شده باشد، سودمند خواهد بود؛ ممکن است زمینه را برای برهان قطعی که خود معمولاً نطفه‌هایی از آن را با خود دارد، آماده سازد. ولی اگر استدلال راهیابانه به صورتی مبهم و با تردید آشکار میان شرمساری و پرادّعایی عرضه شود، محتملاً زیانبخش خواهد بود. رجوع کنید به مادّهٔ **اثباتها برای چیست؟**

استقراء و استقراء ریاضی. استقراء عبارت است از فرایند اکتشاف قوانین کلّی از

طریق ملاحظه و ترکیب کردن نمونه‌های جزئی. در همهٔ علوم و حتّیٰ در ریاضیّات مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. استقراء ریاضی در ریاضیّات تنها برای قضایایی از گونهٔ خاصّ به کار می‌رود. مشترک بودن نام مایهٔ تأسّف است، بدان جهت که ارتباط منطقی بسیار اندکی میان دو فرایند وجود دارد. با این همه ارتباطی عملی مشاهده می‌شود، گاه هر دو روش را باهم به کار می‌بریم. هر دو را با یک مثال نمایش می‌دهیم.

۱- ممکن است بر حسب تصادفی نیک متوجّه آن شویم که

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

که با توجّه به مجذورها و مکعّبها می‌توان به آن شکل بسیار جالب توجّه زیر را داد:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

آیا چگونه چنین چیزی اتّفاق افتاده است؟ آیا غالباً اتّفاق می‌افتد که مجموع مکعّبهای متوالی یک مربّع (مجذور) باشد؟

در طرح این سؤال به طبیعیدانی می‌مانیم که، در تحت‌تأثیر دیدن یک گیاه شگفت‌انگیز یا یک ساختمان زمینشناختی شگفت‌انگیز، به طرح یک سؤال کلّی می‌پردازد. پرسش کلّی ما مربوط به مجموع مکعّبهای متوالی.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

است که مسئلهٔ ما با («نمونهٔ خاصّ» $n=4$) آن طرح شده است.

در برابر پرسش خودمان چه می‌توانیم کرد؟ همان کاری که طبیعیدان می‌کند؛ می‌توانیم حالات خاصّ دیگر را مورد تحقیق قرار دهیم. حالات خاصّ ۳ و $n=2$ ساده‌تر است، و حالت $n=5$ حالت بعدی است. بهتر است برای مراعات یکنواختی و کامل بودن حالت $n=1$ را نیز اضافه کنیم. چون همهٔ این حالات را مرتّب کنیم، به همان گونه که زمینشناس نمونه‌های یک کانی را مرتّب می‌کند، جدول ذیل را به دست خواهیم آورد:

$$\begin{array}{lcrcl}
1 & = & 1 & = & 1^2 \\
1 + 8 & = & 9 & = & 3^2 \\
1 + 8 + 27 & = & 36 & = & 6^2 \\
1 + 8 + 27 + 64 & = & 100 & = & 10^2 \\
1 + 8 + 27 + 64 + 125 & = & 225 & = & 15^2.
\end{array}$$

باور کردن این مطلب دشوار است که همهٔ این حاصل‌جمعهای متوالی مکعّبها تنها برحسب تصادف محض صورت مربّع پیدا کرده باشد. در حالت مشابهی طبیعیدان کمترین شکّی در صحّت قانون کلّی القاء شدهٔ به توسّط حالتهای خاصّ که بیشتر مورد ملاحظه قرار گرفته است نمی‌کند؛ این قاعدهٔ کلّی تقریباً با استقراء به ثبوت رسیده است. ریاضیدان نظر خود را با محافظه کاری بیشتر ابراز می‌دارد، هرچند البتّه اساساً وی نیز به همان‌گونه فکر می‌کند. وی خواهد گفت که قضیّهٔ زیر سخت به وسیلهٔ استقراء القاء شده است:

حاصل جمع نخستین n مکعّب یک مربّع است.

۲- بدین ترتیب به حدسی جالب‌توجّه و به یک قانون که تا اندازه‌ای اسرارآمیز به نظر می‌رسد دست یافتیم. چرا باید مجموعه‌های مکعّبهای متوالی برابر با یک مربّع شود؟ ولی ظاهراً چنین است.

آیا طبیعیدان هنگام رو به رو شدن با چنین وضعی چه می‌کند؟ وی به آزمایش حدس خود ادامه می‌دهد. با این کار ممکن است به راههای گوناگون پژوهش و تحقیق برسد. امکان آن هست که مدارک تجربی دیگری نیز به دست آورد؛ اگر ما هم بخواهیم همین کار را بکنیم، لازم است حالات دیگر..... و ۷و ۶=nو غیر آن را بیازماییم. طبیعیدان واقعیّتهایی را که راهنمای او برای رسیدن به حدس بوده است دوباره امتحان می‌کند؛ آنها را به دقّت با یکدیگر در معرض مقایسه قرار می‌دهد و در آن می‌کوشد که از میان آنها نظمهای ژرفتر و تمثیلهای بیشتر استخراج کند. بهتر است این خطّ تحقیق را دنبال کنیم.

فرض کنید که می‌خواهیم حالت ۵ و ٤ و ۳ و ۲ و ۱=nرا که در جدول خود مرتّب کردیم دوباره مورد آزمایش قرار دهیم. چرا همهٔ این حاصل جمعها مربّع (مجذور) است. مبناهای آنها ۱ و ۳ و ٦ و ۱۰ و ۱۵ است. دربارهٔ این مبناها چه می‌شود گفت؟ آیا نظم ژرفتر و شباهت و تمثیل بیشتر وجود دارد؟ به هر صورت، به نظر نمی‌رسد که افزایش آنها بسیار بیقاعده باشد. چگونه افزایش پیدا می‌کنند؟ اختلاف میان دوجملهٔ متوالی این سلسله خود درحال افزایش است،

۵=۱۰-۱۵ و ٤=٦-۱۰ و ۳=۳-٦ و ۲=۱-۳

که این حاصل تفریقها آشکارا صورت منظّم دارد. در اینجا با شباهتی شگفت انگیز میان مبناهای آن مربّعها پیدا می‌کنیم، و نظم جالب توجّهی در میان اعداد ۱ و ۳ و ٦ و

۱۰ و ۱۵ می‌بینیم:

۱=۱

۳=۱+۲

٦=۱+۲+۳

۱۰=۱+۲+۳+٤

۱۵=۱+۲+۳+٤+۵

اگر این قاعده و نظم کلّی باشد (که باور داشتن به ضدّ آن دشوار است قضیّه ای که به آن گمان برده‌ایم صورت دقیقتر پیدا می‌کند، برای ۰۰۰و ۳و ۲و ۱=n این قانون صادق است:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

۳. قانونی که هم اکنون به آن اشاره کردیم برمبنای استقراء بنا شده است، و روشی که بنابر آن این قاعده ساخته شد، ما را به اندیشه‌ای دربارهٔ استقراء رهبری می‌کند که لزوماً یکجانبه و غیر کامل است ولی پیچ و تاب خورده و از حالت طبیعی بیرون آمده نیست. استقراء در آن می‌کوشد که در آن سوی ملاحظات و مشهودات به نظم و انسجام برسد. آشکارترین اسباب کارهای آن عبارت است از تعمیم و تخصیص و تمثیل. تعمیم آزمایشی با تلاشی آغاز می‌شود که به منظور فهم واقعیّتهای مشاهده شده صورت می‌گیرد، برپایهٔ تمثیل بنا شده و برمبنای حالات خاص بیشتر تأیید یافته است.

از سخن گفتن بیشتر دربارهٔ استقراء خودداری می‌کنیم که از این جهت عدم توافق گسترده‌ای در میان فیلسوفان وجود دارد. ولی این نکته را باید اضافه کنیم که بسیاری از نتایج ریاضی نخست‌بر پایهٔ استقراء بنا شده وسپس به اثبات رسیده است. ریاضیّاتی که با دقّت واستحکام عرضه می‌شود یک علم استنتاجی منظّم است ولی ریاضیّاتی که درحال سازندگی است علمی آزمایشی واستقرایی است.

٤. در ریاضیّات همچون در علوم فیزیکی از مشاهده واستنتاج منطقی برای اکتشاف قوانین کلّی استفاده می‌شود. ولی در اینجا تفاوتی وجود دارد. در علوم فیزیکی، ملاک قدرت واعتباری بالاتر از مشاهده واستنتاج وجود ندارد، ولی در ریاضیّات چنین قدرت واعتباری وجود دارد وآن اثبات دقیق است.

پس از آن که مدّتی به صورت آزمایشی کار کردیم، بهتر آن است که اکنون دیدگاه خود را تغییر دهیم و دقیق باشیم. نتیجه‌ای جالب توجّه کشف کردیم ولی دلیلی که آن

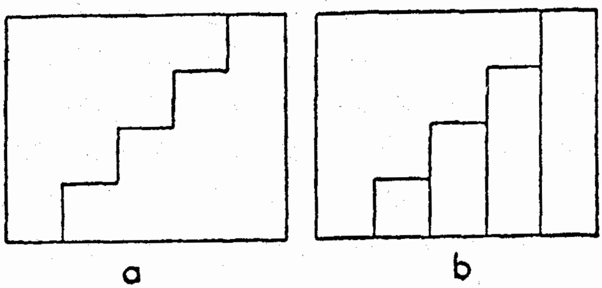
را تأیید می‌کرد تنها موجّه‌نما و استحسانی و آزمایشی و موقّتی وراهیابانه بود، حال می‌خواهیم آن را به صورت قطعی از طریق اثبات واستدلال استقرار بخشیم.

اکنون به یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» رسیده‌ایم: می‌خواهیم نتیجه‌ای را که پیشتر به آن رسیدیم (به شمارهٔ ۲ بالا رجوع کنید) ثابت کنیم یا آن را به صورت قطعی رد کنیم.

به ساده‌تر کردن کوچکی می‌پردازیم. ممکن است بدانیم که

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

به هر صورت ثابت کردن این مطلب آسان است. یک مربّع مستطیل را در نظر بگیرید که ضلعی از آن n است وضلع دیگرش $n+1$ وآن را با خطّی پلّکانی چنانکه در شکل ۸a می‌بینید به دو قسمت برابر تقسیم کنید که با آن حالت $n=4$ مجسّم شده است. وسعت سطح هر یک از این دو نیمهٔ مستطیل برابر است با $1+2+3+\cdots+n$ که برای $n=4$ اندازهٔ آن ۴+۳+۲+۱ می‌شود (شکل ۸b). مساحت تمام مستطیل عبارت از $n(n+1)$ است که هر شکل پلّکانی نیمی از آن را تشکیل می‌دهد.



شکل ۸

می‌توانیم نتایجی را که از راه استنتاج به دست آورده‌ایم، بدین صورت بنویسیم

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۵. اگر اندیشه‌ای دربارهٔ اثبات این نتیجه نداشته باشیم، دست کم می‌توانیم آن را امتحان کنیم. نخستین حالتی را که نیازموده‌ایم وبراساس $n=6$ است امتحان می‌کنیم. برای این اندازهٔ n فرمول بدین صورت در می‌آید

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2$$

و پس از محاسبه معلوم می‌شود که این معادله درست و هریک از دو طرف آن برابر با ۴٤۱ است.

می‌توانیم فرمول را به صورتی مؤثرتر درمعرض آزمایش قرار دهیم. به احتمال قوی این فرمول به صورت کلّی و برای هراندازه n صحّت دارد. آیا اگر برای n درست باشد آیا برای $n+1$ هم درست است؟ همراه بافرمول بدان صورت که پیشتر نوشته شده (ص٥٤) نیز می‌توانیم چنین داشته باشیم:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

و اکنون تنها به یک وارسی و امتحان ساده نیاز داریم. چون از این فرمول، فرمول پیشین را کم کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

که امتحان کردن آن آسان است. طرف راست معادله را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [(n+2)^2 - n^2] = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [n^2 + 4n + 4 - n^2] =$$
$$\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4) = (n+1)^2(n+1) = (n+1)^3.$$

که با این آزمایش فرمول از بوتهٔ امتحان گذشت و صحّت آن به اثبات رسید.

حال می‌خواهیم به روشنی ببینیم که معنی این آزمایش چیست. بدون شک ثابت کردیم که:

$$(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

ولی هنوز نمی‌دانیم که آیا

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

صحیح است یا نه. ولی اگر می‌دانستیم که این فرمول درست بوده است، می‌توانستیم با افزودن معادله‌ای که صحّت آن را بدون شک اثبات کرده بودیم چنین استنتاج کنیم که:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

نیز صحّت دارد که همـان ادّعـای صحّـت برای $n+1$ است. اکنون عملاً می‌دانیم که حدس ما برای ٦ و ۵ و ٤ و ٣ و ٢ و ١ = n درست است. برحسب آنچه هم اکنون گفتیم، چون حدس برای $n=$ ٦ صادق است، لازم است برای $n=$ ٧ نیز صادق باشد، و چون برای $n=$ ٧ صادق باشد لازم می‌آید که برای $n=$ ٨ نیـز صادق بـاشد، و پـس از ٨ بـرای ٩، و همچنین برای دیگر اعداد. چون صحّت آن برای هر n به‌اثبات رسیده، کلّیّت آن به اثبات رسیده است.

٦. راه اثباتی که گذشت می‌تواند همچون الگویی برای بسیاری از حالتهای مـشابه مورد استفاده واقع شود. خطوط اساسی این الگو چگونه است؟

ادّعایی که می‌خواهیم آن را به اثبات برسانیم، باید پیشتر به صورتـی دقیـق بـیان شده باشد. ادّعا باید مبتنی برعدد صحیح n باشد.

ادّعا باید به اندازهٔ کافی «صریح» باشد، بدان سان که امکان آزمودن ایـن کـه آیـا باگذشتن از عدد n به عدد صحیح بلافاصله پس از آن یعنی $n+1$ نیـز صحّـت آن بـرقرار می‌ماند وجود داشته باشد.

اگر دراین آزمایش کامیاب شویم، می‌توانیم تـجربه‌ای را کـه درفـرآیند آزمـایش به‌دست آورده‌ایم مورد استفاده قرار دهیم و چنین نتیجه بگیریم کـه اگـر ادّعـا بـرای n صحّت داشته باشد برای $n+1$ نیز صحیح است. چون به ایـن حـد بـرسیم، کـافی است بدانیم که ادّعا برای $n=$ ١ صادق است، پس از آن برای $n=$ ٢ صادق خـواهد بـود، سپـس برای $n=$ ٣ باگذشتن تدریجی از یک عدد صحیح به عدد صحیح بعدی صحّت ادّعا بـرای هرعدد قابل تصوّر و بنابراین کلّی بودن آن به اثبات می‌رسد.

این فرایند چندان فراوان به کار می‌رود که شایسـته است نامـی بـه آن بـدهیم. می‌توانیم آن را «دلیل از n به $n+1$» یا به‌صورت ساده‌تر «عبور بـه عـدد صحیـح بـعدی» بنامیم. بدبختانه نام اصطلاحی آن «استقـراء ریـاضی» گـذاشته شده است. ایـن نام بنابراقتضای اوضاع و احوالی اتّفاقی به‌وجود آمده است. ادّعای معیّنی که باید بـه‌اثـبات برسد، از منبعی سرچشمه می‌گیرد و از لحاظ منطقی این مطلب مهم نیست که آن مـنبع چه بوده باشد. دربسیاری ازحالات همچون حالتی که به تفصیل دراین جـا مـورد بـحث قرار گرفت، منبع استقراء است و ادّعا به صورت تجربی به دست آمـده است و بـه هـمین جهت اثبات همچون مکمّلی ریاضی برای استقراء تصوّر شده است، و این خود تـوضیحی برای نام است.

٧. دراینجا نکتهٔ دیگری تااندازه‌ای باریک وجود دارد که برای هر کس که خواستار

یافتن دلایل اثباتی باشد اهمّیت دارد. درآنچه گذشت از طریق مشاهده و استقراء، بادو ادّعا، یکی پس از دیگری رو به رو شدیم که از اوّلی درشمارهٔ ۱ بحث کردیم از دومی درشمارهٔ ۲؛ دومی دقیقتر از اوّلی بود. بابحث دربارهٔ ادّعای دوم متوجّه امکان عبور از n به $n+1$ شدیم و از این راه توانستیم به دلیلی از طریق «استقراء ریاضی» برسیم. هنگام بحث دربارهٔ ادّعای نخست، بابیخبر بودن از صحّت و دقّتی که با ادّعای دوم به آن افزوده می‌شود، به ندرت می‌بایستی بتوانیم به چنین دلیلی دسترسی پیدا کنیم. در واقع، ادّعای اوّل دقّت کمتر دارد، و «صراحت» و «ملموس» بودن آن اندک است و کمتر از ادّعای دوم می‌تواند آزمونپذیرباشد. گذشتن از اوّلی به دومی، و از ادّعای کمتر دقیق و صریح به ادعای دقیقتر و صریحتر، گام آماده‌کنندهٔ مهمّی برای رسیدن به دلیل نهایی بود.

این وضع یک جنبهٔ معمّایی و محالنما دارد. ادّعای دوم محکمتر است، بلافاصله ادّعای اول را شامل می‌شود، در صورتی که ادّعای تاحدّی «مهالود و مبهم» اوّلی نمی‌تواند مشتمل بر ادّعای «روشن و صریح» دوم باشد. بدین‌گونه دست یافتن به قضیّهٔ محکمتر آسانتر از دست یافتن به قضیّهٔ ضعیفتر است، و **محالنمای مخترع** همین است.

اشکال نه‌تنها موضوع بحث مسائل هندسی را تشکیل می‌دهند بلکه همچنین کومک مهمّی به حلّ همه‌گونه مسائلی می‌کنند که در آغاز هیچ ارتباطی با هندسه ندارند. دو دلیل عمده برای توجّه به اشکال در حلّ مسائل وجود دارد.

۱. اگر مسئلهٔ ما یک مسئلهٔ هندسی بوده باشد، باید برای آن یک شکل درنظربگیریم. این شکل ممکن است در ذهن و تخیّل ما باشد یا بر روی یک برگ کاغذ ترسیم شده باشد. در پاره‌ای از موارد، بهتر و مطلوبتر آن است که شکل را تخیّل کنیم بی‌آنکه نمونه‌ای از آن را بر روی کاغذ بکشیم، ولی اگر بخواهیم همهٔ جزئیّات را یکی پس از دیگری آزمایش کنیم، نمی‌توانیم همهٔ آنها را همزمان در خاطر بگیریم، بلکه ملاحظهٔ آنها پس از آن که بر روی کاغذ ترسیم شده باشند امکانپذیر است. یک کیفیّت جزئی که در تخیّل ما نقش بسته باشد ممکن است فراموش شود، ولی اگر بر روی کاغذ بیاید باقی می‌ماند و چون به آن بازگردیم ما را به یاد ملاحظات قبلی می‌اندازد و از بعضی از ناراحتیهایی که در امربه یادآوردن ملاحظهٔ قبلی حاصل می‌آید ما را خلاص می‌کند.

۲. اکنون به صورت خاصّ استفادهٔ از شکلها را در مسائل از گونهٔ ساختمان هندسی مورد بحث قرارمی‌دهیم.

ملاحظهٔ تفصیلی چنین مسئله را با رسم کردن شکلی مشتمل برمجهول و داده‌ها آغازمی‌کنیم که در آن همهٔ این عوامل بدان‌سان که در صورت مسئله بیان شده جمع آمده است. برای آنکه مسئله را به صورتی مشخّص و متمایز بفهمیم، لازم است که هرداده و هرجزءِ از شرط را جداگانه موردمطالعه قراردهیم، سپس همهٔ اجزاء را دوباره به هم می‌پیوندیم و شرط را به صورت یک کلّ ملاحظه می‌کنیم و در آن می‌کوشیم که پیوندهای گوناگونی را که مسئله مستلزم آنها است همزمان درنظربگیریم و آنها را ببینیم. به‌ندرت امکان آن هست که بدون رسم کردن شکل بر روی کاغذ بتوانیم همهٔ این جزئیّات را از هم جداسازیم و باردیگر آنها را باهم ترکیب کنیم.

از سوی دیگر، پیش از آن که مسئله را به صورت قطعی حل کرده باشیم، امکان این که بتوانیم چنین شکلی را ترسیم کنیم مشکوک است. آیا ممکن است باهمهٔ شرایط تعیین‌شدهٔ در صورت مسئله سازگار باشد؟ پیش از آن که به جواب قطعی دست یافته باشیم نمی‌توانیم در پاسخ این پرسش «آری» بگوییم؛ باوجود این به رسم کردن شکلی می‌پردازیم وچنان فرض می‌کنیم که در آن ارتباط مجهول باداده‌ها چنان است که صورت مسئله آن را بیان می‌کند. چنان به نظر می‌رسد که، باکشیدن شکل، به ساختن یک فرض بدون تضمین صحّت آن پرداخته‌ایم.

نه، چنین نکرده‌ایم. هنگامی که مسئلهٔ خود را می‌آزماییم، به صورت غیر صحیح عمل نمی‌کنیم؛ این **امکان** را در نظر می‌گیریم که چیزی در آنجا وجود دارد که شرط مقرّر شدهٔ برای مجهول را تأمین می‌کند و، باهمهٔ داده‌ها، روابط خواسته شده را دارد، بدان شرط که امکان محض را باقطعیّت اشتباه نکنیم. یک قاضی در آن هنگام که پس از سؤال وجواب باطرف دفاع این فرض را در نظر می‌گیرد که دفاع‌کننده مرتکب جنایت موضوع بحث شده، در صورتی کارش صحیح است که خود را تسلیم این فرض نکند. ریاضیدان و قاضی هر دو می‌توانند یک امکان را بدون پیشداوری مورد ملاحظه قرار دهند، وبیان حکم را برای هنگامی بگذارند که ملاحظه وآزمایش به نتیجه‌ای قطعی رسیده باشد.

حلّ یک مسئلهٔ هندسهٔ ساختمانی را باترسیم طرحی برروی کاغذ آغاز کردن که در آن، بنا به فرض، شرط مسئله تأمین شده باشد، به هندسه دانان یونانی باز می‌گردد.

در جمله‌ای از پاپوس تاحدّی به صورتی معمّایی به آن چنین اشاره شده است: **چنان فرض کن که آنچه انجام دادن آن خواسته شده به همان صورت انجام شده باشد.** سفارش ذیل به آن اندازه موجز نیست ولی روشنتر است: **یک شکل فرضی رسم کن که مفروض چنان است که در آن همهٔ شرط مسئله باهمهٔ جزئیّات آن تامین شده است.**

این سفارشی در خصوص هندسهٔ ساختمانی است ولی در اینجا نیازی به آن نیست که خود را به این گونه مسئله محدود کنیم. ممکن است این توصیه را بر همهٔ «مسائل» یافتنی گسترش دهیم وآن را به صورت کلی ذیل بیان کنیم: **آن وضع فرضی را در نظر بگیر که در آن شرط مسئله بنا به فرض تامین شده باشد.**

مقایسه کنید با شمارهٔ ٦ از **پاپوس.**

۳. اکنون به بحث دربارهٔ نکاتی مربوط به رسم عملی اشکال می‌پردازیم.

(ا) آیا شکلها را باید درست رسم کنیم یا تقریبی، واین کار با اسبابهای ترسیم صورت بگیرد یا بادست بدون اسباب؟

هر دوگونه شکل مزایای مخصوص به خود دارند. اشکال صحیح اصولاً در هندسه همان نقش را دارند که اندازه‌گیریهای صحیح در فیزیک دارند، ولی درعمل اهمّیّت اشکال صحیح از اندازه‌های صحیح کمتر است، بدان سبب که قضایای هندسی به صورتی گسترده‌تر از قوانین فیزیکی در معرض تحقیق واثبات قرار می‌گیرند. باوجود این، تازه‌کاران باید بسیاری از اشکال را به اندازه‌ای که می‌توانند صحیح ترسیم کنند تا از این راه یک شالودهٔ خوب تجربی برای ترسیمهای بعدی خود به دست آورند، و اشکال صحیح همچنین ممکن است برای کُندکاران وسیله‌ای برای القا و پیشنهاد کردن قضایای هندسی شود. با این همه، برای استدلال، اشکالی که با دقّت به توسّط دست و بدون یاری‌گرفتن از اسبابهای ترسیم‌کشیده شده باشد، معمولاً به اندازهٔ کافی خوب است و ترسیم آنها بسیار سریعتر صورت می‌گیرد. البتّه شکل نباید چنان باشد که بیمعنی و ناموجّه به نظر برسد، خطهایی که بنا به فرض مستقیم است نباید موجدار کشیده شود، و آنها که دایره را معرّفی می‌کند نباید به شکل سیب‌زمینی کشیده شده باشد.

یک شکل نادرست گاه ممکن است القاکنندهٔ یک نتیجهٔ نادرست شود، ولی این خطر بزرگ نیست و می‌توانیم به وسایل گوناگون و مخصوصاً با تغییردادن شکل خود را از شرّ آن برهانیم. اگر توجّه خود را بر روی ارتباطهای منطقی متمرکز سازیم و این نکته را درنظر بگیریم که شکل یک وسیلهٔ کومکی است و به هیچ‌وجه مبنای نتیجه‌گیریها

نیست، خطری از جانب شکل متوجّه ما نمی‌شود، ارتباطهای منطقی مبنای حقیقی استنتاجها است. [این نکتهٔ به صورتی آموزنده به توسّط بعضی از محالنماهای مشهود که درآنها به شکلی زیرکانه از نادرستی عمدی بعضی از اشکال ترسیم‌شده مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد، مجسّم شده است.]

(II) آن چه مهمّ است این است که عناصر و اجزاء در روابط خواسته شده جمع آمده باشد، ولی این که به چه ترتیب آنها ساخته شده‌اند اهمّیّت ندارد. بنابراین همیشه ترتیب مناسبتر و راحتتر را انتخاب کنید. مثلاً، برای مجسّم ساختن اندیشهٔ تقسیم زاویه به سه جزء برابر، لازم است زاویه‌های α و β را چنان ترسیم کنید که $\alpha = 3\beta$ باشد. چون کار خود را با یک α که برحسب اتّفاق انتخاب کرده‌اید آغاز کنید نمی‌توانید β را با خطکش و پرگار به دست آورید. بنابراین، β را به اندازهٔ کافی کوچک انتخاب می‌کنید، که پس از آن ساختن α آسان است.

(III) شکل شما نباید هیچ خصوصیّت ناخواسته‌ای را تلقین کند. اجزاءِ مختلف شکل نباید از ارتباطهایی ظاهری خبر دهد که درصورت مسئله خواسته نشده است. درآن صورت که خطهایی نسبت به یکدیگر برابر یا عمود نیستند نباید به شکلی ترسیم شوند که برابر بودن یا عمودبودن را نمایش دهند. هنگامی که مثلّثی بنا به فرض مسئله متساوی‌السّاقین یا قائم‌الزّاویه نیست، نباید به این صورتها ترسیم شود. مثلّثی با زوایای ۴۵°، ۶۰° و ۷۵° مثلّثی است که از خطر قائم‌الزّاویه و متساوی‌السّاقین جلوه‌گرشدن هر دو مصون‌است [1]. اگرمی‌خواهیدمثلّثی «کلّی» و«بدون تخصیص» بکشید، چنین مثلّثی رسم کنید.

(IV) برای تأکید دربارهٔ نقشهای متفاوت خطوط مختلف، ممکن است از خطهای ستبر ونازک یا پر ونقطه چین یا ازقلمهای به رنگهای متفاوت استفاده کنید. اگر کاملاً تصمیم نگرفته‌اند که خطّی را به عنوان خطّ کومکی مورد بهره‌برداری قرار دهید، آن راکمرنگ بکشید. می‌توانید اجزاء وعناصر داده شده را بامداد سرخ رسم کنید ورنگهای دیگر را برای قسمتهای مورد تأکید اختصاص دهید، همچون یک جفت مثلّث متشابه

۱ـ اگر زوایای مثلّثی را با α و β و γ نمایش دهیم و $90^\circ > \alpha > \beta > \gamma$ باشد، در این صورت دست‌کم یکی از حاصل تفریقهای $90^\circ - \alpha$ و $\alpha - \beta$ و $\beta - \gamma$ کوچکتر از ۱۵° می‌شود مگر آنکه $\alpha = 75^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ و $\gamma = 45^\circ$ باشد، چه

$$\frac{3(90^\circ - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15^\circ.$$

ونظایر آن.

آیا برای مجسّم ساختن اشکال هندسهٔ فضایی باید نمونه‌های سه بُعدی رابه کار بریم یا از ترسیم اشکالی بر روی کاغذ استفاده کنیم؟

داشتن نمونه‌های سه بعدی مطلوب است، ولی ساختن آن پرزحمت وبهای خریدن ساخته‌های آن گران است. بنابراین باید معمولاً به رسم این گونه اشکال برروی کاغذ قانع شویم، هرچندموثّر و نمایان جلوه‌گر ساختن آنها آسان نیست. مقداری تجربه کردن بانمونه‌های مقوایی خود ساخته برای مبتدیان مطلوب ومفید است. اشیاءِ محیط زندگی روزانه را برای نمایش مفاهیم واشکال هندسی مورد استفاده قرار دادن بسیار به فهم این گونه چیزها کمک می کند. مثلاً یک جعبه یا یک آجر یا کلاس درس ممکن است برای تجسّم مکعّب مستطیل سودمند واقع شود ، وچنین است یک مداد برای نمایش استوانه ویک گلدان برای نمایش مخروط ناقص.

٤- اشکال ترسیم شدهٔ برروی کاغذ به آسانی ساخته می‌شود وبه آسانی منظور از آنها به دست می‌آید ونیز آسان به خاطر سپرده می‌شود. مخصوصاً اشکال مسطّح برای ما به خوبی شناخته است و مسائل مربوط به آنها را به صورتی خاص در دسترس داریم. ممکن است از این وضع بهره‌گیری کنیم وقابلیّت مواجه شدن با اشکال را درمواجههٔ با اشیاء غیرهندسی مورد استفاده قراردهیم، به شرط آن که بتوانیم برای اشیاء غیرهندسی یک نمایش هندسی مناسب درنظر بگیریم.

نمایشهای هندسی واشکال ونمودارهای گوناگون درهمهٔ علوم، و نه تنها درفیزیک وشیمی وعلوم طبیعی بلکه درعلم اقتصاد وحتّیٰ روانشناسی ، به کار می‌رود. با کاربرد یک نمایش هندسی مناسب، درآن می کوشیم که همهٔ چیزها رابه زبان اشکال بیان کنیم وهرگونه مسئله رابه شکل مسائل هندسه درآوریم.

بدین ترتیب، حتّیٰ اگر مسئلهٔ شما یک مسئلهٔ هندسه نیست، می‌توانید کوشش کنید تا برای آن یک شکل بکشید. یافتن یک نمایش هندسی روشن برای یک مسئلهٔ غیرهندسی برداشتن گامی مهم به جانب حلّ آن مسئله است.

اصطلاحات کهنه و نو که بیان کنندهٔ فعّالیّت حلّ مسائل می‌شود، غالباً مبهم است. هرکس باخودِ این فعّالیّت آشنایی دارد و غالباً دربارهٔ آن بحث می‌کند ولی، همچون دیگر فعّالیّتهای عقلی و ذهنی، توصیف کردن آن دشوار است. با

نبودن یک مطالعه وتحقیق منظّم اصطلاحات فنّی لازم برای بیان آن در دسترس نیست وبعضی از اصطلاحات نیمه فنّی معمولی بدان سبب که نویسندگان مختلف آنها را برای معانی متفاوت به کار برده‌اند غالبا برابهام آنها می‌افزایند.

فهرست کوتاهی که پس از این می‌آید، مشتمل برمعدودی از اصطلاحات متداول وبعضی از اصطلاحات کهنه‌ای است که در بحث حاضر از کار برد آنها خودداری کرده‌ایم، ونیز بعضی از اصطلاحات قدیمی را شامل می‌شود که باوجود ابهامی که دارند آنها را نگاه داشته‌ایم.

اگر توجّه خواننده بامثالهایی معطوف به نکتهٔ موردنظر شود، ممکن است اسباب گیجی وپریشانی خاطر او فراهم آید.

۱. **تحلیل** (آنالیز) با دقت به توسّط **پاپوس** تعریف شده، و آن اصطلاحی سودمند است که راه نمونه‌ای از طرحریزی یک نقشه راتوصیف می‌کند، وبا آغاز کردن از مجهول (یانتیجه) وکار کردن رو به عقب به طرف داده‌ها (یافرض) پیش می‌رود. متأسّفانه، این کلمهٔ آنالیز معانی گوناگون (مثلاً، تحلیل ریاضی یاشیمیایی یامنطقی) پیدا کرده و بنابراین باکمال تأسّف درکتاب حاضر از استعمال آن پرهیز کرده‌ایم.

۲. **شرط** عاملی است که مجهول یک «مسئلهٔ یافتنی» رابه داده‌ها (معلومهای).آن اتّصال می‌دهد (رجوع کنید به **مسائل یافتنی، مسائل ثابت کردنی، ۳**) بدین معنی اصطلاحی آشکار وسودمند و غیر قابل اجتناب است. غالباً لازم می‌آید که شرط رابه چند جزءتجزیه کنیم[به جزءهای(I) و (II) در مثال **تجزیه وترکیب مجدّد، ۷ و ۸**].هر جزء یاپاره از تمام شرط نیز معمولاً به نام یک شرط خوانده می‌شود. از این ابهام که گاه مایهٔ پریشانخاطری می‌شود، به آسانی می‌توان باوارد کردن اصطلاحی فنّی برای نمایاندن اجزاءِ تمام شرط جلوگیری کرد، مثلاً چنین جزء را می‌توان به نام «قید» (clause) نامید.

۳. **فرض** اشاره به جزء اصلی یک قضیّهٔ ریاضی از گونهٔ بیشتر رایج آن است (رجوع کنید به **مسائل یافتنی، مسائل ثابت کردنی، ٤**). این اصطلاح، بدین معنی، کاملاً روشن و رضایتبخش است. دشواری در آن است که هرجزءِ از تمام فرض نیز به نام یک فرض خوانده می‌شود، بدان سان که یک شرط ممکن است عبارت از چند فرض بوده باشد. علاج آن است که هرجزءِ از کلّ فرض را یک «قید» یا چیزی شبیه آن بخوانیم(به آنچه بالا در این خصوص برای «شرط» گفتیم رجوع کنید).

٤. **اجزاء اصلی** یک مسئله در **مسائل یافتنی، مسائل ثابت کردنی، ۳ و ٤** مورد

بحث قرار گرفته است.

۵. مسئلهٔ یافتنی و مسئلهٔ ثابت کردنی یک جفت اصطلاح جدید است که با تأسّف برای جایگزین شدن اصطلاحی تاریخی وارد شده که معنی آن با کاربرد جاری بیش از آنچه قابل اصلاح باشد ابهام پیدا کرده است. در ترجمهٔ لاتینی متنهای ریاضی یونانی، نام مشترک برای هردو نوع مسئله propositio (پیشنهاد) است، «مسئله یافتنی» با اصطلاح problema (=مسئله) بیان می‌شود و «مسئلهٔ ثابت کردنی» با اصطلاح theorema (= قضیّه). در زبان قدیمی از رواج افتادهٔ ریاضیّات کلمات proposition و problem و theorem هنوز معنی «اوقلیدسی» را با خود دارند، ولی در زبان ریاضی نوین این وضع کاملاً تغییر کرده است، و همین خود به ما حق می‌دهد که اصطلاحات تازه را وارد کار کنیم.

۶. استدلال پیشرونده « *Progressive reasoning* » به توسّط مؤلّفان متفاوت برای معانی مختلف به کار می‌رفت، و بعضی آن را در مورد معنی قدیمی «سَنْتِز» (رجوع کنید به ۹) به کار می‌بردند. این معنی اخیر قابل دفاع است، ولی این اصطلاح را در کتاب حاضر به کار نبرده‌ایم.

۷. استدلال پسرونده *Regressive reasoning* به توسّط بعضی از مؤلّفان برای معنی قدیمی «آنالیز» به کار می‌رفت (رجوع کنید به ۱ و ۶). این اصطلاح قابل دفاع است ولی از کاربرد آن پرهیز کرده‌ایم.

۸.حل درصورتی که به معنی ریاضی محض درنظر گرفته شود، اصطلاحی کاملاً روشن است، اشاره به هرچیزی است که شرط یک «مسئلهٔ یافتنی» را تأمین می‌کند. مثلاً، حل یا جواب معادلهٔ $x^۲-۳x+۲=۰$ ریشه‌های آن یعنی ۱ و ۲ است. متأسّفانه این کلمه نیز معانی دیگری دارد که ریاضی محض نیست و ریاضیدانان آن را نیز همراه با معنی ریاضی آن به کار برده‌اند. حل همچنین می‌تواند به معنی «فرایند حلّ مسئله» یا «کار صورت گرفتهٔ در حلّ مسئله» باشد. هنگامی که از «حلّ مشکل» سخن می‌گوییم مقصودمان همین معنی اخیر است. حل می‌تواند نیز به عنوان نتیجهٔ به دست آمدهٔ از عمل حلّ مسئله یعنی جواب آن باشد. هنگامی که از «حلّ زیبا» سخن بگوییم، منظورمان همین است. حال اگر بنا باشد که در یک جمله از چیزی که شرط مسئله را تأمین می‌کند، و نیز از کاری که باید برای دست یافتن به آن صورت پذیرد، و همچنین از خود نتیجهٔ به دست آمده سخن گفته شود، و دچار این وسوسه شویم که کلمهٔ «حل» را به هر سه معنی در آن جمله به کار

بریم، آن جمله نمی‌تواند بسیار روشن باشد.

۹. ترکیب «(سَنْتِز) را **پاپوس** در معنایی خوب تعریف شده به کار برده است که باید آن را حفظ کنیم. ولی از کاربرد این اصطلاح نیز متأسّفانه در این کتاب پرهیز شده است، و دلیل همان است که در مورد همتای آن در «آنالیز» گفته شد (در ۱ به آن مراجعه کنید).

اگر نمی‌توانید مسئلهٔ طرح شده را حل کنید، نگذارید که این شکست شما را غمگین و رنجور سازد، بلکه در آن بکوشید که با کسب موفّقیّتی آسانتر مایهٔ تسلّی خاطری برای خود پیدا کنید ، **و تلاش کنید تا نخست مسئله‌ای وابستهٔ به آن مسئله را حل کنید،** سپس جرأت خواهید یافت تا بار دیگر مسئلهٔ اصلی را مورد حمله قرار دهید. فراموش نکنید که برتری آدمی در آن است که بر گردمانعی که نمی‌تواند آن را از پیش پای خود بردارد بگردد و چاره اندیشی کند، وهنگامی که مسئلهٔ اصلی حل ناشدنی به نظر می‌رسد به طرح مسئله کومکی شایسته‌ای بپردازد و آن را حل کند.

آیا خیال می‌کنید که مسئلهٔ وابسته‌ای که بهتر در دسترس باشد وجود دارد؟ شما باید اکنون یک مسئلهٔ وابسته اختراع کنید ، نه این که در صدد **به یاد آوردن آن** باشید؛ امیدوارم پیش از این در بارهٔ این پرسش کوشش کرده باشید: **آیا از مسئله‌ای وابسته خبر دارید؟**

پرسشهای دیگر در آن بند از فهرست که با عنوان مادّه و مقالهٔ حاضر آغاز می‌شود دارای هدف مشترکی هستند که عبارت از، **تغییر شکل مسئله** است. وسایل مختلفی برای رسیدن به این هدف موجود است، همچون **تعمیم**، **تخصیص**، **تمثیل**، و چیزهای دیگری که از راههای گوناگون **تجزیه وترکیب مجدّد** به شمار می‌روند.

اندیشهٔ درخشان یا «اندیشهٔ خوب» یا «دیدن روشنی» اصطلاحی محاوره‌ای است که پیشرفت ناگهانی به سوی حلّ مسئله را معرّفی می‌کند؛ رجوع کنید به **پیشرفت و دستاورد**، ٦. آمدن یک اندیشهٔ روشن و درخشان تجربه‌ای است که هر کس با آن آشنایی دارد ولی توصیف آن دشوار است و بنابراین اشاره کردن به توصیفی که به صورت اتّفاقی نویسنده‌ای قدیمی همچون ارسطو به آن کرده است، جالب توجّه به نظر می‌رسد.

اغلب مردم در این امر اتّفاق نظر دارند که تصوّر یک اندیشهٔ درخشان یک «عمل برخاستهٔ از زیرکی و دانایی» است. ارسطو زیرکی و دانایی(Sagacity) را چنین تعریف کرده است: «زیرکی و دانایی دست یافتن از راه حدس به یک ارتباط اساسی در زمانی بی‌اندازه کوچک و غیر قابل ملاحظه است. همچون مثلاً، این که ببینید مردی با شخص ثروتمندی به طریقی در حال گفتگو است که ممکن است شما بانگاه‌کردن به صورت آنها حدس بزنید که آن مرد در آن می‌کوشد که از آن شخص پولی به وام بگیرد. یا چون که می‌بینید طرف درخشان ماه همیشه رو به خورشید است، ناگهان بر شما معلوم شود که چرا چنین است، یعنی متوجّه شوید که ماه با تابیدن نور خورشید بر آن روشن می‌شود».[۱]

مثال اوّلی بد نیست ولی پیش پا افتاده است. برای حدس زدن بدین گونه در مورد شخص ثروتمند چندان زیرکی و دانایی لازم نیست، و اندیشه درخشندگی بسیار ندارد. ولی مثال دوم کاملاً، در صورتی که مختصری تخیّل خود را به کار اندازیم و آن را در جای مخصوص خودش ببینیم کاملاً مؤثّر و برانگیزندهٔ احساسات است.

باید این مطلب را در نظر داشته باشیم که فردی از معاصران ارسطو برای آنکه وقت را بداند، بدان جهت که هنوز ساعت مچی بر روی دستهای مردمان دیده نمی‌شد، ناگزیر می‌بایستی به خورشید و ستارگان نگاه کند، واگر بنا بود در شب حرکت کند ناچار باید به اهلّهٔ ماه توجّه داشته باشد، بدان جهت که خیابانهای با چراغ برق روشن شده وجود نداشت. بهتر از مردمان شهرنشین امروز با آسمان آشنایی داشت وهوش و ذکاوت طبیعی وی با نوشته‌های روزنامه‌ای هضم ناشدهٔ نظریّات نجومی تیره وتار نشده بود. ماه شب چهاردهم را همچون قرصی هموار شبیه قرص خورشید ولی با درخشندگی بسیار کمتر می‌دید. می‌بایستی از این که شکل و وضع ماه پیوسته در آسمان تغییر می‌کرد، دچار شگفتی شده باشد. گاه هنگام برآمدن خورشید یا فرو رفتن آن، ماه را نیز در آسمان مشاهده می‌کرد و به این نتیجه رسیده بود که «طرف روشن ماه همیشه رو به خورشید است که به خودی خود پیشرفت و دستاوردی شایستهٔ احترام به نظر می‌رسد. و اکنون چنان به نظرش می‌رسد که سیماهای متغیّر ماه به سیماهای متغیّر توپی می‌ماند که از یک طرف روشن می‌شود، بدان سان که یک طرف آن روشن است و طرف دیگرش تاریک.» وی ماه و خورشید را نه همچون دو قرص مسطّح بلکه به صورت اجسام گویسان تصوّر می‌کرد که یکی از آنها نور از خود صادر می‌کند و دیگری آن را

۱– ترتیب متن را اندکی تغییر داده‌ایم. برای ملاحظهٔ ترجمهٔ درست رجوع کنید به ویلیم ویول، فلسفهٔ علوم استقرائی (۱۸٤۷)، جلد دوم، ص ۱۳۱.

می‌گیرد. وی به فهم ارتباط اساسی موفّق شد، و طرز تصوّر قدیمی خود را در یک لحظه یعنی در «زمانی بسیار کمتر از حدّ تصوّر» تغییر داد: و این یک جهش تخیّل و یک اندیشهٔ درخشان و برقی از نبوغ است.

آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟ به ندرت می‌توانیم مسئله‌ای را تخیّل کنیم که مطلقاً نو باشد، وبا مسائلی که پیشتر حل کرده‌ایم شباهت و مناسبتی در آن دیده نشود. ولی، اگر چنین مسئله‌ای بتواند موجود باشد، غیر قابل حل خواهد بود. درواقع، هنگامی که به حلّ مسئله‌ای می‌پردازیم، همیشه از مسائل حل شدهٔ پیشتر بهره‌گیری می‌کنیم و نتیجه یا روش حل یا مهارت و تجربه‌ای را که از حلّ آنها به دست آمده مورد استفاده قرار می‌دهیم. و البتّه مسئله‌ای که از آن بهره‌مند می‌شویم می‌بایستی از جهتی با مسئلهٔ حاضر ارتباط و وابستگی داشته باشد. به همین جهت سؤالی که پیش می‌آید چنین است: **آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟**

معمولاً به یاد آوردن مسائلی کمابیش وابستهٔ به مسئلهٔ حاضر که پیشتر آن را حل کرده‌ایم، چندان دشوار نیست. برخلاف، می‌توانیم چندین مسئله از این‌گونه بیابیم، تا آن حد که دشواری در انتخاب یکی از این‌گونه مسائل است. باید درصدد یافتن مسئله‌ای با وابستگی بسیار نزدیک باشیم؛ **به مجهول نگاه می‌کنیم**، یا به مسئله حل شدهٔ پیشتر که از لحاظ **تعمیم یا تخصیص یا تمثیل** با مسئلهٔ حاضر ارتباط داشته باشد.

هدف پرسشی که این جا به بحث دربارهٔ آن پرداخته‌ایم، بسیج کردن شناخت اکتسابی قبلی ما است (**پیشرفت و دستاورد، ۱**). یک قسمت اساسی از شناخت و دانش ریاضی ما به صورت قضایای پیشتر به اثبات رسیده در ذهنمان ذخیره شده است. به همین جهت چنین سؤالی طرح می‌شود که آیا از قضیّه‌ای آگاهی دارید که بتواند سودمند باشد؟ طرح این پرسش مخصوصاً درآن هنگام شایسته است که مسئلهٔ ما یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» باشد، یعنی درآن هنگام که بخواهیم یک قضیّه طرح شده را ثابت یا رد کنیم.

آیا از همهٔ داده‌ها استفاده کرده‌اید؟ در نتیجهٔ بسیج شدن تدریجی همهٔ شناخت و دانش ما، دریافتی که از مسئله داریم در پایان حلّ آن بسیار بیش از آغاز آن خواهد بود (**پیشرفت و دستاورد، ۱**)، ولی اکنون چگونه است؟ آیا

آنچه را که نیازمند آن بوده‌ایم به دست آورده‌ایم؟ آیا ادراک و دریافت ما درست و تمام شده است؟ **آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را به کار بردید؟** پرسش متناظر در «مسئلهٔ ثابت کردنی» چنین است: **آیا همهٔ فرض را به کار بردید؟**

۱. برای مجسّم کردن مطلب، بهتر است به مسئلهٔ «متوازی‌السّطوح» بیان شدهٔ در بخش ۸ (که در بخشهای ۱۰ و ۱۲ و ۱٤ و ۱۵ دنبال شد) بازگردیم. ممکن است چنان اتّفاق بیفتد که دانشجویی در اندیشهٔ حساب کردن قطر یک وجه یعنی $\sqrt{a^2 - b^2}$ باشد ولی در آن بماند. معلّم با طرح کردن این پرسش می‌تواند به او کمک کند که: **آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ به ندرت ممکن است دانشجویی از فهم این مطلب عاجز بماند که عبارت** $\sqrt{a^2 + b^2}$ مشتمل بر دادهٔ سوم c نیست. بنابراین باید بکوشد که c را نیز وارد کار کند. به این ترتیب فرصت خوبی پیدا می‌کند که مثلّث قائم‌الزّاویهٔ قطعی را با اضلاع $\sqrt{a^2 + b^2}$ و c که وتر آن همان قطر متوازی‌السّطوح است به دست آورد (برای تجسّم دیگری به **عناصر معاون** رجوع کنید.)

پرسشهایی که دربارهٔ آنها بحث می‌کنیم بسیار مهمّند. سودمندی آنها در حلّ مسائل ساختمانی آشکارا در مثال گذشته نشان داده شده است. ممکن است عنصری فراموش شده را به یاد ما بیاورند. هنگامی که بدانیم که عنصری هنوز فراموش شده مانده است، طبیعتاً درصدد برمی‌آییم که آن را وارد کار کنیم. بدین ترتیب یک برگه و یک خطّ بازجویی و تحقیق برای دنبال کردن و یک فرصت نیک برای روبه‌رو شدن با اندیشهٔ قطعی در اختیار ما قرار می‌گیرد.

۲. پرسشهایی که از آنها سخن گفتیم، نه‌تنها در ساختن یک برهان بلکه در وارسی و امتحان صحّت آن سودمند واقع می‌شوند. برای آنکه به صورتی ملموستر سخن گفته باشیم، فرض کنید مقصود وارسی راه اثبات قضیّه‌ای است که فرض آن مشتمل بر سه جزء است و هرسه برای حقیقت داشتن قضیّه جنبهٔ اساسی دارند. بدین معنی که اگر هرجزء از فرض را کنار بگذاریم، قضیّه از صحیح بودن می‌افتد. بنابراین، اگر در اثبات قضیّه از هریک از سه جزء فرض غفلت شود، اثبات نادرست است. **آیا در اثبات تمام فرض درنظر گرفته شده؟** آیا جزءِ اوّل فرض به کار رفته است؟ در کجا نخستین جزءِ فرض به کار رفت؟ به کار رفتن جزءِ دوم در کجا بود؟ جزءِ سوم کجا؟ برای پاسخ دادن به همهٔ این پرسشها راه اثبات را وارسی می‌کنیم.

این شکل از امتحان و وارسی مؤثّر و آموزنده و برای فهم کامل برهان در صورتی که طولانی و سنگین باشد- یعنی فهمی بدان صورت که **خوانندهٔ باهوش** بدان

می‌رسد- تقریباً ضروری است.

۳. هدف پرسشهایی که از آنها سخن گفتیم، آزمایشی از کمال و تمامیّت تصوّر و دریافت ما از مسئله است. اگر نتوانیم داده یا شرط یا فرضی اساسی از مسئله را به‌حساب بیاوریم و در حلّ مسئله آن را به کار گیریم، تصوّر و دریافت ما قطعاً ناتمام وناقص است. ولی اگر از محقّق ساختن معنی بعضی از اصطلاحات اساسی نیز ناتوان بمانیم، بازهم دریافت ما ناقص است. بنابراین، برای امتحان دریافت وتصوّر خودمان باید چنین بپرسیم: آیا همهٔ مفاهیم اساسی مندرج در مسئله را به حساب آورده‌اید؟ رجوع کنید به **تعریفها**،۷.

٤. ولی دربارهٔ ملاحظاتی که پیشتر گذشت، باید محتاط باشیم وبدانیم که در معرض بعضی از محدودیتها قرار دارند. در واقع کار برد سرراست آنها منحصر به مسائلی است که «به صورت کامل بیان شده» و«**معقول** و استدلالپذیر باشند.

یک «مسئله یافتنی» وبه صورت کامل بیان شده ومعقول می‌بایستی همهٔ داده‌های لازم را داشته باشد ویک دادهٔ زاید وبیجا درآن دیده نشود، نیز شرط آن باید به اندازهٔ کفایت واز تناقض وحشو دور باشد. برای حل کردن چنین مسئله‌ای البتّه باید همهٔ داده‌ها وتمام شرط به کار گرفته شود.

موضوع «مسئلهٔ ثابت کردنی» یک قضیّهٔ ریاضی است. اگر مسئله خوب بیان شده ومعقول باشد، هرقید (جزءِ شرط) از فرض آن قضیّه می‌باید برای رسیدن به نتیجه جنبهٔ اساسی داشته باشد. برای اثبات چنین قضیّه، البتّه باید هرقید از فرض مورد استفاده قرار بگیرد.

چنان فرض می‌شود که مسائل ریاضی عرضه شدهٔ در کتابهای درسی سنّتی صورت بیانی کامل دارند ومستدلّ ومعقولند. ولی نباید به تحقّق یافتن این فرض چندان اعتماد کنیم، درآن هنگام که کمترین شک وجود داشته باشد، باید بپرسیم: **آیا تأمین شرط ممکن است؟** درضمن کوشش برای پاسخ گفتن به این سؤال ممکن است لااقل تاحدّی متقاعد شویم که مسئله چنان که فرض شده خوب است.

پرسش طرح شدهٔ درعنوان همین مادّه که اکنون درآن بحث می‌کنیم، وپرسشهای وابستهٔ به آن، بدون تغییر تنها هنگامی باید پرسیده شود که بدانیم مسئلهٔ قرار گرفتهٔ در برابر ما به صورت کامل بیان شده ومعقول ومستدلّ است، یا درآن هنگام که دست کم دلیلی برای گمان مخالف بردن نداشته باشیم.

۵. بعضی از مسائل غیر ریاضی هست که امکان دارد، از جهتی، «به صورت کامل بیان شده» باشد. مثلاً، چنان فرض می‌شود که مسائل خوب شطرنج جز یک جواب ندارد ومهرهٔ زیادی برروی صفحهٔ شطرنج نیست، و جز این.

ولی مسائل عملی معمولاً دور از آن است که به صورت کامل وتمام بیان شده باشد ومحتاج درنظر گرفتن پرسشهایی است که در مادّهٔ حاضر مورد بحث قرار گرفته است.

آیا پیشترآن را دیده‌اید؟ امکان آن هست که پیشتر مسئله‌ای را که هم‌اکنون برای حل کردن دربرابر خود داریم یا مسئله‌ای بسیارمشابه آن را حل کرده باشیم. اینها امکاناتی است که نباید از کشف آنها غافل بمانیم. می‌کوشیم تاآنچه را که اتّفاق افتاده است به خاطرآوریم. **آیا پیشتر آن را دیده‌اید؟ آیا باهمین مسئله به صورتی اندک متفاوت پیش ازاین روبه‌رو شده بودید؟** حتّیٰ اگر جواب منفی هم باشد، با چنین پرسشها دانش و معرفت سودمند تجهیز و بسیج می‌شود.

سؤالی که درعنوان مادّهٔ حاضر آمده، غالباً درمعنای عامتری به کار می‌رود. برای به دست آوردن راه‌حلّ وجواب مسئله باید عناصر وابسته ومناسب را ازحافظهٔ خود استخراج کنیم و بخشهای مربوط را درشناخت خفته بیدارسازیم و به کارگیریم، ولی بعضی از امکانات وجود دارد که نباید دراکتشاف آنهاکوتاهی کنیم. مثلاً، هر سیمایی از مسئلهٔ حاضر که درحلّ مسئلهٔ دیگری نقشی ایفاکرده، ممکن است باردیگر چنین نقشی را ایفاکند. بنابراین، اگر سیمایی از مسئلهٔ کنونی محتملاً مهم به نظر می‌رسد، باید بکوشیم تا آن را خوب بشناسیم. آن چیست؟ آیا درنظر شما آشنا است؟ **آیا پیشتر آن را دیده‌اید؟**

آیا تأمین شرط ممکن است؟ آیا شرط برای یافتن مجهول کفایت می‌کند؟ یا کفایت نمی‌کند؟ یا زاید و دارای حشو است؟ یا تناقض‌آمیزاست؟
طرح این پرسشها غالباً درمرحلهٔ آغازی حلّ مسئله و درآن هنگام که خواستار جوابی تمام نیستند و تنها به پاسخی موقّتی یاحدس نیازدارند، سودمند است. مثلاً، به بخشهای ۸و۱۸ نگاه کنید.

باید هرسیما از نتیجه‌ای را که برای رسیدن به آن کارمی‌کنیم پیشبینی کنیم. هنگامی که اندیشه‌ای در بارهٔ آنچه باید متوقّع رسیدن به آن باشیم داریم، بهترمی‌دانیم که به کدام سوباید حرکت کنیم. یک سیمای مهمّ مسئله شمارهٔ جوابهایی است که

می‌تواند داشته باشد. جالب توجّه‌ترین مسائل آنهاهستند که تنها یک جواب داشته باشند، تمایل به آن داریم که تنها این‌گونه مسائل را مسائل «معقول» بدانیم. آیا مسئلهٔ ما بدین معنی «معقول» است؟ اگر بتوانیم به این پرسش، حتّیٰ با یک حدس موجّه، پاسخ بدهیم، علاقهٔ ما به مسئله بیشتر می‌شود و بهترمی‌توانیم بر روی آن کار کنیم.

آیا مسئله ما «معقول» است؟ این پرسش در مرحلهٔ آغازی‌کار سودمنداست به شرط آنکه بتوانیم به آسانی پاسخ آن را بدهیم. اگریافتن پاسخ این پرسش دشوار باشد، زحمتی که برای به دست آوردن متحمّل می‌شویم بیش از سودی خواهد بود که ازآن عاید ما می‌شود. همین مطلب درمورد پرسش «**آیا تأمین شرط ممکن است؟**» و پرسشهای وابستهٔ به آن در فهرست ما صادق است. آنها را ازآن جهت باید طرح کنیم که یافتن پاسخ ممکن است آسان و روشن باشد، ولی هنگامی که جواب دشوار یا تاریک به نظر می‌رسد نباید بر روی آنها توقّف و پافشاری کنیم.

پرسشهای متناظر برای «مسائل ثابت کردنی» اینها است: **آیا احتمال آن هست که قضیّهٔ پیشنهادشده درست باشد؟ یا احتمال بیشتر نادرست بودن آن است؟** راهی که پرسش درآن راه طرح شده آشکارانشان می‌دهد که تنها یک حدس و یک جواب موجّه موقّتی مطلوب و مورد توقّع است.

آیا می‌توانید از داده‌ها چیزی سودمند به دست آورید؟ دربرابر خود یک مسئلهٔ حل ناشده و یک پرسش بیجواب داریم. **باید ارتباط میان معلومها و مجهول را پیداکنیم.** می‌توانیم مسئلهٔ حل ناشدهٔ خودمان را همچون فضایی باز میان داده‌ها و مجهول وهمچون گودالی تصوّر کنیم که برای عبور لازم است بر روی آن پلی ببندیم و ازاین راه به مجهول برسیم و آن را معلوم کنیم. ازهریک از دوطرف می‌توانیم ساختن این پل را آغازکنیم، از مجهول یا ازداده‌ها.

به مجهول نگاه کنید! وفکر خود را متوجّه یافتن مسئله‌ای دارای همین مجهول یا چیزی مشابه آن سازید. این عمل شما را برآن می‌دارد که کار خود را از مجهول آغاز کنید.

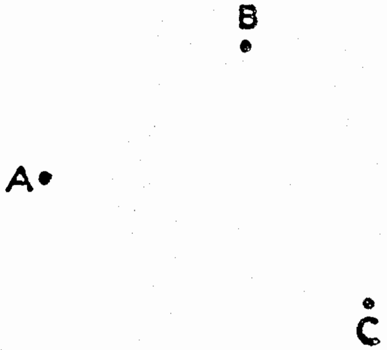
به داده‌ها نگاه کنید! **آیا می‌توانید چیز سودمندی ازآنها بیرون آورید؟** این اندیشه شما را برآن می‌دارد که از داده‌ها آغازکنید.

چنان به نظر می‌رسد که آغاز کردن استدلال از مجهول معمولاً مرجّح است (رجوع کنید به **پاپوس** و **کارکردن رو به عقب**). باوجود این شقّ دیگر کار یعنی آغاز کردن از داده‌ها نیز فرصت کامیاب شدن دارد و غالباً باید آزمایش شود و شایستهٔ آن است که

بانمونه‌ای آن را مجسّم کنیم.

مثال. سه نقطهٔ A و B و C در دست است. خطّی از A چنان بکشید که از میان B و C بگذرد و تااین هردو نقطه به یک اندازه فاصله داشته باشد.

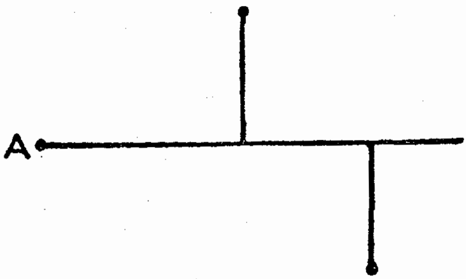
داده‌ها چیست؟ سه نقطه A و B و C. **شکلی برای نمایاندن داده‌ها ترسیم می‌کنیم** (شکل ۹).



شکل ۹

مجهول چیست؟ یک خطّ راست.

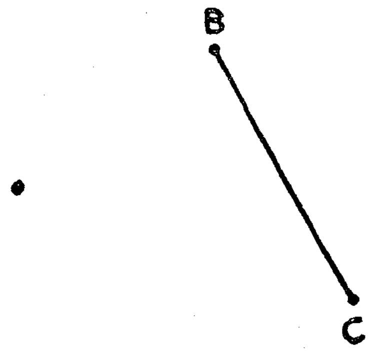
شرط چیست؟ خطّ خواسته شده باید چنان از A و درفاصلهٔ میان B و C بگذرد که فاصله‌اش از این هردو نقطه به یک اندازه باشد. مجهول و داده‌ها را درشکلی چنان جمع می‌آوریم که ارتباطات خواسته شده را نمایش دهد (شکل ۱۰). شکل ما، به اقتضای تعریف فاصلهٔ یک نقطه از یک خطّ مستقیم، زاویه‌های قائمهٔ وابسته به این تعریف را دربردارد.



شکل ۱۰

این شکل، بدان صورت که طرح شده، هنوز «بسیار تهی» است. خطّ راست مجهول هنوز به صورتی غیررضایتبخش به داده‌های A و B و C ارتباط دارد. نیازمند خطّ دیگری است که به آن کمک کند- ولی آن کدام خطّ است؟ یک دانشجوی خوب هم ممکن است دراینجا وابماند. البتّه چیزهای گوناگونی برای امتحان کردن وجود دارد، ولی بهترین پرسشی که اکنون برای یافتن پاسخ آن می‌توان طرح کرد از این قرار است: **آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟**

داده‌ها درواقع چیست؟ سه نقطهٔ نموده شدهٔ درشکل ۱۱، نه چیزی دیگر. ماهنوز نقطه‌های B و C را به کار نگرفته‌ایم، باید از آنها چیز سودمندی استخراج کنیم. ولی با این دو نقطه چه می‌توانیم کرد؟ آنها را باخطّی به یکدیگر متّصل کنید. بدین ترتیب شکل ۱۱ را رسم می‌کنیم.



شکل ۱۱

اگر شکل ۱۱ را برشکل ۱۰ منطبق کنیم، ممکن است راه‌حل دریک چشم به هم زدن آشکار شود: دو مثلّث متشابه قائم‌الزّاویه دردست داریم و محلّ تلاقی رئوس انها بایکدیگر نقطهٔ مهمّ برخورد خطّ رسم شدهٔ از A است که درست از وسط BC می‌گذرد.

آیا می‌توانید از نتیجه استفاده کنید؟ یافتن راه‌حل یک مسئله باوسایلی که خود دراختیار داریم، یک کشف است. اگر مسئله دشوار نباشد، این کشف چندان بزرگ نیست، ولی به هرصورت یک اکتشاف است.

پس از دست یافتن به اکتشافی هراندازه کم، نباید از جستجو برای یافتن چیزی جز آن کوتاهی کنیم، و امکاناتی را که با دست یافتن به نتیجهٔ تازه برای ما فراهم آمده

نباید از یادببریم، بلکه باید بکوشیم که همان روش اکتشاف را باردیگر مورداستفاده قراردهیم. از کامیابی خود بهره بر گیرید. **آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در مورد مسئله‌ای دیگر به کاربگیرید؟**

۱. اگر با وسایل اصلی تغییر شکل دادن به مسئله، همچون **تعمیم و تخصیص و تمثیل و تجزیه و ترکیب مجدّد** آشنا باشیم، به آسانی می‌توانیم مسئله‌های تازه‌ای تخیّل کنیم. از یک مسئلهٔ طرح شده آغازمی‌کنیم، از آن به میانجیگری وسایلی که هم‌اکنون ذکر کردیم مسائل تازه‌ای بیرون می‌آوریم و از اینها مسائلی دیگر، و همچنین. این فرایند به صورت نظری نامحدود می‌نماید، ولی در عمل به‌ندرت آن را بسیاردورمی‌بریم، بدان جهت که مسائلی که بدین‌گونه به دست بیاوریم می‌تواند دوراز دسترس باشد.

از سوی دیگرمی‌توانیم مسائلی تازه بسازیم و آنها را با کاربرد روش مسئله‌ای که پیش از آن حل کرده‌ایم به آسانی حل کنیم، ولی این مسائل آسان تازه ممکن است جالب توجّه نباشد.

یافتن مسئله‌ای تازه که هم جالب توجّه باشد و هم در دسترس، چندان آسان نیست، به تجربه و ذوق و سلیقه و یاری بخت نیازمند است. با وجود این، در آن هنگام که به حلّ مسئله‌ای کامیاب شدیم. نباید از آن که به اطراف خود برای ساختن مسائل وابستهٔ تازه نگاه کنیم غافل بمانیم، مسائل خوب و قارچهایی از گونهٔ خاص در یک چیز باهم اشتراک دارند، به‌صورت خوشه‌ها بیرون می‌آیند و رشد می‌کنند. پس از یافتن یک مسئله باید به اطراف آن نگاه کنید، احتمال فراوان هست که در نزدیکی آن بازهم مسائل دیگری باشد.

۲. بعضی از نکات یادشدهٔ پیش از این را با همان مثال که در بخشهای ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ١٤ و ۱۵ آمده مورد بحث قرارمی‌دهیم. بنابراین از مسئلهٔ زیرآغاز می‌کنیم.

با معلوم بودن سه بعد (طول و عرض و ارتفاع) یک متوازی‌السّطوح قائم قطر آن را حساب کنید.

اگر جواب این مسئله را بدانیم، به آسانی می‌توانیم هریک از مسائل زیر را حل کنیم (که از دوتای نخستین آنها تقریباً در بخش ١٤ بحث شده است).

با معلوم بودن ابعادمتوازی‌السّطوح قائم‌الزّوایا، شعاع کرهٔ محیط برآن را حساب کنید.

قاعدهٔ یک هرم مربّع مستطیلی است که مرکز آن پایهٔ ارتفاع هرم است. با دردست

داشتن ارتفاع هرم و طول اضلاع قاعده، اندازهٔ یالهای طرفی آن را حساب کنید.

با معلوم بودن مختصّات قائم (z_1 و y_1 و x_1) و (z_2 و y_2 و x_2) از دو نقطهٔ فضایی، فاصلهٔ این دونقطه را به دست آورید.

این مسائل را از آن جهت به آسانی می‌توانیم حل کنیم که چندان تفاوتی با مسئلهٔ اصلی که آن را حل کرده‌ایم ندارند. در هرحالت، چیزی تازه به مسئله افزوده‌ایم، همچون کرهٔ محیطی وهرم و مختصّات قائم. این مفاهیم به آسانی افزوده وبه آسانی حذف می‌شود، وچون آنها را برداریم، به مسئلهٔ اصلی خود باز خواهیم گشت.

مسائل یادشده از آن جهت تاحدّی جالب توجّه است که مفاهیم افزوده شدهٔ برمسئلهٔ اصلی در آنها جالب توجّه است. مسئلهٔ اخیر، مربوط به فاصلهٔ دونقطهٔ شناخته شدهٔ از طریق مختصّات فضایی آنها، از آن جهت مهمّ است که مختصّات قائم مهمّ است.

۳. مسئلهٔ دیگری هست که اگر ازحلّ مسئلهٔ اصلی آگاه باشیم به آسانی می‌توانیم آن را حل کنیم: با معلوم بودن طول وعرض وقطر یک مکعّب مستطیل ارتفاع آن ر حساب کنید.

حلّ مسئلهٔ اصلی ما در واقع عبارت از برقرار کردن رابطه‌ای میان چهار کمّیت، یعنی سه بعد وقطر یک مکعّب مستطیل است. اگر سه تا از این چهار در دست باشد، از روی آن رابطه می‌توانیم چهارمی را پیدا کنیم. بنابراین حلّ مسئلهٔ تازه برای ما امکانپذیر است.

دراینجا نمونه والگویی در اختیار داریم که بنابرآن به آسانی می‌توانیم مسائل تازهٔ قابل حلّی از مسئلهٔ حل شده به دست آوریم: به مجهول اصلی همچون معلوم وبه یکی از داده‌های اصلی همچون مجهول نگاه می‌کنیم. رابطه‌ای که مجهول وداده‌ها را به یکدیگر می‌پیوندد در هر دومسئله یکی است. پس از آنکه این رابطه را در یک مسئله به دست آوردیم، می‌توانیم آن را در مسئلهٔ دیگر نیز به کار بریم.

این الگوی استخراج مسائل تازه از راه مبادله کردن نقشها با الگویی که از آن در شمارهٔ ۲ بهره گرفتیم بسیار متفاوت است.

٤. اکنون به بیان روش ساختن مسائل تازه از راههای دیگر می‌پردازیم.

یک تعمیم طبیعی از مسئله اصلی ما این مسئله است: قطر یک متوازی السّطوح را که سه یال خارج شدهٔ از یک کنار آن قطر وسه زاویهٔ میان آن سه یال معلوم است، حساب کنید.

از راه تخصیص این مسئله به دست می‌آید: قطر مکعّبی را حساب کنید که اندازهٔ

طول یال آن در دست است.

از راه تمثیل می‌توانیم مسائل گوناگون بیشمار بسازیم. واینک چندتا از این گونه مسائل که از مسائل مورد بحث قرار گرفته در ۲ استخراج شده است: قطر هشت وجهی منتظم با یال معلوم را حساب کنید. شعاع کرهٔ محیطی یک چهار وجهی منتظم دارای طول یال معلوم را به دست آورید. بامعلوم بودن مختصّات جغرافیایی یعنی طول وعرض دونقطه برروی کرهٔ زمین (که آن را به صورت کرهٔ کامل در نظر می‌گیریم) فاصلهٔ کروی آنها را از یکدیگر معلوم کنید.

همهٔ این مسائل جالب توجّه است ولی تنها آن یک را که با تخصیص به دست می‌آید بلافاصله می‌توان براساس مسئلهٔ اصلی حل کرد.

۵- با درنظر گرفتن بعضی از عناصر مسئلهٔ عرضه شده، می‌توانیم ازآن مسائل تازه بسازیم.

حالت خاصّی ازیک مسئلهٔ مورد اشاره قرار گرفته در ۲ عبارت از یافتن شعاع کرهٔ محیط برمکعّبی‌است که اندازهٔ یال آن معلوم است . مکعّب، ومرکز مشترک مکعّب وکره راثابت درنظر می‌گیریم، وشعاع کره رامتغیّر. اگر این شعاع کوچک باشد، کره در درون مکعّب جای دارد. به تدریج که اندازهٔ شعاع افزایش پیدا می‌کند کره بزرگتر می‌شود (همچون بالونی درحال بادکردن وبزرگتر شدن). در لحظه‌ای خاص کره باوجوه مکعّب مماس می‌شود، اندکی بعد با یالهای آن، وبازهم بعدازآن کره از رأسهای مکعّب می‌گذرد. دراین سه حالت بحرانی شعاع کره چه اندازه‌هایی پیدا می‌کند؟

٦- آزمودگی ریاضی دانشجو، در صورتی که هرگز این فرصت برای او فراهم نیامده باشد که مسائلی از پیش خود اختراع کند، کامل نیست. ممکن است استاد پس از آن که مسئله‌ای حل شد به این کار بپردازد واز این راه کنجکاوی شاگردان رابرانگیزد. نیز ممکن است قسمتی از این اختراع را برعهدهٔ دانشجویان قرار دهد. مثلاً، می‌تواند از کرهٔ درحال بادکردن وبزرگتر شدن که در شمارهٔ ۵ از آن بحث کردیم سخن بگوید وسپس چنین پرسش کند: «برای حساب کردن چه چیز کوشش خواهید کرد؟ طول شعاع چه اندازه باشد جالب توجّه می‌شود؟»

آیامی‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟آیامی‌توانید آن را به صورتی دیگر بیان کنید؟هدف این پرسشها مایهٔ تقویت استعداد **تغییر شکل دادن مسئله است.** به تعریفها بازگردید. به **تعریفها**مراجعه کنید.

آیا می‌توانید نتیجه را از راه دیگر به دست آورید؟ هنگامی که سرانجام نتیجه‌ای که به دست آوردیم طولانی وپیچیده است، طبیعتاً در این اندیشه می‌افتیم که ممکن است راه حلّ روشنتر وسرراستتری وجود داشته باشد: **آیا می‌توانید نتیجه را از راه دیگر به دست آورید وآیا می‌توانید آن رابایک نگاه ببینید؟** حتّیٰ اگر توانسته باشیم راه حلّی مایهٔ خرسندی به دست آوریم، ممکن است بازهم علاقه مند به یافتن راه حلّی دیگر باشیم. خواستار آنیم که صحّت واعتبار یک نتیجهٔ نظری را ازدو راه برای خود ثابت کنیم، همان گونه که خواستار آنیم تایک شئ مادّی را ازطریق دو حسّ مختلف ادراک واحساس کنیم. پس از آنکه به دلیلی دست یافتیم، می‌خواهیم دلیل دیگری پیدا کنیم به همان گونه که پس از دیدن چیزی خواستار آزمودن آن بادست می‌شویم.

دوراه اثبات بهتر ازیکی است. «بر کشتی دارای دولنگر سوار شدن ایمنی بیشتر می‌شود.»

۱۰ **مثال**. وسعت سطح جانبی S یک مخروط ناقص قائم را به دست آورید که شعاع قاعدهٔ زیرین آن R و شعاع قاعدهٔ زبرین آن r و ارتفاع آن h است.

این مسئله را از راههای گوناگون می‌توان حل کرد. مثلاً، ممکن است فرمول سطح جانبی یک مخروط کامل را بدانیم. چون مخروط ناقص از جداکردن مخروط کوچکی از یک مخروط بزرگتر به دست می‌آید، سطح جانبی آن نیز حاصل تفریق سطوح جانبی آن دو مخروط خواهد بود. حال باید این مطلب را دریک فرمول برحسب R و r و h بنویسیم. و چون چنین کنیم سرانجام چنین خواهیم داشت.

$$S = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2}.$$

پس از یافتن این نتیجه از یک راه یا از راهی دیگر، بعد از محاسبهٔ طولانی، ممکن است آرزومند دست‌یافتن به راهی روشنتر و **مستقیمتر** باشیم. **آیا می‌توانید نتیجه را از راهی دیگر به دست آورید؟ آیا می‌توانید با یک نگاه آن را ببینید؟**

برای دیدن شهودی تمام نتیجه کار خود را با دیدن معنی هندسی هر یک از اجزاء فرمول آغاز می‌کنیم. مثلاً ممکن است توجّه پیدا کنیم که

$$\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

برابر با طول یکی از دو ضلع غیرمتوازی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است که از دوران آن

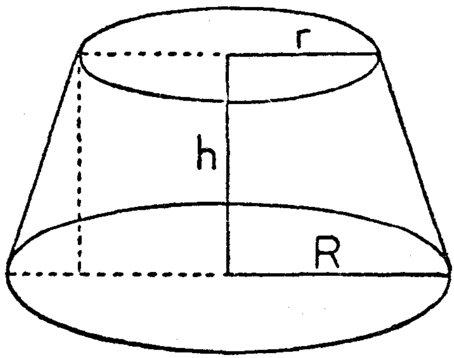
برگرد خطّ واصل میان وسطهای دو ضلع متوازی آن مخروط ناقص به دست آمده است که آن را بلندی مایل مخروط می‌نامیم (شکل ۱۲). و نیز می‌توانیم کشف کنیم که

$$\pi(R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

واسطهٔ عددی میان دو طول محیط قاعده‌های مخروط است. با نگریستن به همین بخش از فرمول، می‌توانیم آن را بدین‌صورت بنویسیم.

$$\pi(R + r) = 2\pi \frac{R + r}{2}$$

که عبارت از محیط مقطعی از مخروط ناقص است که عمود بر ارتفاع و از وسط آن گذشته باشد که آن را مقطع متوسّط می‌نامیم.



شکل ۱۲

با یافتن تفسیرهای جدیدی برای قسمتهای مختلف، اکنون تمام فرمول را در زیر تابش پرتو دیگری مشاهده می‌کنیم. می‌توانیم آن را چنین بخوانیم.

مساحت= محیط مقطع متوسّط × ارتفاع مایل

و این فرمول ما را به یاد مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌السّاقین می‌اندازد که برابر با حاصلضرب ارتفاع در واسطهٔ عددی دو قاعده یعنی طول خطّی در ذوزنقه است (به نام خط متوسّط) که از وسط ارتفاع به موازات دو قاعده رسم شده باشد.

مساحت= خط متوسّط × ارتفاع

با درنظر گرفتن شهودی شباهت دو معادلهٔ مربوط به مخروط ناقص و ذوزنقه، کلّ

نتیجه را دربارهٔ مخروط ناقص «تقریباً به یک نظر» مشاهده می‌کنیم. یعنی احساس می‌کنیم که اکنون به اثبات کوتاه و مستقیم نتیجه‌ای که با محاسبهٔ دراز به دست آمده بود، بسیار نزدیک شده‌ایم.

۲. مثال یادشده مثالی نمونه است. با آن که کاملاً راضی به انحراف از نتیجه نیستیم، می‌خواهیم آن را بهتر کنیم و تغییر دهیم. بنابر این نتیجه را در معرض مطالعه و تحقیق قرار می‌دهیم و می‌کوشیم تا آن را بهتر بفهمیم و سیماهای تازه‌ای از آن را ببینیم. ممکن است نخست در آن موفّق شویم که تفسیر و تعبیر تازه‌ای برای بعضی از قسمتهای نتیجه به دست آوریم. سپس ممکن است آن اندازه بخت با ما یار شود که روش تازه‌ای برای تصوّر و ادراک قسمت دیگری از آن را اکتشاف کنیم.

با آزمودن قسمتهای مختلف یکی پس از دیگری، کوشش در ملاحظه کردن آنها از راههای گوناگون، ممکن است سرانجام به آنجا برسیم که کلّ نتیجه را در روشنی و پرتو دیگری ببینیم، و دریافت جدید ما از نتیجه محتملاً راه استدلال تازه‌ای به ما القا خواهد کرد.

باید اعتراف کنیم که این همه ممکن است برای ریاضیدانی آزموده که بامسائل پیشرفته‌تر سر و کار دارد، بیش از آن اتّفاق بیفتد که برای شخص تازه کاری که بامسئله‌ای ابتدایی دست و پنجه نرم می‌کند. ریاضیدان که درعلوم ریاضی دانش و معرفت فراوان دارد، بیش از شخص تازه کار درمعرض این خطر است که برای حلّ مسئله بیش از اندازه شناخت خود را بسیج کند وبه برهان واستدلالی به صورت غیر ضروری پیچیده برسد. ولی به عنوان جبران، ریاضیدان ماهر نسبت به شخص غیر ماهر ومبتدی برای توجّه به تفسیر مجدّد جزئی از نتیجه و پرداختن به جمع‌آوری این گونه مزایای کوچک صلاحیّت بیشتر دارد وبهتر می‌تواند کلّ نتیجه را دوباره قالبریزی وساده کند.

باوجود این، حتّی در کلاسهای ابتدایی ریاضیّات امکان آن هست که شاگردان یک راه حلّ بیجهت پیچیده‌ای عرضه کنند. بنابراین استاد باید لااقل یکی دوبار به شاگردان خود نشان دهد که نه تنها چگونه مسئله راکوتاه حل کنند بلکه نیز این راتعلیم دهد که چگونه در خود حلّ مسئله نشانه‌هایی برای رسیدن به یک راه حلّ کوتاهتر بیابند. نیز رجوع کنید به **برهان خلف و برهان غیرمستقیم.**

آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟ آیا می‌توانید دلیل و برهان را امتحان کنید؟

پاسخ خوبی به این پرسشها اعتماد ما را به حلّ مسئله بیشتر می‌کند و به استحکام شناخت ما مدد می‌رساند.

۱. نتایج عددی مسائل ریاضی رامی‌توان ازمقایسه کردن آنها با اعداد مشاهده شده یاباتخمینی از عقل سلیم نسبت به اعداد مشاهده شده مورد آزمایش قرار داد. چون مسائل برخاستهٔ ازنیازهای علمی یا کنجکاوی طبیعی غالباً همیشه هدفی از واقعیّات دارند، باید توقّع آن داشته باشیم که از چنین مقایسه‌ای با واقعیّتهای قابل مشاهده به ندرت صرف نظر شود، ولی هر معلّمی می‌داند که شاگردان از این لحاظ کارهای باور نکردنی انجام می‌دهند. بعضی از آنان هرگز از این امر پریشانی خاطر پیدا نمی‌کنند که مثلاً در ضمن حلّ مسئله‌ای سنّ ناخدای یک کشتی را که ضمناً پدر بزرگ است، ۸ سال و ۲ ماه به دست آورند. واین غفلت از واقعیّت آشکار لزوماً دلیل کودنی ونادانی نیست بلکه بیشتر بی‌اعتنا بودن نسبت به مسائل ساختگی را نشان می‌دهد.

۲. مسائل «حروفی» بیشتر و بهتر ازمسائل «عددی» پذیرای آزمون‌های بیشتر وجالب توجّه ترند (بخش ۱٤).برای آوردن مثالی دیگر، یک هرم ناقص مربّع القاعده را درنظر می‌گیریم. اگر اندازهٔ ضلع قاعدهٔ زیرین a و از آن زبرین b باشد، حجم آن چنین می‌شود.

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3} h.$$

که می‌توانیم آن را از راه **تخصیص** مورد آزمایش قرار دهیم. اگر $b = a$ باشد، هرم ناقص به صورت یک منشور در می‌آید و فرمول صورت a^2h پیدا می‌کند، و اگر $b=0$ شود، هرم ناقص شکل هرم کامل پیدا می‌کند وفرمول به صورت $\frac{a^2h}{3}$ در می‌آید. ممکن است **آزمون با بُعد** را به کار بریم. ونیز می‌شود فرمول را با **تغییر داده‌ها** در معرض آزمایش قرار داد. در واقع اگر هریک از سه کمّیّت مثبت a و b و h افزایش پیدا کند، اندازهٔ فرمول نیز افزایش پیدا خواهد کرد.

آزمون از این گونه را نه تنها دربارهٔ نتیجهٔ نهایی بلکه دربارهٔ نتایج وسط کار می‌توان به کار گرفت. چندان سودمندی دارند که آمادگی پیدا کردن برای انجام دادن آنها به زحمتش می‌ارزد. رجوع کنید به **تغییر شکل مسئله**،٤. برای به دست آوردن قابلیّت جهت انجام دادن این گونه آزمونها، می‌توان مزیّتی از عمومیّت دادن یک «مسئلهٔ عددی» وتبدیل کردن آن به «مسئلهٔ حروفی» به دست آورد. رجوع کنید به

تعمیم،۳.

۳. آیا می‌توانید برهان را امتحان کنید؟ با امتحان کردن گام به گام برهان واستدلال از تکرار محض جلوگیری می‌شود. نخست تکرار محض خسته کننده است وآموزندگی ندارد وبرتوجّه ودقّت فشار وارد می‌آورد. دوم، درآنجا که مبتلای به سکندری خوردن شده‌ایم، اگر اوضاع واحوال همان باشد که پیشتر بود، احتمال سکندری خوردن در مرتبهٔ دوم نیز هست. اگر احساس می‌کنیم که لازم است بار دیگر به آزمودن گام به گام استدلال بپردازیم، لااقل باید ترتیب گامها یا گروهبندی آنها را عوض کنیم تا تغییری پیدا شود.

۴. برگزیدن نقطهٔ ضعف برهان وآن را نخست آزمایش کردن، مستلزم کار کمتر ودلچسبتر است. پرسشی که در گزینش نقاطی از برهان که ارزش آزمون کردن دارند مفید واقع می‌شود چنین است: **آیا از همهٔ داده‌ها استفاده کرده‌اید؟**

۵. آشکار است که شناخت غیرریاضی ما نمی‌تواند به تمامی برپایهٔ براهین صوری بنا شده باشد.محکمترین قسمت شناخت زندگی روزانهٔ ما به توسّط آزمایشهای روزانه در معرض آزمون قرار می‌گیرد وتقویت پیدا می‌کند. آزمونهای از راه مشاهده به صورتی منظّمتر در علوم طبیعی اجرا می‌شود. این‌گونه آزمونها صورت تجربیّات وآزمایشها واندازه‌گیریهای دقیق پیدا می‌کند، ودر علوم فیزیک با استدلال ریاضی ترکیب می‌شود. آیا معرفت ریاضی ما می‌تواند تنها بر اثباتهای صوری مبتنی باشد؟

این سؤال پرسشی فلسفی است که نمی‌توانیم در این جا آن را به بحث بگذاریم. یقینی است که شناخت شما، یا شناخت من، یا شناخت شاگردان شما در ریاضیّات تنها مبتنی بر براهین صوری نیست. اگر اصلاً شناخت مستحکمی وجود داشته باشد، دارای پایهٔ آزمایشی گسترده‌ای است، واین پایه وشالوده با حلّ هر مسئله که نتیجهٔ آن با کامیابی امتحان شده باشد، گسترده‌تر می‌شود.

برهان خلف واثبات یا برهان غیرمستقیم روشهای متفاوت ولی وابستهٔ به یکدیگر است.

در برهان خلف باطل بودن یک فرض با استخراج امری آشکارا محال از فرض صحیح بودن آن به اثبات می‌رسد. «برهان خلف» روشی ریاضی است ولی شباهتی به ریشخند و استهزایی دارد که روش موردپسند اهل طنز است. در این طنز و استهزا

برحسب تمام ظواهر عقیده‌ای مورد قبول واقع می‌شود و دربارهٔ آن تأکید و تأکید مشدّد صورت می‌گیرد تا این که سرانجام به یک امر محال و بیمعنی منجر شود.

در **برهان غیرمستقیم** راست بودن یک ادّعا ازطریق اثبات نادرستی فرض متقابل آن صورت می‌گیرد. اثبات غیرمستقیم شباهتی به حیلهٔ سیاستمدارانه دارد که با خراب کردن نام نیک یک نامزد انتخابات نامزد دیگری را برکرسی می‌نشاند.

برهان خلف و اثبات غیرمستقیم هردو از افزارهای مؤثّر اکتشافند که خود را به صورت طبیعی برعقل ساعی و فعّال عرضه می‌دارند. با وجود این معدودی از فلاسفه و بسیاری از مبتدیان آنها را دوست ندارند که این مطلبی قابل قبول است، مردمانِ با مزاج طنزپرور و سیاستمداران حیله گر مورد پسند همه کس نیستند. نخست به مجسّم ساختن تأثیر هردو روش به وسیلهٔ مثالهایی می‌پردازیم و سپس دربارهٔ اعتراضهایی که برضدّ آنها شده بحث خواهیم کرد.

برهان خلف. ارقام از یک تا ۱۰ را به صورتی که هیچ رقم مکرّر نشده باشد چنان بنویسید که مجموع آنها برابر با ۱۰۰ شود.

با تلاش برای حل کردن این معمّا که صورت بیانی آن نیازمند مقداری وضوح و روشن شدن است، می‌توانیم چیزی دربارهٔ آن بفهمیم.

مجهول چیست؟ دسته‌ای از اعداد، و مقصود ما از اعداد در اینجا البتّه اعداد صحیح متعارفی است.

چه چیز داده شده؟ عدد ۱۰۰.

شرط چیست؟ شرط دو جزء دارد. نخست، درضمن نوشتن دستهٔ اعداد مطلوب می‌بایستی هریک از ده رقم ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ را تنها یک بار به کار بریم. دوم، مجموع همهٔ اعداد در این دسته باید ۱۰۰ باشد.

تنها یک جزء از شرط را نگاه دار و باقی آن را حذف کن. تنها قسمت اوّل شرط را تأمین کردن آسان است. دستهٔ ۱۹، ۲۸، ۳۷، ٤٦، ۵۰ را درنظر بگیرید؛ هریک از ارقام تنها یک بار در آن آمده است. ولی البتّه با قسمت دوم شرط نمی‌خواند. مجموع این اعداد ۱۸۰ است نه ۱۰۰. ولی می‌توانیم آن را بهتر کنیم. «دوباره بکوش». بسیار خوب،

$$۱۹+۲۸+۳۰+۷+٦+۵+٤=۹۹$$

قسمت اوّل شرط عمل شده و قسمت دوم آن تقریباً چنین است؛ به جای ۱۰۰ مجموع ۹۹ شده است. اگر از قسمت اوّل شرط چشم بپوشیم،

می‌توانیم قسمت دوم را چنین تأمین کنیم،

۱۹ +۲۸ +۳۱ +۷ +٦ +۵ +٤ =۱۰۰

قسمت اوّل شرط مراعات نشده : رقم یک دراین مجموعه دوبار آمده و رقم صفر در آن دیده نمی‌شود. باقی رقمها درست است. «باز هم تلاش کن».

ولی پس از چند آزمایش ناموفّق می‌توانیم به این گمان بیفتیم که به دست آوردن ۱۰۰ بدا ن گونه که خواسته شده ممکن نیست. و بالاخره مسئله‌ای بدین صورت طرح می‌شود: **ثابت کنید که تأمین هر دو شرط اظهار شده در آن واحد میسّر نیست.**

دانشجویان خوب ممکن است در یابند که این مسئله بر ذهنشان می‌گذرد ولی اگر وضع خوبی اختیار کنیم، پاسخ به اندازهٔ کافی آسان است. باید آن حالت فرضی را در معرض آزمایش درآوریم که در آن هر **دو جزء شرط تأمین شده باشد.**

چنان گمان می‌بریم که این وضع عملاً نمی‌تواند پیدا شود و گمان ما که بر پایهٔ تجربه‌ای بنا شده که از ناکام ماندن آزمایشهای ما به دست آمده، بی‌اساس نیست. با این همه فرض می‌کنیم که با وضعی رو به رو شده باشیم که در آن به صورت فرضی و ادّعایی هر دو قسمت شرط تأمین شده باشد. دسته‌ای از اعداد را تخیّل می‌کنیم که مجموع آنها ۱۰۰ شده است. باید اعدادی یک یا دو رقمی باشند. از ده رقم تشکیل شده‌اند که با یکدیگر تفاوت دارند، زیرا که هر یک از ارقام ۰ و ۱ و ۲ و . . . و ۹ تنها یک بار باید در آن دسته اعداد آمده باشد. بدین ترتیب مجموع آن ارقام به کار رفته باید چنین باشد:

۰ +۱ +۲ +۳ +٤ +۵ +٦ +۷ +۸ +۹ =٤۵

بعضی از این ارقام باید اشاره به یکان باشد و بعضی به دهگان. با اندکی زیرکی و هوشمندی می‌توان به این اندیشه دست یافت که حاصل جمع ارقامی که به دهگان اشاره می‌کند دارای اهمّیت خاصّ است. فرض کنیم که این حاصل جمع برابر با t باشد. در این صورت مجموع ارقامی که اشاره به یکان می‌کند عبارت از $45-t$ خواهد بود. بنابراین حاصل جمع همهٔ اعداد در دستهٔ مورد نظر عبارت است از:

$$10t + (45 - t) = 100.$$

که چون از این معادله t را حساب کنیم، اندازهٔ آن می‌شود.

$$t = \frac{55}{9}$$

و اکنون با چیزی رو به رو هستیم که قطعاً نادرست است . اندازهٔ t که به دست

آورده‌ایم یک عدد صحیح نیست، درصورتی‌که t قطعاً باید یک عدد صحیح باشد. کار خود را با این فرض آغاز کردیم که هر دو بخش شرط عرضه شده بتواند در آن واحد تأمین شود، و از این راه به نتیجه‌ای محال رسیدیم. این امر را چگونه می‌توانیم مورد توضیح قرار دهیم؟

فرض نخستین ما می‌بایستی نادرست بوده باشد، هر دوجزء شرط نمی‌تواند درآن واحد باهم تحقّق پیداکند. بدین‌گونه به هدف خود دست یافتیم و ثابت کردیم که دو جزء شرط طرح شده با یکدیگر ناسازگار است و باهم جمع نمی‌شود.

استدلال ما استدلالی نمونه از «برهان خلف» است.

۲. **ملاحظات.** بهتراست به استدلال گذشته بازگردیم تاجهت کلّی سیرآن را به خوبی بفهمیم. می‌خواهیم این مطلب را ثابت کنیم که صورت پذیرفتن شرط خاص، یعنی وضعی که در آن همهٔ قسمتهای یک شرط تواماً تحقّق پیداکند، هرگز امکانپذیر نیست. ولی، اگر هنوز چیزی را به اثبات نرسانیده‌ایم، باید با این امکان روبه‌روباشیم که آن حالت وجود پیداکند. تنها با مواجههٔ سر راست و صریح باآن وضع فرضی و آزمودن آن از نزدیک می‌توانیم امید آن داشته باشیم که نکتهٔ قطعاً نادرستی در آن پیداکنیم. و اگر بخواهیم به صورتی قاطع ثابت کنیم که وضع فرضی غیرممکن است، بایستی دست بر روی نقطه‌ای بگذاریم که یقیناً باطل ونادرست است. بنابراین می‌توانیم ببینیم که روش کامیابی درمثال ما به صورت کلّی معقول و مستدلّ است: باید آن وضع فرضی را که درآن همهٔ اجزاءِ شرط تحقّق پیداکرده است مورد آزمایش قراردهیم، هرچند این وضع به شدّت غیرمحتمل به نظر می‌رسد.

خوانندهٔ آزموده‌تر دراینجا متوجّه نکتهٔ دیگری نیزخواهدشد. گام اصلی در روش عمل ما عبارت از ساختن معادله‌ای از t بود. می‌توانستیم، بدون گمان بردن به این که چیزی درشرط نادرست است، به همین معادله برسیم. اگر بخواهیم معادله‌ای بسازیم، باید با زبان ریاضی این مطلب را بیان کنیم که همهٔ اجزاءِ شرط تحقّق پیداکرده است، هرچند هنوز نمی‌دانیم که آیا عملاً امکان تحقّق یافتن همهٔ قسمتهای شرط با هم وجود دارد یانه.

روش ما«پذیرای برهان» بودن و پیشداوری نداشتن است. ممکن است امیدوار باشیم که مجهول تأمین کنندهٔ شرط را به دست بیاوریم، یا امید آن داشته باشیم که عدم تحقّق شرط را به اثبات برسانیم. ازیک لحاظ تفاوتی ندارد: اگر تحقیق به خوبی جریان پیداکند، درهر دوحالت دریک راه پیش می‌رود، و آن امتحان کردن وضعی فرضی است که درآن شرط تحقّق پیداکرده است و در پایان بحث نشان دادن این که کدام یک از دو

امیدواری به جا بوده است.

به مادهٔ **اشکال**، ۲ مراجعه کنید. نیز به **پاپوس** رجوع کنید، تجزیه و تحلیلی که پایان آن باطل کردن قضیهٔ طرح شده یا اثبات این امر است که «مسئلهٔ یافتنی» عرضه شده جواب ندارد، عملاً یک «برهان خلف» است.

۳. **برهان غیرمستقیم** . اعداد اوّل عبارت از رشتهٔ اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷.... است که نمی‌توانیم آنها را به صورت حاصلضرب عوامل کوچکتر بنویسیم، هر چند این اعداد همه از ۱ بزرگترند.(با قید اخیر عدد ۱ از شمار اعداد اوّل خارج می‌شود که، آشکارا نمی‌تواند به صورت حاصل ضرب عوامل کوچکتر از ۱ نوشته شود ولی طبیعت دیگری دارد و نمی‌شود آن را در شمار اعداد اوّل قرار داد).اعداد اوّل «آخرین عناصر»ی هستند که همهٔ اعداد صحیح (بزرگتر از ۱) می‌توانند به آنها تجزیه شوند. مثلاً،

$$۶۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۷$$

به حاصل ضرب پنج عدد اوّل تجزیه شده است.

آیا رشتهٔ اعداد اوّل نامتناهی است یا در جایی پایان می‌پذیرد؟ طبیعی آن است که گمان کنیم رشتهٔ اعداد اوّل هرگز به پایان نمی‌رسد. اگر در جایی خاتمه پیدا می‌کرد، همهٔ اعداد صحیح را می‌توانستیم به عدّهٔ معدودی از آخرین عناصر واجزاء تجزیه کنیم و جهان به اصطلاح «بسیار فقیر» به نظر می‌رسید. از همین جا مسئلهٔ اثبات نامتناهی بودن شمارهٔ اعداد اوّل پیش آمده است.

این مسئله با مسائل ریاضیّات ابتدایی معمولی بسیار تفاوت دارد و در نظر اوّل حلّ آن دور از دسترس به نظر می‌رسد. با وجود این، همان گونه که گفتیم، بسیار غیر محتمل می‌نماید که یک آخرین عدد اوّلی همچون P وجود داشته باشد، چرا غیر محتمل است؟

بهتر است به صورت صریح با وضعی غیر محتمل رو به روشویم که در آن، بنا به فرض و ادّعا ، یک آخرین عدد اوّل P وجود دارد. آن گاه می‌توانیم همهٔ رشتهٔ اعداد اوّل را به صورت کامل ۲، ۳، ۵، ۷،..... بنویسیم،چرا این اندازه غیر محتمل است؟ کجای آن نادرست است؟ آیا می‌توانیم به چیزی اشاره کنیم که به صورت قطعی غلط و نادرست است.البتّه که می‌توانیم. ما می‌توانیم عدد Q را بدین صورت بسازیم.

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots P) + 1$$

این عدد Q بزرگتر از P است و بنابرآن، بر حسب ادّعا، Q می‌بایستی بر یک عدد اوّل قابل قسمت باشد. حال گوییم که همهٔ اعداد اوّلی که در دسترس ما قرار دارد، بنا به فرض اعداد ۲، ۳، ۵...P است ولی Q به هر یک از آنها که تقسیم شود باقیمانده‌ای برابر با ۱ دارد، در نتیجه Q بر هیچ یک از اعداد یاد شده که بنا به فرض همهٔ اعداد اوّل را تشکیل می‌دهند قابل قسمت نیست.و این چیزی است آشکارا نادرست؛ Q می‌بایستی یا یک عدد اوّل باشد یا بر یک عدد اوّل قابل قسمت باشد.
با آغاز کردن از این فرض که آخرین عدد اوّل P وجود دارد، به یک امر محال آشکار رسیدیم. این را چگونه می‌توانیم توضیح دهیم؟ فرض اصلی ما می‌بایستی نادرست بوده باشد، آخرین عدد اوّل P وجود ندارد. و به این ترتیب توانستیم ثابت کنیم که رشتهٔ اعداد اوّل بیپایان است.

این استدلال ما نمونهٔ برجستهٔ برهان و اثبات غیرمستقیم است. (برهان مشهوری منسوب به اوقلیدس است که در قضیّهٔ ۲۰ از مقالهٔ نهم **اصول** وی آمده است.)

قضیّهٔ خودمان را (حاکی از آن که رشتهٔ اعداد اوّل نامتناهی است) با ابطال قضیّهٔ مخالف آن (حاکی از آنکه رشتهٔ اعداد اوّل در جایی پایان پیدا می‌کند) که از آشکارشدن محال بودن آن نتیجه شد، به اثبات رسانیدیم. بدین ترتیب برهان غیرمستقیم را با «برهان خلف» ترکیب کردیم، این ترکیب نیز نمونه‌ای بسیار عالی است.

۴. **اعتراضها**. روشهایی که دربارهٔ آنها بحث کردیم با مخالفتهای فراوان روبه‌رو شده است. بسیاری از اعتراضهای اقامه شده محتملاً اشکال گوناگون یک اعتراض اصلی است. در اینجا صورتی «عملی» از این اعتراض را مورد بحث قرار می‌دهیم که با حدود تحقیق ما تناسب دارد.

یافتن برهانی که آشکار نباشد یک دستاورد قابل ملاحظهٔ عقلی است ولی فهماندن این برهان یا حتّیٰ فهمیدن کامل آن مستلزم مقداری کوشش و تلاش عقل است. طبیعی است تا خواستار آن باشیم که از کوشش خود سودی به دست آوریم و، البتّه، آنچه در حافظهٔ خود نگاه می‌داریم باید راست و صحیح باشد و دروغ و بیمعنی و محال نباشد.

ولی نگاه داشتن چیزی راست و دارای حقیقت در حافظه از یک «برهان خلف» دشوار می‌نماید. این روش از یک فرض نادرست آغاز می‌کند و از آن نتیجه‌ای به دست می‌آورد که آن نیز نادرست است و نادرستی آشکارتر دارد، تا این که سرانجام به آخرین نتیجه می‌رسد که آشکارا نادرست و باطل است. اگر نخواهیم دروغها و باطلها را در

حافظهٔ خود انبار کنیم باید هرچه را که به آن رسیده‌ایم بدون فاصله و فوری فراموش داریم، ولی این کار شدنی نیست، بدان سبب که همهٔ نکات باید به صورت واضح و راست در ضمن مطالعه و تحقیق در برهان به یاد ما بیاید.

اعتراض به برهانهای غیرمستقیم را اکنون می‌توانیم به اختصار بیان کنیم. با گوش دادن به چنین برهانی، ناگزیر باید در تمام مدّت توجّه خود را به فرض غلطی معطوف داریم که لازم است آن را فراموش کنیم نه به قضیّهٔ راستی که باید آن را در خاطر نگاه داریم.

اگر بخواهیم دربارهٔ شایستگیهای این اعتراضات درست داوری کنیم، باید میان دو کاربرد «برهان خلف»، یکی به عنوان افزار پژوهش و دیگری به عنوان وسیلهٔ بیان و عرضه کردن، تمایز قائل شویم، و دربارهٔ برهان غیرمستقیم نیز همین تمایز را درنظر بگیریم.

باید اعتراف کنیم که «برهان خلف» به عنوان وسیلهٔ بیان و عرضهٔ مطلب نعمت وبرکت خالص وبی‌شائبه نیست. این نحوهٔ استدلال، مخصوصاً اگر طولانی باشد، ممکن است برای خواننده یا شنونده مایهٔ رنج وناراحتی شود. همهٔ استنتاجاتی که متوالیاً انجام می‌دهیم درست است ولی همهٔ اوضاعی که با آنها رو به رو می‌شویم غیرممکن است. حتّیٰ بیان لفظی، ودر صورتی که بنا به ضرورت پیوسته دراین باره تأکید کند که برمبنای فرض نخستین چنین می‌شود، ممکن است خسته کننده باشد؛ کلماتِ «بنا به فرض» و «فرضی »و «ادّعایی» می‌بایستی پیوسته تکرار شود، یا تدبیر دیگری دایم به کار گرفته شود. می‌خواهیم وضع مورد بحث را به عنوان محال بودن طرد کنیم ولی لازم است آن را به عنوان پایگاه گام بعدی نگاه داریم وبیازماییم واین عدم توافق درونی ممکن است در درازمدّت غیرقابل تحمّل شود.

با این همه رد کردن «برهان خلف» به عنوان افزاری برای اکتشاف کاری ابلهانه است. درآن هنگام که، همچون در مثالهای یاد شده، از همهٔ وسایل دیگر کاری برنمی‌آید، ممکن است این برهان به صورتی طبیعی خود را عرضه کند ودستگیر ما شود.

برای رسیدن به این مطلب که تعارضی اساسی میان دونظر مخالف ما نیست، مقداری آزمودگی وتجربه لازم است. تجربه نشان می‌دهد که معمولاً تبدیل کردن برهان غیرمستقیم به برهان مستقیم، یا تنظیم دوبارهٔ برهانی مبتنی بر یک «برهان خلف» طولانی به صورتی مطبوعتر که حتّیٰ «برهان خلف» بتواند به شکل کامل از آن

محو شود (یا پس از تمهیداتی فشرده شود و به صورت معدودی جمله‌های برجسته درآید)، چندان دشوار نیست.

کوتاه سخن آن که، اگر بخواهیم از ظرفیّت و استعداد خود به صورت کامل استفاده کنیم، باید با «برهان خلف» و برهان غیرمستقیم آشنا باشیم. ولی، در آن هنگام که توانستیم از یکی از این دو راه نتیجه‌ای استخراج کنیم، نباید از این امر غافل بمانیم که به راه‌حل به صورت قهقرایی نظر کنیم واز خود بپرسیم که: **آیا می‌توانیم این نتیجه را از راهی دیگر به دست آوریم؟**

اکنون آنچه را که گفتیم با آوردن مثالی مجسّم می‌سازیم.

۵ **تنظیم مجدّد یک برهان خلف.** به برهان عرضه شدهٔ در شمارهٔ ۱ نظر می‌کنیم. برهان خلف از وضعی آغاز کرد که، سرانجام، به امری محال انجامید. ولی بهتر آن است که بخشی از برهان را که مستقلّ از فرض غلط اصلی ومشتمل براطّلاعی مثبت است جداگانه مورد بحث قرار دهیم. با درنظر گرفتن آنچه انجام داده‌ایم، ممکن است متوجّه آن شویم که آنچه تا اینجا کرده‌ایم بدون شک درست است: اگر دسته‌ای از اعداد یک یا دورقمی به صورتی نوشته شده باشد که هریک از ده رقم تنها یک بار در آنها آمده است، درآن صورت حاصل جمع اعداد آن را می‌توان بدین صورت نوشت

$$10t + (45 - t) = 9\,(t + 5)$$

که بنابرآن حاصل جمع قابل قسمت بر ۹ است. ولی معمای طرح شده خواستار آن است که این مجموع ۱۰۰ باشد. آیا چنین امکانی وجود دارد؟ هرگز، بدان جهت که ۱۰۰ بر ۹ قابل قسمت نیست.

آن «برهان خلف» که به اکتشاف دلیل انجامید، در این شکل عرضه کردن ما محو شد.

ضمناً، یک خوانندهٔ آشنای با روش «طرح نُه‌نُه» اکنون می‌تواند همهٔ برهان را با یک نظر ببیند.

۶. **معکوس کردن یک برهان غیرمستقیم.** به استدلال شمارهٔ ۳ پیش از این باز می‌گردیم. با در نظر گرفتن دقیق همهٔ آنچه یاد کردیم، ممکن است اجزاء و عناصری از برهان را بیابیم که از هر فرض غلط استقلال دارند، ولی بهترین برگه از ملاحظهٔ مجدّد معنی خود مسئلهٔ اصلی به دست می‌آید.

آیا مقصود ما از گفتن این مطلب که رشتهٔ اعداد اوّل هرگز به پایان نمی‌رسد چیست؟ آشکارا منظور آن است که: هنگامی که به یقین دانستیم که دسته‌ای متناهی از

اعداد اوّل همچون ۲، ۳، ۵،... P است که در آن آخرین آنها یعنی P تاکنون پیدا شده، **همیشه یک عدد اولّ بیشتر وجود دارد. حال چه باید بکنیم تا وجود سلسله‌ای نامتناهی از اعداد اول را به اثبات برسانیم؟ باید به راهی اشاره کنیم که از آن راه می‌توان عدد اوّلی متفاوت با همهٔ عد د اوّلهای پیش از آن یافت شده به دست آورد.** بدین ترتیب «مسئلهٔ ثابت کردنی» ما در واقع به یک «مسئلهٔ یافتنی» تبدیل می‌شود: **اگر اعداد اوّل ۲، ۳، ۵،... P در دست باشد، عدد اوّل تازه را که متفاوت با همهٔ اوّلهای شناخته شده است پیدا کنید.**

با بیان کردن مجدّد مسئلهٔ اصلی خود به صورت تازه، گام عمده را برداشته‌ایم. اکنون نسبتاً به آسانی می‌توان دید که چگونه باید قسمتهای اصلی برهان پیشین خود را برای منظور تازه به کار بریم. در واقع عدد

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots P) + 1$$

بر یک عدد اوّل قابل قسمت است. عدد اوّل شمارندهٔ Q (مثلاً کوچکترین از این شمارنده‌ها) را N فرض می‌کنیم. (البتّه اگر اتّفاقاً عدد اوّل باشد، درآن صورت $Q = N$ خواهد بود).واضح است که اگر Q بر هریک از اعداد اوّل ۲، ۳،... P تقسیم شود، باقیمانده ۱ خواهد بود، بنابرآن، هیچ یک از این اعداد نمی‌تواند همان عدد N شمارندهٔ Q باشد. ولی این همهٔ آن چیزی است که خواستار آن بودیم: N عدد اوّل است و با همهٔ اعداد اوّل تا پیش از آن یافته شده تفاوت دارد.

این برهان روش معیّنی برای ادامه دادن مکرّر رشتهٔ اعداد اوّل به دست می‌دهد و به حدّی محدود نمی‌شود. هیچ چیز غیرمستقیمی در آن نیست، و هیچ وضع غیرممکنی را نباید در آن در نظر گرفت. با وجود این، به صورت اساسی، همان برهان و اثبات غیرمستقیم سابق است که در معکوس کردن آن توفیق حاصل کرده‌ایم.

بولتسانو، برنارد (۱۸٤۸- ۱۷۸۱)، منطقی و ریاضیدانی که سهم عمده‌ای از **کتاب منطقی شناخت شناسی خود را به موضوع راهیابی اختصاص داده است (جلد سوم ص ۵۷۵- ۲۹۳). وی دربارهٔ این بخش در اثر خود چنین نوشته است: «من اصلاً چنان نمی‌اندیشم که بتوانم در این جا روشی از پژوهش و تحقیق را ارائه دهم که مدّتهای دراز پیش از این به نظر مردمان هنرمند نرسیده باشد، و اصلاً چنین وعده‌ای نمی‌دهم که بتوانید در این کتاب چیز کاملاً تازه‌ای ازاین گونه پیدا کنید. ولی زحمت بیان این**

مطلب را برخود هموار می‌سازم که قواعد و راههای تحقیقی را که همهٔ مردان شایسته از آن پیروی کرده‌اند، و غالباً حتّیٰ آگاهی از این پیروی نداشته‌اند، با کلماتی روشن بیان کنم. با آنکه ازاین پندار فارغم که باید حتّیٰ در انجام این کار به کامیابی برسم، امید آن دارم که اندکی که در اینجا عرضه شده بتواند مطبوع خاطر بعضی از مردمان بشود و بعدها مورد استعمالی پیدا کند.»

به مجهول نگاه کنید. این اندرزی قدیمی است، جملهٔ لاتینی متناظر با آن معنایی بدین صورت دارد: به پایان نگاه کن. منظور خود را به خاطر داشته باش. هدف را فراموش مکن. دربارهٔ چیزی بیندیش که می‌خواهی آن را به چنگ آوری. چشم از چیزی که مطلوب است برمتاب. آنچه را که برای آن تلاش می‌کنی از یاد مبر. **به مجهول نگاه کن. به نتیجه نگاه کن.** دو روایت اخیر ترجمهٔ عبارت لاتینی مخصوصاً درمورد مسائل ریاضی به کار می‌رود، اوّلی برای «مسائل یافتنی» و دومی برای «مسائل ثابت کردنی».

با متمرکز ساختن توجّه خود بر روی هدف و معطوف داشتن اراده به جانب مقصود، درصدد یافتن راهها و وسایلی برای رسیدن به هدف و مقصود برمی‌آییم. وسایل رسیدن به این هدف چیست؟ چگونه می‌توانید به هدف خود برسید؟ چگونه می‌توانید نتیجه‌ای از این گونه به دست آورید. از کدام سببها این نتیجه حاصل می‌شود؟ در کجا دیده‌اید چنین نتیجه‌ای به دست آمده باشد؟ **بکوشید تا به یاد مسئله‌ای متعارفی بیفتید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته است؟ و بکوشید تا به یاد قضیّه‌ای متعارفی بیفتید که همین نتیجه یا نتیجه‌ای مشابه آن را داشته است.** بازهم دو روایت اخیر مخصوصاً به ترتیب به «مسائل یافتنی» و «مسائل ثابت‌کردنی» مربوط می‌شود.

۱. اکنون مسائل ریاضی، یعنی «مسائل یافتنی» و اندرز: **بکوشید تا به یاد مسئله‌ای متعارفی بیفتید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته است** را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. این اندرز و پیشنهاد را با پیشنهاد مندرج درپرسش: **آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟** مقایسه می‌کنیم.

پیشنهاد اخیر از پیشنهاد پیش از آن کلّیتر است. اگر مسئله‌ای وابسته ومرتبط به مسئلهٔ دیگر باشد، آن هر دو دریک چیز با هم اشتراک دارند، ممکن است مشتمل بر چیزها یا مفاهیمی مشترک باشند، یا در داده‌هایی شریک باشند، یا در جزئی ازشرط

ونظایر اینها. نخستین پیشنهاد ما دربارهٔ یک نقطهٔ مشترک خاص تأکید می‌کند: دو مسئله باید یک مجهول داشته باشند. یعنی، مجهول در هر دو حالت باید چیزی از مقولهٔ واحد مثلاً در هر دو حالت طول یک خطّ مستقیم، بوده باشد.

در مقایسهٔ با پیشنهاد کلّی، در پیشنهاد خاص مقداری صرفه‌جویی صورت گرفته است.

نخست،می‌توانیم در عرضه کردن مسئله تلاش کمتر مصرف کنیم؛ نباید یکباره به همهٔ مسئله نگاه کنیم، بلکه نظر ما باید تنها متوجّه به مجهول باشد. در این صورت مسئله در برابر ما بدین شکل نظری خلاصه می‌شود:

«اگر.... درازای خط را به دست آورید.»

دوم ، مقداری صرفه‌جویی درانتخاب پیدا می‌شود. مسائل بسیاری ممکن است با مسئلهٔ طرح شده وابستگی داشته ودر نقطه‌ای یا نقطه‌ای دیگر مشترک باشند. ولی با نگاه کردن به مجهول، انتخاب خود را محدود می‌کنیم؛ تنها مسائلی را در نظر می‌گیریم که همان مجهول را داشته باشند. والبتّه در میان مسائل دارای یک مجهول نخست آنها را در نظر می‌آوریم که ابتداییتر وآشناتر باشند.

۲. مسئله‌ای که در برابر ما است چنین صورتی دارد:

«اگر..، درازای خط را به دست آورید.»

ساده‌ترین وآشناترین مسئله از این گونه آن است که به مثلّثها مربوط می‌شود: اگر سه تا از اجزاء سازندهٔ مثلّث در دست باشد، طول یک ضلع را به دست آورید. با به خاطر آوردن این مطلب، چیزی یافته‌ایم که ممکن است مربوط ومناسب باشد: **در اینجا مسئله‌ای مربوط به مسئلهٔ شما موجود است که پیشتر آن را حل کرده‌اید. آیا می‌توانید از آن استفاده کنید؟ آیا می‌توانید نتایج آن را به کار برید؟** برای بهره‌گیری ازنتایج آشنا ومتعارفی مربوط به مثلّثها،باید مثلّثی در شکل خود داشته باشیم. آیا در آن مثلّثی هست؟ یا این که آیا می‌توانیم برای بهره‌مند شدن از آن نتایج آشنا مثلّثی وارد شکل کنیم؟ **آیا لازم است بعضی از عناصر کمکی را وارد کار کنیم که به کاربردن آنها را ممکن سازد؟**

مسائل سادهٔ چندی وجود دارد که مجهول آنها یک ضلع مثلّث است (داده‌های آنها از یکی به دیگری تغییر می‌کنند؛ ممکن است دو زاویه و یک ضلع داده شده باشد، یا دو ضلع و یک زاویه؛ و وضع زاویه نسبت به ضلعهای داده شده ممکن است متفاوت باشد. سپس، همهٔ این مسائل در مثلّثهای

قائم‌الزّاویه به صورتی خاص ساده می‌شود.) باجلب شدن تمام توجّه ما نسبت به مسئله‌ای که در برابر خود داریم، درآن می‌اندیشیم که چه نوع مثلّثی برای حلّ مسئله باید انتخاب کنیم، و کدام مسئلهٔ پیشتر حل شده (باهمان مجهول مسئلهٔ مقابل ما) را می‌توانیم بهتر باهدف کنونی خود تطبیق دهیم.

پس از وارد کردن مثلّث کمکی، ممکن است هنوز سه جزء سازندهٔ مثلّث را ندانیم. ولی این ضرورت مطلق ندارد، اگر پیشبینی کنیم که اجزاءِ نامعلوم را می‌توانیم به‌طریقی به دست بیاوریم، به اساسیترین پیشرفت دست یافته و نقشه‌ای برای حلّ مسئله طرح کرده‌ایم.

۳. روشی که پیشتر (درزیر شمارهٔ ۲) طرحریزی شد، به صورتی اساسی در بخش ۱۰ تجسّم یافت (تصویر تاحدّی به سبب کندی دانشجویان تاریک شده است). افزودن چند مثال مشابه اصلاً دشواری ندارد. در حقیقت حلّ همهٔ «مسائل یافتنی» را که معمولاً درکلاسهای کمتر پیشرفته عرضه می‌شود، می‌توانیم با این پیشنهاد و راهنمایی آغاز کنیم: و بکوشید تابه یاد مسئله‌ای آشنا بیفتید که همین مجهول یا مشابه آن را داشته باشد.

باید این گونه مسائل را به شکل نظری درنظر بگیریم و نخست به مجهول توجّه کنیم:

(۱) اگر.... طول خط را حساب کنید.
(۲) اگر.... زاویه را بیابید.
(۳) اگر... حجم چهاروجهی را به دست آورید.
(٤) اگر.... نقطه را بسازید.

اگر مقداری آزمودگی درحل کردن مسائل مقدّماتی ریاضی داشته باشیم،به‌آسانی مسئله یا مسائل آشنای ساده‌ای را به یاد می‌آوریم که همان مجهول را داشته‌اند. اگر مسئلهٔ طرح شده یکی از آن گونه مسائل نباشد، طبیعتاً درآن می‌کوشیم که از آنچه برای ما آشنا است بهره‌گیری کنیم و نتیجهٔ آن مسائل ساده را مورد استفاده قرار دهیم. درآن می‌کوشیم تاچیز خوب شناخته‌ای را وارد مسئله کنیم و با این کار ممکن است آغاز خوبی برای حلّ مسئله داشته باشیم.

درهریک از چهار حالت یاد شدهٔ پیش از این، یک نقشهٔ آشکار و یک حدس موجّه‌نما دربارهٔ جریان آیندهٔ پیشرفت حلّ مسئله وجود دارد.

(۱) مجهول باید همچون ضلعی از یک مثلّث به دست آید. کاری که می‌ماند وارد کردن یک مثلّث مناسب باسه معلوم یا با اجزاءِ سازنده‌ای است که آسان به دست می‌آید.

(۲) مجهول باید همچون زاویه‌ای از یک مثلّث به دست آید. کاری که باید صورت بگیرد وارد کردن یک مثلّث مناسب است.

(۳) مجهول را هنگامی می‌توانیم به دست آوریم که وسعت قاعده و طول ارتفاع شناخته باشد. آنچه می‌ماند یافتن مساحت یک وجه و ارتفاع متناظربا آن است.

(٤) مجهول باید همچون محلّ تقاطع دو مکان هندسی به دست آید که هریک از آنها یا یک دایره است یا خطّی از یک مثلّث. کاری که می‌ماند معلوم کردن این مکانهای هندسی از روی شرط مسئله است.

در همهٔ این حالات نقشهٔ حلّ مسئله را یک مسئلهٔ ساده تلقین می‌کند که همان مجهول را دارد و چنان می‌خواهیم که نتیجه یا روش آن را در مورد مسئلهٔ حل کردنی مورداستفاده قراردهیم. در ضمن پیروی از این نقشه، البتّه امکان آن هست که با دشواریهایی روبه‌روشویم، ولی اندیشه‌ای برای آنچه باید با آن آغازکنیم داریم که این خود مزیّتی بزرگ است.

٤. اگر مسئله‌ای حل شده و دارای مجهولی همچون مجهول مسئلهٔ حل کردنی وجودنداشته باشد، چنین مزیّتی وجودنخواهد داشت. دراین‌گونه حالات، دست‌وپنجه نرم کردن با مسئلهٔ طرح شده بسیاردشوارتر است.

«وسعت سطح کرهٔ با شعاع داده شده را حساب کنید». این مسئله را ارشمیدس حل کرده است. به‌ندرت مسئله‌ای ساده‌تر از این با همین مجهول یافت می‌شود و در آن زمان یقیناً چنین مسئلهٔ ساده‌تر وجود نداشته است که ارشمیدس بتواند از آن در حلّ مسئلهٔ یافتنی مساحت‌کره بهره‌گیری‌کند. در حقیقت به راه حلّ ارشمیدس باید همچون یکی از برجسته‌ترین دستاوردهای ریاضی نظرکنیم.

«وسعت سطح کرهٔ محاط در یک چهاروجهی را پیداکنید که اندازه‌های شش یال آن داده شده است.» اگر نتیجهٔ ارشمیدس را دراختیارداشتیم بدون بهره‌مند بودن از نبوغ وی می‌توانستیم این مسئله را حل کنیم؛ کاری که مانده است این است که اندازهٔ شعاع کرهٔ محاطی را برحسب اندازه‌های یالهای چهاروجهی به‌دست آوریم. این نیز یک مسئلهٔ آسان نیست ولی دشواری آن هرگز به پای دشواری مسئلهٔ ارشمیدس نمی‌رسد.

دانستن یا ندانستن یک مسئلهٔ حل شدهٔ پیشین با همان مجهول مسئلهٔ حل کردنی

چیزی است که همهٔ تفاوت میان یک مسئلهٔ آسان را با یک مسئلهٔ دشوار به وجودمی‌آورد.

۵. هنگامی که ارشمیدس وسعت سطح کره را به دست آورد، همان گونه که اشاره کردیم، از هیچ مسئلهٔ پیشتر حل شدهٔ با همین مجهول آگاهی نداشت. ولی از مسائلی پیشتر حل شده آگاه بود که مجهول ساده‌تری داشتند. سطوحی منحنی وجود دارد که یافتن وسعت آنها از یافتن وسعت سطح کره آسانتر است ودر زمان ارشمیدس آنها را به خوبی می‌شناختند همچون وسعت سطح جانبی یک استوانه ومخروط قائم ومخروط ناقصی از همین مخروط. به یقین می‌توانیم ادّعا کنیم که ارشمیدس با دقّت از این حالتهای ساده‌تر مشابه بهره‌گیری کرده بوده است ودر واقع در راه‌حلّ وی تقریبهایی به کار رفته وکره را به صورت مجموعه‌ای مرکب از دومخروط وچندین مخروط ناقص در نظر گرفته است (رجوع کنید به **تعریفها**،٦).

اگر نتوانیم مسئله پیشتر حل شده‌ای پیدا کنیم که همان مجهول مسئله طرح شدهٔ در برابر ما را داشته باشد، در آن می کوشیم تا مسئله‌ای با مجهول مشابه پیدا کنیم. مسائلی از گونهٔ اخیر کمتر از مسائل گونهٔ پیشتر بامسئلهٔ حل کردنی ما ارتباط نزدیک دارند وبنابراین عموماً دشوارتر می‌توانند برای هدف ما مفید واقع شوند، ولی باوجود این راهنماهای ارزشمندی به شمار می‌روند.

٦. چند ملاحظه دربارهٔ «مسائل ثابت کردنی» برآنچه گفتیم می‌افزاییم، اینها به مطالب گسترده‌تری که دربارهٔ «مسائل یافتنی» گفتیم شباهت دارد.

می‌خواهیم یک قضیّه را که به صورت روشن بیان شده است ثابت کنیم، یا بطلان آن را به اثبات برسانیم. هر قضیّه که پیش از آن ثابت شده واز راهی باقضیّهٔ ثابت کردنی ما ارتباط داشته باشد، احتمال آن هست که بتواند برای حلّ قضیّهٔ طرح شده سودمند واقع شود. ولی توقّع بیواسطه ترین سودمندی را باید از قضایایی داشته باشیم که نتیجه‌ای مانند نتیجهٔ قضیّهٔ طرح شده دارند. با دانستن این مطلب به نتیجه نگاه می کنیم، یعنی قضیّهٔ طرح شده را باتأکید دربارهٔ نتیجهٔ آن مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. راه نظرکردن به قضیّه می‌تواند بدین صورت بیان شود:

«اگر...... زاویه‌ها بایکدیگر برابر خواهند بود.»

توجّه خود را برروی نتیجه‌ای که در برابر ما است متمرکز می‌سازیم ودر آن

می‌کوشیم تا دربارهٔ قضیّهٔ آشنایی بیندیشیم که همین نتیجه یا مشابه آن را داشته باشد. مخصوصاً، تلاش می‌کنیم تا به قضایای آشنای بسیار سادهٔ از این گونه بیندیشیم.

درحالت مورد نظر ما، قضایای چندی از این گونه وجود دارد وممکن است این مطلب را به یاد بیاوریم که: «اگر دومثلّث متشابه باشند، زوایای متناظر آنها بایکدیگر برابر است.» **این قضیّه باقضیّهٔ حل کردنی شما ارتباط دارد. آیا می‌توانید آن را مورد استفاده قرار دهید؟ آیا برای امکان استفادهٔ از آن باید عنصری اضافی وارد کنید؟**

به دنبال این پیشنهادها وراهنماییها، وباکوشش برای داوری کردن در خصوص کمکی که از یک قضیّهٔ به خاطرآمده می‌توان گرفت، ممکن است نقشه‌ای برای حلّ مسئله به نظر ما برسد: بهتر است در آن بکوشیم تا برابربودن زاویه‌های منظور را از روی مثلثهای متشابه ثابت کنیم. می‌بینیدکه باید یک جفت مثلّث مشتمل بر آن زوایا وارد کار کنیم و متشابه‌بودن آنها را به اثبات برسانیم. چنین نقشه‌ای برای آغازکردن کار قطعاً خوب است و ممکن است همچون در بخش **۱۰** سرانجام به هدف مطلوب برسد.

۰۷ اکنون آنچه راکه پیشترگفتیم خلاصه می‌کنیم. با به خاطرآوردن مسائل پیشتر حل‌شدهٔ با مجهول مسئلهٔ حل‌کردنی یا با مجهول همانند آن (و قضایای پیشتر حل شدهٔ با نتیجهٔ قضیّهٔ ثابت‌کردنی یا نتیجه‌ای همانند آن) فرصت نیکویی برای آغازکردن حلّ مسئله (یا اثبات قضیّه) در جهت صحیح آن فراهم می‌آید و می‌توانیم نقشه‌ای برای حلّ مسئله (یا اثبات قضیّه) طرحریزی کنیم. در حالات ساده، که در کلاسهای ریاضیِ کمتر پیشرفته غلبه با آنها است، مسائل بسیار سادهٔ ابتدایی دارای همان مجهول (و قضایای با همان نتیجّه) معمولاً کفایت می‌کند. کوشش برای به خاطرآوردن مسائل با همان مجهول یک روش آشکار و موافق عقل سلیم است (به آنچه از این بابت در بخش **٤** گفته‌ایم رجوع کنید). مایهٔ شگفتی است که چنین تدبیر ساده و سودمندی اکنون به‌صورت وسیع شناخته شده نیست، نویسنده را اعتقاد آن است که پیش از این حتّیٰ با تمام کلّیّت بیان نشده است. به هر صورت، استادان و دانشجویان ریاضی نباید از استعمال درست این پیشنهاد غافل بمانند: **به مجهول نگاه کنید! و بکوشید تا دربارهٔ مسئله‌ای آشنا بیندیشید که همین مجهول یا مجهولی مشابه آن داشته باشد.**

پاپوس، ریاضیدان برجستهٔ یونانی، محتملاً درحوالی سال ۳۰۰ میلادی زندگی

می‌کرده است. وی در مقالهٔ هفتم از کتاب مجموعه‌های خود از شاخه‌ای از ریاضیّات به نام یونانی آنالوئومنوس (Analyomenos) سخن گفته است که می‌توانیم آن را «گنجینهٔ تحلیل» یا «فنّ حل کردن مسائل» یا حتّیٰ «راهیابی» (به انگلیسیHeuristic) ترجمه کنیم؛ چنان می‌نماید که آخرین اصطلاح برای ترجمه شایسته‌تر باشد. ترجمهٔ انگلیسی خوبی از کتاب پاپوس در دست است [1]، آنچه پس از این می‌آید ترجمه‌ای از متن اصلی است:

«آنچه اصطلاحاً راهیابی خوانده می‌شود، به اختصار، مجموعه‌ای از آموزه‌ها است که برای استفادهٔ کسانی نوشته شده که، پس از خواندن اصول متعارفی، خواستار به‌دست‌آوردن مهارت در حلّ مسائل ریاضی هستند، و کاربرد آن تنها برای چنین کسان سودمند است. این فن ساختهٔ سه نفر است: اوقلیدس مؤلف کتاب اصول، آپولونیوس پرگایی، و ارسطایوس بزرگتر. روشهای تجزیه (آنالیز) و ترکیب (سنتز) را تعلیم می‌دهد.

«درتجزیه از آنچه مطلوب و خواسته است آغاز می‌کنیم، وآن رامسلّم می‌گیریم، ونتایجی از آن استخراج می‌کنیم، ونتایجی از نتایج، تا آن که به نقطه‌ای برسیم که می‌توانیم آن را به عنوان نقطهٔ آغاز ترکیب به کار بریم.چه در آنالیز(تجزیه) چنان فرض می‌کنیم که آنچه مطلوب است از پیش به دست آمده است (آنچه فرض می‌کنیم، پیشتر یافت شده، و آنچه باید درستی آن رابه اثبات برسانیم درست است). در آن تحقیق می‌کنیم که از کدام امر مقدّم آنچه را که می‌خواهیم می‌توانیم به دست آوریم، سپس به تحقیق دراین باره می‌پردازیم که مقدّم برمقدّم چیست، وهمچنین پس ازآن، تا آن که بعداز گذشتن از مقدّمی به مقدّم دیگر، سرانجام به چیزی برسیم که پیشتر دانسته بوده یا بنابه فرض صحّت داشته است. این روش رابه نام تجزیه یا تحلیل یاحلّ روبه عقب یا استدلال قهقرایی می‌نامیم.

«ولی در ترکیب (سنتز)، فرایند رامعکوس می‌کنیم وآخرین نقطه‌ای راکه درتحلیل به آن رسیده بودیم نقطهٔ آغاز قرار می‌دهیم، که چیزی از پیش دانسته یابنا به فرض دارای صحّت وحقیقت است. و از آن آنچه راکه درتجزیه وتحلیل برآن مقدّم بوده است استنتاج می‌کنیم وبا پیش رفتن واستنتاج کردنهای متوالی بار دیگر گامهای خود راترسیم می‌کنیم وبالاخره به آنچه مطلوب است می‌رسیم. این روش رامابه نام سنتز یاحلّ ساختمانی یا استدلال پیشرونده می‌نامیم.

۱- ا. ت. ل. هیث، سیزده کتاب اصول اوقلیدس، جلد اوّل ص ۱۳۸

«حال گوییم که آنالیز بردوگونه است: یکی آنالیز «مسائل ثابت کردنی» که هدف آن اثبات صحّت قضیّه‌ها است، دیگری آنالیز «مسائل یافتنی» که هدف آن به دست آوردن مجهولات است.

«اگر مسئله‌ای برای ثابت کردن داشته باشیم، ثابت کردن یا باطل کردن یک قضیّهٔ داده شدهٔ A برعهدهٔ ما است. هنوز نمی‌دانیم که آیا A درست است یانادرست، ولی از A قضیّهٔ دیگر B و از B قضیّهٔ دیگر C را استخراج می کنیم و این کار را چندان ادامه می‌دهیم تا به یک قضیّهٔ آخری L برسیم که دربارهٔ آن شناخت معلوم و معیّن داریم. اگر L راست باشد، A نیز راست خواهد بود، بدان شرط که همهٔ استخراجهای ما انعکاسپذیر بوده باشد. از روی L قضیّهٔ K را که درتحلیل برآن مقدّم است ثابت می کنیم وبه همین گونه پیش می‌رویم ودوباره گامهای خود راترسیم می کنیم، از C ، B را به اثبات می‌رسانیم، واز B ، A را، واز همین راه به هدف خود می‌رسیم. ولی اگر L نادرست باشد، بطلان A راثابت کرده‌ایم.

«اگر یک مسئلهٔ یافتنی داشته باشیم، در آن از ما خواسته شده است که مجهولی همچون x را که به صورتی روشن شرط بیان شده را تحقق بخشد به دست آوریم. هنوز نمی‌دانیم که آیا چیزی که بتواند چنین شرطی را تحقق بخشد ممکن است یانه؟ ولی چنان فرض می کنیم که یک x موافق با شرطی مفروض وجود دارد، و از آن مجهول دیگر y را استخراج می کنیم که باید شرطی وابستهٔ به آن را تحقق بخشد، سپس y را به مجهول دیگر پیوند می‌دهیم و به همین گونه پیش می‌رویم تا به آخرین مجهول z برسیم که شرط خواسته شده درآن تحقق پیدا کند. اگر واقعاً یک z بدان صورت وجود داشته باشد که شرط تحمیل‌شدهٔ برآن را تحقق بخشد، یک x نیز وجود خواهد داشت که شرط اصلی را تحقق بخشد، به شرط آنکه همهٔ استثنا جها متوالی ما انعکاسپذیر بوده باشد. نخست z را پیدا می کنیم، سپس با معلوم‌بودن z مجهول مقدم بر آن را به دست می‌آوریم و به همین‌ترتیب پیش می‌رویم تا سرانجام پس از دانستن y از روی آن x را به دست آوریم و بدین‌ترتیب به هدف خود برسیم. ولی اگر چیزی نباشد که شرط تحمیل شدهٔ بر z را تأمین کند، مسئلهٔ مربوط به x جواب نخواهد داشت.»

این مطلب را نباید فراموش کنیم که آنچه پیش از این گذشت، ترجمهٔ لفظ به لفظ نیست بلکه ترجمهٔ آزاد و همراه با شرح است. تفاوتهای میان متن اصلی و این شرح شایستهٔ تفسیر است، بدان جهت که متن پاپوس از جهات مختلف حائز اهمّیت است.

۱. در ترجمه و شرح ما اصطلاحات به صورتی قطعیتر از متن به کار رفته و علامتهای A و B L و... و x و y و z در اصل وجود ندارد.

۲.در ترجمهٔ و شرح (ص ۹۵ سطر ۹) عبارت «مسائل ریاضی» آمده، در صورتی که در متن اصلی به جای آن «مسائل هندسی» دیده می‌شود. این تغییر برای تأکید دربارهٔ این مطلب بوده است که روشهای توصیف‌شدهٔ به توسّط پاپوس به هیچ وجه محدود به مسائل هندسه نیست، و در واقع باید بگوییم که حتی منحصر به مسائل ریاضی هم نیست. باید این مطلب را با مثالی روشن کنیم چه، در این موضوعات، کلّیّت و استقلال از ماهیّت موضوع بحث حایز اهمّیّت است (به بخش ۳ رجوع کنید).

۳. **مجسّم ساختن جبری** . x را چنان به دست آورید که در معادلهٔ زیر صدق کند.

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

این یک مسئلهٔ یافتنی است که حلّ آن برای شخص مبتدی چندان آسان نیست. باید آن شخص با اصول آنالیز ریاضی آشنا باشد؛ البتّه مقصود کلمهٔ «آنالیز» نیست بلکه اندیشهٔ رسیدن به هدف از راه تحویلهای مکرّر مقصود است. علاوه بر این باید با ساده‌ترین گونه‌های معادلات آشنا باشد. حتّیٰ با مقداری شناخت، اندیشه‌ای نیک و اندکی یاری بخت و مقداری نیروی اختراع لازم است تا بروی معلوم شود که چون $4^x = (2^x)^2$ و $4^{-x} = (2^x)^{-2}$ بهتر است چنان فرض کند که

$$y = 2^x$$

که چون این فرض را وارد صورت مسئله کنیم چنین خواهیم داشت

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0$$

که ساده‌تر از معادلهٔ نخستین به نظر می‌رسد؛ ولی کار ما هنوز به پایان نرسیده است. هنوز به اختراع کوچک دیگری به صورت

$$z = y + \frac{1}{y}$$

نیازمند است که شرط را بدین شکل در می‌آورد:

$$8z^2 - 54z + 85 = 0.$$

و در اینجا آنالیز به پایان می‌رسد، به شرط آنکه حل کنندهٔ مسئله با حلّ معادلات درجهٔ دوم آشنایی داشته باشد.

سَنْتِز چیست؟ اجرا کردن گام به گام محاسباتی که امکان آنها به وسیلهٔ آنالیز

پیشبینی شده بود. حل کنندهٔ مسئله برای پایان دادن به کار حلّ مسئله به اندیشه‌ای تازه نیاز ندارد، تنها برای محاسبهٔ مجهولهای گوناگون باید حوصله و دقّت داشته باشد. ترتیب محاسبه برعکس ترتیب اختراع است، نخست z را به دست می‌آوریم ($z = 5/2,\ 17/4$)، سپس y را (۱/٤ و ٤ ، ۲و۱/۲=y)، و سرانجام مجهول اصلی x را (۲-و۲و۱-و۱=x). سنتز گامهای آنالیز را دوباره ترسیم می‌کند، و درحالت حاضر به آسانی می‌توان دید که چرا چنین می‌کند.

٤. **تجسم غیرریاضی.** یک انسان ابتدایی می‌خواهد از یک نهر عبور کند، ولی نمی‌تواند به طریقی که دیروز از آن می‌گذشت امروز بگذرد، بدان جهت که شب گذشته سطح آب در آن بالا آمده است. بنابر این عبور کردن موضوع یک مسئله می‌شود: «گذشتن از نهر» عبارت از x در مسئلهٔ اصلی است. ممکن است آن مرد به خاطر بیاورد که زمانی از نهر دیگری با گذشتن از روی تنهٔ درختی که بالای نهر قرار داده بودند گذشته بوده است. به اطراف نگاه می‌کند تا ببیند که آیا درخت افتاده‌ای می‌بیند یا نه که این خود مجهول تازهٔ yاو خواهد شد. درخت افتاده‌ای پیدا نمی‌کند، ولی درختهای فراوانی را درامتداد نهر سرپا ایستاده می‌بیند، خواستهٔ ا و آن است که یکی از این درختها افتاده باشد. آیا می‌تواند درختی را برروی نهر بیندازد؟ این اندیشه‌ای بزرگ است و مجهول سوم را تشکیل می‌دهد، به چه وسیله می‌تواند درخت را کج کند و برروی نهر قرار دهد؟

اگر بخواهیم اصطلاحات پاپوس را به کار بریم، این رشتهٔ اندیشه‌ها را باید آنالیز (تحلیل) بنامیم. اگر انسان ابتدایی بتواند کار آنالیز خود را به پایان برساند، مخترع پل و تبر خواهد شد. سنتز (ترکیب) چیست؟ ترجمه و تعبیر کردن اندیشه‌ها به صورت اعمال است. پایان کار سنتز عبور کردن بر یک درخت قرار گرفتهٔ برروی یک نهر است.

چیزهای واحدی آنالیز و سنتز را پر می‌کنند، در آنالیز عقل مرد را به کار می‌اندازند و در سنتز ماهیچه‌های او را. آنالیز در اندیشه‌ها است و سنتز در کارها و کردارها. تفاوت دیگری نیز هست، ترتیب معکوس می‌شود. گذشتن از نهر نخستین میلی است که با آن آنالیز آغاز می‌شود، و آخرین کاری است که با آن سنتز به پایان می‌رسد.

۵. در ترجمه به صورتی متمایزتر به ارتباط طبیعی میان آنالیز و سنتز اشاره شده است. این ارتباط پس از مثالی که آوردیم آشکار می‌شود. آنالیز طبیعتاً نخست می‌آید،

و سنتز پس از آن؛ آنالیز اختراع است و سنتز اجرا و عمل؛ **آنالیز طرحی را ترسیم می‌کند و سنتز به اجرای آن نقشه و طرح می‌پردازد.**

۶. در شرحْ ترجمهٔ بعضی از جمله‌های اصلی نگاه داشته شده و حتّیٰ مورد تأکید قرار گرفته است: «فرض می‌کنیم که آنچه خواسته شده به دست آمده است، آنچه فرض می‌کنیم پیشتر یافت شده، و آنچه باید درستی آن را به اثبات برسانیم درست است.» این صورتی محالنما دارد؛ آیا این خود فریفتن نیست که فرض کنیم مسئلهٔ حل کردنی حل شده است؟ این گفته تاریک است؛ چه معنی دارد؟ اگر از نزدیک به متن توجّه کنیم و حقیقتاً بخواهیم تجربهٔ خود را در حلّ مسائل بفهمیم، معنی جمله چندان مشکوک به نظر نمی‌رسد.

بهتر است نخست به یک «مسئلهٔ یافتنی» توجّه کنیم. مجهول را x و داده‌ها را a و b و c فرض می‌کنیم. «مسئله را حل شده فرض کردن» بدین معنی است که فرض کنیم شیئی همچون x وجود دارد که شرط را تحقّق می‌بخشد- یعنی آن روابط را با a و b و c دارد که درشرط پیش‌بینی شده است. این فرض موقتی است و آسیبی نمی‌رساند. چه اگر چنین چیزی وجود نداشته باشد، و آنالیز به جایی رهبری کند، ناگزیر ما را به یک مسئلهٔ نهایی خواهد رسانید که جوابی ندارد و بنابراین آشکار خواهد شد که مسئلهٔ نخستین مالا ینحلّ است و جوابی ندارد. بنابر این، فرض سودمند است. برای امتحان کردن شرط، باید روابط شرط شدهٔ میان x و a و b و c را بفهمیم و به صورتی به خود معرّفی کنیم و آنها را به شکل هندسی مجسّم سازیم؛ آیا بدون دریافتن و معرّفی کردن و مجسّم ساختن چگونه می‌توانیم به نتیجهٔ مورد نظر برسیم؟ بالاخره فرض کردن طبیعی است. انسان ابتدایی که از پندار و کردار او (در شمارهٔ ٤) سخن گفتیم، پیش از آن که واقعاً بتواند با عبور کردن از روی درخت قرار گرفتهٔ بر روی نهر از آن بگذرد، خود را در حال راه رفتن بر درخت تخیّل می‌کرد، و این کار همان فرض «حل‌شده» بودن مسئله است.

هدف یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» ثابت کردن قضیّه‌ای همچون A است. اندرز «فرض کن که A صحّت دارد» درست عبارت از دعوت کردن به استخراج نتیجه‌ای از قضیّهٔ A است، هر چند هنوز آن را ثابت نکرده‌ایم. کسانی که خصوصیّت اخلاقی یا فلسفهٔ ویژه‌ای برای خود دارند، ممکن است با شنیدن استخراج نتیجه از قضیّه‌ای به اثبات نرسیده روی درهم کشند، ولی چنین کسان

نمی‌توانند یک آنالیز را آغاز کنند.

به **اشکال**، ۲ مراجعه کنید.

۷. در ترجمهٔ مشتمل بر شرح دوبار جملهٔ مهم «به شرط آنکه همهٔ استنتاجهای ما انعکاسپذیر باشد» آمده است. این یک درونیابی است؛ متن اصلی چیزی را از این گونه ندارد و فقدان این شرط در زمانهای جدید مورد بحث و خرده‌گیری قرار گرفته است. برای «تحویل انعکاسپذیر» رجوع کنید به **مسئلهٔ کومکی**، ٦.

۸. «آنالیز مسئلهٔ ثابت کردنی» در ترجمه با کلماتی کاملاً متفاوت با آنچه در متن آمده بیان شده ولی در معنی تغییری به وجود نیامده است؛ آنالیز «مسئلهٔ یافتنی» در ترجمه به صورتی عینیتر از آنچه در اصل آمده بیان شده است. چنین می‌نماید که در متن اصلی هدف بیان کلّیتر روش ساختن **رشته‌ای از مسائل کومکی همسنگ** بوده است که از آن در **مسئلهٔ کومکی**، ۷ سخن گفته‌ایم.

۹. بعضی از کتابهای درسی مقدّماتی هندسه مشتمل بر ملاحظاتی دربارهٔ تحلیل (آنالیز) و ترکیب (سنتز) است و در آنها «فرض می‌شود که مسئله حل شده است». اندک شکّی در آن نیست که این سنّتِ تقریباً غیرقابل ریشه‌کن شدن به پاپوس بازمی‌گردد، ولی کمتر می‌توان یک کتاب درسی جاری را پیدا کرد که نویسندهٔ آن بتواند نشانی از آشنایی با پاپوس عرضه کند. این موضوع به اندازهٔ کافی مهمّ است که در کتابهای مقدّماتی به آن اشاره شود ولی به آسانی در معرض بدفهمی قرار گیرد. این که تنها به متنهای هندسه مربوط مانده، نشان می‌دهد که یک فقدان فهم دربارهٔ آن جریان داشته است؛ به تفسیر ۲ پیش از این رجوع کنید. اگر تفسیرهایی که پیشتر آوردیم بتواند به فهم بهتر این مادّه کومک کند عذر خواه گسترشی است که ما در اینجا برای بیان آن قائل شدیم.

برای مثال دیگری، از دیدگاهی متفاوت و نیز برای تفسیرهای دیگر، رجوع کنید به **کار کردن روبه عقب**.

نیز رجوع کنید به **برهان خلف و اثبات غیرمستقیم**،۲.

پاره‌های مختلف شرط را از یکدیگر جداکنید. نخستین وظیفهٔ ما فهمیدن مسئله است. پس از آن که مسئله را به صورت یک کل فهمیدیم، وارد جزئیّات آن می‌شویم. اجزای مختلف آن، یعنی مجهول و داده‌ها و شرط، هریک را جداگانه مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. هنگامی که همهٔ این اجزاء در

ذهن ما جایگزین شده ولی هنوز اندیشه‌ای مددکار برای حلّ مسئله به خاطرمان نرسیده است، به جزئیّات بیشترمی‌پردازیم. داده‌های متفاوت را هریک جداجدا در معرض رسیدگی و ملاحظه قرارمی‌دهیم. پس‌ازآنکه شرط رابه عنوان‌یک‌کل فهمیدیم، **اجزاءِ مختلف آن را از یکدیگر جدا می‌کنیم وهریک را جداگانه می‌آزماییم.**

اکنون به نقش پیشنهادی که باید این جا در بارهٔ آن بحث کنیم می‌نگریم. ما را به برداشتن گامی برمی‌انگیزد که باید در آن هنگام که برای دیدن مسئله به صورت مشخّص و متمایز تلاش می‌کنیم و می‌خواهیم به جزئیّات دقیق و دقیقتر وارد شویم، آن گام را برداریم. گامی که برای وارد شدن در مرحلهٔ **تجزیه و ترکیب مجدّد** است.

جدا کردن اجزاء گوناگون شرط. آیا می‌توانید این اجزاء را بر روی کاغذ بیاورید؟ هنگامی که به کار **تنظیم معادلات** می‌پردازیم، فرصتی برای طرح این سؤال فراهم می‌آید.

پیشرفت و دستاورد. آیا هیچ پیشرفتی کرده‌اید؟ دستاورد اساسی چه بوده است؟ ممکن است سؤالاتی از این گونه برای پرسیدن از خود طرح کنیم، و این در هنگامی‌است‌که خود مسئله‌ای را حل می‌کنیم، یا برای دانشجویی‌طرح می‌کنیم که برکار او نظارت داریم. بدین‌ترتیب، به آن عادت می‌کنیم که، کمابیش با اطمینان، در بارهٔ پیشرفت و دستاورد در حالتهای عینی داوری کنیم. گذشتن از مرحلهٔ حالتهای عینی به توصیف کلّی اصلاً آسان نیست. ولی اگر بخواهیم که تحقیق و مطالعهٔ ما در راهیابی تاحدّی کامل باشد، باید این گام را برداریم. و برای روشن‌ساختن آنچه به صورت کلّی تشکیل‌دهندهٔ پیشرفت و دستاورد در حلّ مسائل است کوشش کنیم.

۱. برای حلّ یک مسئله، باید شناختی از موضوع آن داشته باشیم، و چیزهایی از شناخت موجود ولی در حال خفتهٔ خود را که مربوط به آن مسئله می‌شود به خاطر بیاوریم. در پایان کار حلّ مسئله آنچه در تصوّر خود از مسئله داریم بسیار بیش از آن است که هنگام آغاز کردن به این کار داشتیم؛ چه چیز اضافه شده است؟ چه چیزها را موفّق شده‌ایم که از مخزن حافظهٔ خود بیرون بکشیم؟ برای به دست آوردن حلّ مسئله باید واقعیّتهای اساسی گوناگونی را به خاطر بیاوریم. لازم است مسائل حل‌شدهٔ پیشتر و قضایای شناخته و تعریفات را، در صورتی که مسئله مسئلهٔ ریاضی است، به یاد بیاوریم. استخراج این عناصر مربوط را از حافظه می‌توانیم تجهیز کردن یا بسیج بنامیم.

۲. ولی، برای حل‌کردن یک مسئله، تنها به خاطرآوردن واقعیّتهای جدامانده از یکدیگر کافی نیست، بلکه باید آنها را باهم ترکیب کنیم، و این ترکیب به شکلی صورت

بگیرد که قابل تطبیق بر مسئلهٔ حل‌کردنی باشد. مثلاً، در حلّ یک مسئلهٔ ریاضی باید برهانی اقامه کنیم که موادّ به خاطر آمده را به یک کلّ جرح و تعدیل شده بپیوندند. این تطابق دادن و ترکیب کردن فعّالیّت را می‌توانیم به نام **سازماندهی** بخوانیم.

۳. بسیج و سازماندهی در حقیقت هرگز از یکدیگر جدا نبوده‌اند. در ضمن کارکردن با حالت تمرکز، تنها واقعیّتهایی را به یاد می‌آوریم که کمابیش با هدف ما ارتباط داشته باشند و کاری جز ارتباط دادن و سازمان بخشیدن به آنچه به خاطر آورده و تجهیز کرده‌ایم نداریم.

بسیج و سازماندهی دو سیما از یک فرایند پیچیده‌اند که باز هم سیماهای دیگری دارد.

٤. سیمای دیگری از پیشرفت کار ما آن است که **طرز تصوّر و دریافت ما تغییر می‌کند.** تصوّر و دریافت ما نسبت به مسئله، که با همهٔ موادّی که به یادآورده و به آنها تطابق بخشیده و بر روی آنها کار کرده‌ایم غنیتر شده است، در پایان بسیار کاملتر از آن می‌شود که در آغاز بوده است.اگر بخواهیم که از تصوّر و دریافت نخستین خود نسبت به مسئله به نصوّر کاملتر و بهتر تطابق یافته برسیم، ایستگاههای مختلف را می‌آزماییم و مسئله را از جوانب متفاوت نگاه می‌کنیم. بدون **تغییر شکل مسئله** نمی‌توانیم به پیشرفتی نایل شویم.

۵. به تدریج که در خطّ سیر به طرف هدف نهایی پیشروی می‌کنیم، رفته رفته مقدار بیشتری از آن را می‌بینیم و متوجّه می‌شویم که به آن نزدیکتر شده‌ایم. در ضمن آنکه آزمایش مسئله پیش می‌رود، هر چه روشنتر **پیشبینی** می‌کنیم که چه کاری باید برای حلّ مسئله انجام دهیم و روش انجام دادن آن چگونه است. اگر خوشبخت باشیم، در اثنای حلّ یک مسئلهٔ ریاضی پیشبینی خواهیم کرد که قضیّهٔ شناخته‌ای می‌تواند به کار رود، و در نظر گرفتن مسئله‌ای که پیشتر حل شده ممکن است سودمند واقع شود، و بازگشتن وتحقیق کردن در بارهٔ معنی یک اصطلاح فنّی محتملاً امری ضروری است.این‌گونه چیزها را به صورت قطعی و یقینی پیشبینی نمی‌کنیم، بلکه با درجه‌ای موجه نمایی چنین می‌شود. هنگامی به یقین کامل می‌رسیم که تمام حلّ مسئله را به دست آورده باشیم، ولی پیش لز رسیدن به یقین غالباً باید به رسیدن به حدسی موجّه‌نما قناعت ورزیم. بدون ملاحظاتی که تنها موجّه نما وموقّتی هستند، هرگز نمی‌توانیم به راه حلّی که قطعی و یقینی است برسیم. به استدلال راهیابانه نیاز داریم. رجوع کنید به **راهیابی**.

۶. پیشرفت به طرف حلّ مسئله چیست؟ پیشرفت بسیج و سازماندهی به شناخت وتکامل طرز تصوّر و دریافت ما نسبت به مسئله، وافزایش پیشبینی گامهایی که با برداشتن آنها به برهان نهایی دسترسی پیدا می‌کنیم. ممکن است به صورتی پیوسته ولی با گامهایی نامشهود پیش برویم، ولی گاهی امکان آن هست که این پیشرفت به صورت جهش درآید. یک پیشرفت ناگهانی به طرف حلّ مسئله به نام **اندیشهٔ درخشان** خوانده می‌شود که اندیشه‌ای نیکو ومایهٔ شادمانی و یک موج مغزی است (که در زبان آلمانی اصطلاح فنّیتر (*Einfall*) برای آن وجود دارد). یک اندیشهٔ درخشان چیست؟ تغییری ناگهانی و مهم در طرز تصوّر و دریافت مسئله، و یک پیشبینی درست و مطمئنّ از گامهایی است که برای رسیدن به حلّ مسئله باید برداشته شود.

۷. از ملاحظات گذشته پرسشها و پیشنهادهایی از فهرست ما با داشتن گونهٔ درستی از زمینه نتیجه می‌شود.

هدف بعضی از این پرسشها و پیشنهادها مستقیماً بسیج کردن شناخت اکتسابی قبلی ما است: **آیا آن را پیشتر دیده‌اید؟ یا آیا همین مسئله را با اندکی تغییر شکل دیده‌اید؟ آیا از مسئله‌ای وابستهٔ به آن آگاهی دارید؟ آیا از قضیّه‌ای خبر دارید که بتواند سودمند واقع شود؟ به مجهول نگاه کنید، و بکوشید تا دربارهٔ مسئله‌ای بیندیشید که همین مجهول یا مجهولی مشابه آن داشته باشد.**

اوضاع نمونه‌ای وجود دارد که در آنها خیال می‌کنیم گونهٔ مواد و مصالح درست را فراهم آورده‌ایم و برای سازمان دادن بهتر به آنچه تجهیز و بسیج کرده‌ایم تلاش می‌کنیم: **در اینجا مسئله‌ای وابستهٔ به مسئله شما وجود دارد که پیشتر حل شده است. آیا آن را می‌توانید مورد استفاده قرار دهید؟ آیا می‌توانید روش آن را به کار برید؟ آیا لازم است عنصری معاون برای ممکن ساختن استفادهٔ از آن بیفزایید؟**

اوضاع نمونهٔ دیگری وجود دارد که در آنها چنین می‌اندیشیم که هنوز موادّ لازم را به اندازهٔ کافی فراهم نکرده‌ایم. از خود می‌پرسیم که چه چیزها کم است: **آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را به کار بردید؟ آیا همهٔ مفاهیم اصلی مندرج در مسئله را به‌حساب آورده‌اید؟**

هدف بعضی از پرسشها مستقیماً مربوط به تغییر مسئله است. **آیا می‌توانید مسئله را دوباره بیان کنید؟ آیا می‌توانید صورت مسئله را به شکل دیگر بیان کنید؟** هدف بعضی از پرسشها تغییر دادن به شکل مسئله به وسایل خاصّ است، همچون بازگشت به **تعریفها**،

کاربرد **تمثیل** و **تعمیم** و **تخصیص** و **تجزیه و ترکیب مجدّد.**

با بعضی از پرسشها انجام دادن آزمایشی برای پیشبینی ماهیّت راه‌حلّ مسئله‌ای تلقین می‌شود که می‌خواهیم آن را حل کنیم: **آیا ممکن است شرط را تأمین کند؟ آیا شرط برای تعیین مجهول کافی است؟ یا غیر کافی است؟ یا حشو و زیادی است؟ یا متناقض است؟**

در پرسشها و پیشنهادهای ما اشارهٔ مستقیمی به **اندیشهٔ درخشان** دیده نمی‌شود، ولی، در حقیقت، همه به آن ارتباط دارد که برای فهم مسئله‌ای که خود را برای حل کردن آن آماده می‌کنیم، نقشه ای طرح‌ریزی کنیم که ما را به حلّ مسئله برانگیزد، و چون این نقشه را به‌صورت کامل اجرا کنیم، و در ضمن عمل و پس از رسیدن به نتیجه به عقب نظر داشته باشیم، هرچه بیشتر و بهتر از آن بهره خواهیم گرفت.

تجزیه و ترکیب مجدد عبارت از عملیّات مغزی مهمّی است.

چیزی را در معرض آزمایش قرار می‌دهید که توجّه شما را جلب کرده یا کنجکاوی شما را به چالش برانگیخته است: خانه‌ای که می‌خواهید آن را اجاره کنید، صورت تلگرافی مهم ولی به شکل رمز، چیزی که هدف یا منشأ آن معمّایی به نظر می‌رسد، یا هرمسئله‌ای که آهنگ حل کردن آن را دارید. احساس و خیالی از موضوع به صورت یک کل دارید، ولی محتملاً این احساس و خیال به اندازهٔ کافی معیّن ومعلوم نیست. مشاهدهٔ یک امر جزئی سبب درخشیدن برقی در ذهن شما می‌شود و توجّه خود را بر روی آن متمرکز می‌سازید. سپس به جزئیِ دیگری توجّه می‌کنید، و پس از آن به یک جزئیِ دیگر. ترکیبات گوناگون جزئیّات با یکدیگر ممکن است خود را بر شما عرضه کنند و پس از اندک مدّتی شما بار دیگر موضوع را همچون یک کل در نظر می‌گیرید ولی آن را به صورت دیگری مشاهده می‌کنید. کل را به اجزاءِ آن تقسیم می‌کنید، و بار دیگر با ترکیب مجدّد اجزاء با یکدیگر کل را به صورتی کمابیش متفاوت با آنچه نخست مشاهده کرده بودید می‌بینید.

۱. اگر وارد جزئیّات شوید، ممکن است خود را در آنها گم کنید. جزئیّات فراوان یا جزئیّات بسیار کوچک بار سنگینی برای عقل و ذهن است. ممکن است مانع آن شود که به اندازهٔ کافی متوجّه نکته و نقطهٔ اصلی شوید یا اصلاً نکتهٔ اصلی را ببینید. مردی را پیش خود مجسّم سازید که به سبب زیادی درختان جنگل نمی‌تواند آن را ببیند.

البته خواهان آن نیستیم که وقت خود را با پرداختن به جزئیّات غیرلازم تلف کنیم و لازم است تلاش و کوشش خود را برای آنچه اصلی و اساسی است ذخیره کنیم.

دشواری در آن است که نمی‌توانیم از پیش بگوییم که پرداختن به کدام‌یک از جزئیّات سرانجام ضرورت دارد و کدام‌یک از آنها چنین نیست.

بنابراین لازم است پیش از هرکار مسئله را به عنوان یک کل خوب بفهمیم. پس از فهمیدن مسئله، برای داوری کردن در این باره که کدام جزئی اصلی و اساسی است و کدام‌یک چنین نیست، در وضع بهتری قرار خواهیم داشت. با امتحان کردن یک یا دونکتهٔ اصلی، برای قضاوت کردن در این خصوص که کدام جزئیهای دیگر شایستهٔ امتحان و آزمایش است، در وضع بهتری قرار خواهیم گرفت. واردشدن در جزئیّات و تجزیه کردن تدریجی مسئله خوب است، ولی این کار نباید بیش از آنچه به آن نیازمندیم صورت بگیرد.

البتّه استاد نمی‌تواند توقّع آن داشته باشد که همهٔ شاگردانش حکیمانه در این مرحله عمل کنند. برخلاف، بعضی از دانشجویان این عادت بد و ابلهانه را دارند که پیش از درست فهمیدن مسئله به عنوان یک کل وارد جزئیّات می‌شوند.

۲. اکنون به بحث در بارهٔ مسائل ریاضی یعنی «مسائل یافتنی» می‌پردازیم. پس‌از فهمیدن مسئله به صورت یک کل وهدف ونکتهٔ اصلی آن می‌خواهیم وارد جزئیّات شویم. آیا کار خود را از کجا باید آغاز کنیم؟ در اغلب موارد، عاقلانه آن است که با ملاحظه کردن قسمتهای اصلی مسئله که عبارت از مجهول وداده‌ها وشرط است کار را آغاز کنیم. تقریباً در همهٔ حالات مصلحت چنان است که آزمودن تفصیلی مسئله با این پرسشها شروع شود: **مجهول چیست؟ داده‌ها چیست؟ شرط چیست؟**

اگر بخواهیم به جزئیّات بیشتر بپردازیم چه باید بکنیم؟ در اکثر موارد بهتر آن است که هر داده را به تنهایی امتحان کنیم، وقسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا سازیم وهر قسمت را جداگانه مورد ملاحظه قرار دهیم.

ممکن است، مخصوصاً درآن حالت که مسئله دشوارتر است، آن را بیشتر تجزیه کنیم وجزئیّات دورتر آن را بیشتر مورد مطالعه وآزمایش قرار دهیم. بدین ترتیب شاید لازم شود که **به تعریف یک اصطلاح رجوع کنیم،** وعناصر جدیدی را که تعریف مستلزم آنها است وارد سازیم واین عناصر وارد شده را مورد بحث وآزمایش قرار دهیم.

۳. پس از تجزیه کردن مسئله، درآن می‌کوشیم تا عناصر آن را مجدّداً به روشی تازه با یکدیگر ترکیب کنیم. مخصوصاً ،باید درآن بکوشیم که عناصر مسئله را در

مسئله‌ای تازه وبیشتر قابل دسترسی با یکدیگر ترکیب کنیم که احتمالاً بتوانیم آن را به عنوان یک مسئله کومکی ومعاون مورد استفاده قرار دهیم.

دراین مرحله البتّه امکانات نامحدودی برای ترکیب مجدّد وجود دارد. مسائل دشوار مستلزم ترکیبات مخفی واستثنایی واصیل است، و هوشمندی حل کنندهٔ مسئله در اِبتکاری واصیل بودن ترکیب آشکار می‌شود. باوجود این، بعضی از گونه‌های معمولی ونسبتاً سادهٔ ترکیبات برای مسائل ساده‌تر وجود دارد که باید آنها را خوب بشناسیم و نخست آنها را مورد آزمایش قرار دهیم، حتّیٰ اگر در پایان کار به آن مجبور شویم که به وسایل غیر آشکار متوسّل شویم.

یک طبقه‌بندی رسمی وصوری وجود دارد که درآن معمولیترین و سودمندترین ترکیبات به وضوح جای گرفته‌اند. در ساختن یک مسئلهٔ تازه از مسئلهٔ طرح شده، می‌توانیم:

(۱) مجهول را نگاه داریم وباقی مسئله (داده‌ها وشرط) را تغییر دهیم، یا

(۲) داده‌ها را نگاه داریم وباقی مسئله (مجهول وشرط) را تغییر دهیم، یا

(۳) مجهول وداده‌ها هر دو را تغییر دهیم.

[حالات (۱) و(۲) بر روی هم می‌افتد. در واقع امکان آن هست که مجهول وداده‌ها یا هر دو را نگاه داریم وتغییر مسئله را تنها از راه تغییر شکل دادن به شرط عملی سازیم. مثلاً، دو مسئلهٔ زیر، با آنکه آشکارا همسنگ یکدیگرند، درست عین یکدیگر نیستند:

مثلّثی متساوی‌الاضلاع بسازید که یک ضلع آن در دست است.

مثلّثی متساوی الزوایا بسازید که یک ضلع آن در دست است.

تفاوت میان دو بیان که در مثال حاضر اندک است، ممکن است در حالات دیگر بسیار بزرگ باشد. چنین حالاتی می‌تواند از بعضی جهات حایز اهمّیت فراوان باشد، ولی بحث کردن دربارهٔ آنها با اختصاری که در نظر است سازگاری ندارد واز آن چشم می‌پوشیم. رجوع کنید به **مسئلهٔ کومکی**، قسمت پایانی۷.]

۴. **مجهول را نگاه داشتن** وداده‌ها وشرط را تغییر دادن برای آن که شکل مسئله عوض شود، غالباً سودمند است. پیشنهاد **به مجهول نگاه کنید** مربوط به مسائلی است که دارای مجهول واحد بوده باشند. باید بکوشیم تا مسئله‌ای از این گونه را که پیشتر حل کرده‌ایم به یادآوریم: **بکوشید تا دربارهٔ مسئله‌ای آشنا بیندیشید که مجهول مشابهی داشته است.** اگر نتوانیم چنین مسئله‌ای را به یاد آوریم، باید تلاش کنیم تا از پیش خود این

مسئله را اختراع کنیم: **آیا می‌توانید دربارهٔ داده‌های دیگری بیندیشید که برای یافتن مجهول سودمند واقع شوند؟**

مسئله تازه‌ای که ارتباطی نزدیکتر با مسئلهٔ حل کردنی داشته باشد، بهتر می‌تواند سودمند واقع شود. بنابراین، با نگاه داشتن مجهول در آن می کوشیم که بعضی از داده‌ها وقسمتی از شرط را نگاه داریم و، اگر ممکن باشد، تنها یکی یا دو تا از داده‌ها وقسمت کوچکیٔ از شرط را تغییر می‌دهیم. یک روش خوب عبارت از آن است که چیزی را حذف کنیم بدون آنکه چیزی بیفزاییم؛ مجهول را نگاه می‌داریم، **وهمچنین جزئی از شرط را نگاه می‌داریم وباقی آن را حذف می‌کنیم،** ولی هیچ قیدی یاداده‌ای نمی‌افزاییم. مثال وشرحی در این خصوص پس از این در شماره‌های ۷و۸ خواهد آمد.

۵. با نگاه داشتن داده‌ها، می‌توانیم در آن بکوشیم که مجهول تازه‌ای که سودمند وبیشتر در دسترس باشد اضافه کنیم. چنین مجهولی باید از داده‌های اصلی به دست آید، ودر آن هنگام که می‌پرسیم: **آیا می‌توانید از داده‌ها چیزی سودمند به دست آورید،** چنین مجهولی را در نظر داریم.

باید به خاطر بسپاریم که در این مورد دوچیز مطلوب است. نخست، مجهول تازه می‌بایستی بیشتر در دسترس قرار گرفته باشد، بدین معنی که آسانتر از مجهول اصلی بتواند از داده‌ها استخراج شود. دوم، مجهول تازه باید سودمند باشد، یعنی باید پس از آنکه یافت شد بتواند کومک معلومی به جستجوی مجهول اصلی کند. کوتاه سخن آنکه مجهول تازه باید گونه‌ای از سنگ پرش بوده باشد. سنگی که در وسط نهر قرار گرفته است، به من نزدیکتر از طرف دیگر نهر است که می‌خواهم به آن برسم، و چون پا بر این سنگ بگذارم به من در رسیدن به آن سوی نهر کومک خواهد کرد.

مجهول تازه باید هم در دسترس باشد و هم سودمند ولی، در عمل، غالباً باید به کمتر از این خود را قانع سازیم. اگر چیزی بهتر خود را عرضه نکند، استخراج کردن چیزی از داده‌ها که امید آن هست سودمند واقع شود، معقول و پسندیده است، و اگر کوشش برای دست یافتن به مجهولی که ارتباط نزدیک با مجهول اصلی داشته باشد، حتّیٰ اگر از آغاز هم در دسترس قرار گرفته به نظر نمی‌رسد، باز چنین کوششی مطابق مصلحت و معقول است.

مثلاً، اگر مسئلهٔ ما یافتن قطر یک متوازی‌السّطوح (همچون در بخش ۸) باشد،

می‌توانیم قطر یکی از وجوه را به عنوان مجهول تازه وارد مسئله کنیم. و این کار را یا بدان جهت می کنیم که **می‌دانیم اگر قطر یکی از وجوه را داشته باشیم می‌توانیم قطر متوازی‌السّطوح را نیز پیدا کنیم** (همچون در بخش ۱۰)، و یا بدان جهت که می‌دانیم یافتن قطر یکی از وجوه آسانتر است و چنان گمان می‌کنیم که احتمال دارد دریافتن قطر متوازی السّطوح سودمند واقع شود (رجوع کنید به **آیا از همهٔ داده‌ها استفاده کرده‌اید؟۱**)

اگر مسئلهٔ ما ساختن یک دایره باشد، باید دوچیز را به دست بیاوریم که یکی مرکز آن دایره است و دیگری شعاع آن، می‌توانیم بگوییم که مسئلهٔ ما دوقسمت دارد. در پاره‌ای موارد به دست آوردن یکی از دو قسمت آسانتر است و بنابراین، درهرحالت، یک لحظه باید دربارهٔ این گفته بیندیشیم که: **آیا می‌توانید یک قسمت مسئله را حل کنید؟** بااین پرسش امکانات را سبک سنگین می‌کنیم: آیا بهتر آن است که توجّه خود را برای یافتن مرکز متمرکز سازم یا برای به دست آوردن شعاع؟ این یک را انتخاب کنم یا آن یک را؟ طرح پرسشهایی از این‌گونه غالباً سودمند می‌افتد. در مسائل پیچیده‌تر یا پیشرفته‌تر، اندیشهٔ قطعی عبارت است از برگزیدن آن جزء از مسئله که هم بیشتر در دسترس است و هم جنبهٔ اساسی دارد.

۶۰ **با تغییر دادن مجهول و داده‌ها هردو،** بیش از آنچه پیشتر گفتیم از جریان اصلی حلّ مسئلهٔ خودمان دور می‌شویم، و طبیعتاً این را دوست نداریم؛ خطر گم کردن مسئلهٔ اصلی را احساس می کنیم. باوجود این، اگر تلاش برای دست یافتن به تغییرات کمتر ودست یافتن به چیزی در دسترس و سودمند به جایی نرسد، و اگر چون مسئلهٔ تازه بخت مساعدی برای کامیابی داشته باشد به آن وسوسه شویم که از مسئلهٔ اصلی بسیار دور شویم، ناچار این تغییر گسترده را باید بپذیریم. **آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها یا هردو را در صورت ضروری بودن، چنان تغییر دهید که مجهول تازه و داده‌های تازه به یکدیگر نزدیکتر باشند؟**

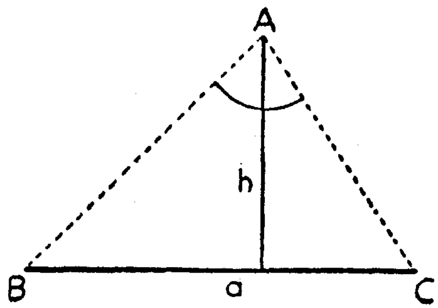
یک راه جالب توجّه برای تغییر دادن توأم مجهول و داده‌ها عبارت از مبادله کردن مجهول با یکی از داده‌ها است (رجوع کنید به **آیا می‌توانید ازنتیجه استفاده کنید؟۳**).

۷. **مثال.** مثلّثی را با دردست داشتن ضلع a و ارتفاع h وارد برآن و زاویهٔ α مقابل آن رسم کنید.

مجهول چیست؟ یک مثلث.

داده‌ها چیست؟ دو خط a و h و یک زاویهٔ α.

اکنون در صورتی که تا حدّی با مسائل ساختمانی هندسه آشنایی داشته باشیم، در آن می‌کوشیم که ساختن این مثلّث را به یافتن یک نقطه منجر سازیم. خطّ BC را برابر a رسم می‌کنیم پس همهٔ آنچه باید به دست بیاوریم نقطهٔ رأس A است که رو به روی a قرار گرفته است (شکل ۱۳). در واقع با مسئلهٔ دیگری رو به رو شده‌ایم.



شکل ۱۳

مجهول چیست؟ نقطهٔ A

داده‌ها چیست؟ خطّ h و زاویهٔ α و محلّ دو نقطهٔ B و C.

«شرط چیست؟» باید فاصلهٔ عمودی نقطهٔ A از خط BC برابر با h و زاویهٔ BAC برابر با α باشد.

با تغییر دادن مجهول و داده‌ها در حقیقت مسئلهٔ خود را تغییر شکل داده‌ایم. مجهول تازه یک نقطه است، در صورتی که مجهول اصلی یک مثلّث بود. بعضی از داده‌ها در هردو مثلّث یکی است: خط h و زاویهٔ α ؛ولی در مسئلهٔ پیشین به مایک طول a و یک زاویهٔ α داده بودند، و در مسئلهٔ تازه به جای آن دو محل قرار گرفتن نقاط B و C را به ما داده‌اند.

مسئلهٔ تازه دشوار نیست. توجّه به پیشنهاد زیر مارا به حلّ آن نزدیک می‌کند.

اجزاءِ مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید. شرط دو قسمت دارد، یکی مربوط به دادهٔ h و دیگری مربوط به دادهٔ α. نقطهٔ مجهول باید:

(I) تا خطّ BC فاصله‌ای برابر با h داشته باشد، و

(II) رأس زاویه‌ای به بزرگی α باشد که اضلاع آن از B و C بگذرد.

اگر تنها یک جزءِ ازاین شرط را در نظر بگیریم و دیگری را کنار بگذاریم نقطهٔ مجهول به صورت کامل تعیین نمی‌شود. نقطه‌های فراوانی می‌تواند شرط (I) را تحقّق بخشد،

یعنی همهٔ نقاط واقع بر روی خطّی که در فاصلهٔ h از BC به موازات آن رسم شده باشد.[1] این خط موازی مکان هندسی نقاطی است که جزءِ (I) از شرط را تأمین می‌کنند. مکان هندسی نقاطی که جزءِ (II) از شرط را تحقق می‌بخشند، قوسی از یک دایره است که B و C دوکنار آنند. چون دو مکان هندسی را ترسیم کنیم، محلّ تقاطع آنها رأس مثلّثی است که مطلوب ساختن آن بوده است.

روشی که به کار بردیم دارای سودمندی جالب توجّه خاصّی است: برای حل کردن یک مسئلهٔ هندسی ساختمانی می‌توانیم با موفّقیت از الگوی آن استفاده کنیم: مسئله را به ساختن یک نقطه تحویل می‌کنیم و آن نقطه را از تقاطع دو مکان هندسی با یکدیگر به دست می‌آوریم.

ولی گامی از این روش بازهم فایده‌ای عامتر دارد، برای حل کردن «مسائل یافتنی» از هرگونه می‌توانیم از الگوی آن بهره‌برداری کنیم: **تنها یک جزءِ از شرط را نگاه داریم و جزءِ دیگر آن را کنار بگذاریم.** با این کار، شرط مسئله طرح شده را سست می‌کنیم، و از محدودیّت مجهول می‌کاهیم. **پس از آن مجهول تا چه حدّ معیّن شده، و چگونه می‌تواند تغییر کند؟** با طرح این سؤال در حقیقت مسئلهٔ دیگری را مطرح می‌کنیم. اگر مجهول نقطه‌ای در سطح باشد (که در مثال ما چنین بوده) حلّ مسئلهٔ تازه عبارت است از تعیین مکان هندسی رسم شدهٔ به توسّط آن نقطه. اگر مجهول یک موضوع ریاضی از گونهٔ دیگر است (که در بخش ۱۸ یک مربّع بود) باید به صورت شایسته دسته‌ای از موضوعها را به خوبی توصیف کنیم و دقیقاً خصوصیّت آنها را به دست آوریم. حتّیٰ اگر مجهول یک شیئ ریاضی نباشد (همچون درمثال آینده که در زیر شمارهٔ ۸ خواهد آمد)، درنظر گرفتن و تعیین خصوصیّت کردن یا فهرست کردن آن اشیاء که قسمتی از شرط مقرّر شدهٔ برای مجهول به توسّط مسئله را تأمین می‌کنند، ممکن است سودمند واقع شود.

۸. مثال. دریک جدول کلمات متقاطع که در بیان تعریفهای آن کلمات ممکن است به صورت معمّایی بیان شوند و از صنایع بدیعی نیز در آن استفاده می‌شود، برای توضیح دادن یک کلمه چنین آمده است:

«یک اسبابِ جلو و عقب برای یک ماشین (۵ حرف).»

چه چیز مجهول است؟ یک کلمه.

۱ـ خطّی که بر B و C گذشته، سطح را به دو نیمه تقسیم کرده است. برای ساختن A یکی از این دو نیمه را مورد استفاده قرار داده و تنها یک خط به موازات BC ترسیم کرده‌ایم؛ می‌توانیم با درنظر گرفتن نیمهٔ دیگر سطح خطّ دیگری به موازات BC ترسیم کنیم.

شرط چیست؟ این که آن کلمه دارای پنج حرف است، و با قسمتی از نوعی ماشین ارتباط دارد. البتّه باید یک کلمهٔ انگلیسی [۱] باشد که امیدوارم کلمه‌ای بسیار غیرعادی نبوده باشد.

آیا شرط برای تعیین مجهول کافی است؟ نه. یا این که ممکن است شرط کافی باشد ولی آن قسمت از شرط که تاکنون معلوم است، قطعاً غیر کافی است. کلمات فراوانی وجود دارد که این قسمت از شرط را تأمین می کند، همچون lever یا screw و نظایر اینها.

شرط به صورتی مبهم بیان شده است ـ البتّه عملاً اگر چیزی نتوانیم بیابیم که به صورتی موجّه یک «اسباب جلو» از یک ماشین را توصیف کند و اسبابی از «قسمت عقب» نیز ممکن است بوده باشد، به این امکان گمان می‌بریم که شاید مقصود **خواندن** از جلو وعقب یک کلمه بوده است. یک اندیشهٔ خوب آزمودن این تفسیر برگه است.

قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید. شرط دو قسمت دارد که یکی مربوط به معنی کلمه است و دیگری به تلفظ‌کردن آن. مطلوب آن است که کلمهٔ مورد نظر چنین باشد:

(I) کلمهٔ کوتاهی به معنی جزءِ نامعیّنی از ماشین نامعیّن،

(II) کلمه‌ای با پنج حرف که چون معکوس خوانده شود بازهم به معنی جزئی از یک ماشین خواهد بود.

اگر تنها یک قسمت از شرط را نگاه داریم و قسمت دیگر راکنار بگذاریم، مجهول به صورت کامل تعیین نمی‌شود. کلمات چندی وجود دارد که قسمت (I) شرط را تأمین می کند، و از آنها یک «مکان غیرهندسی» به دست می آید. می‌توانیم این مکان (I) را «رسم کنیم»، و آن را «دنبال کنیم» تا به «مقطع» آن با «مکان» (II) برسیم. روش طبیعی عبارت است از تمرکز دادن اندیشه بر قسمت (I) مسئله، و هنگامی که توفیق آن را پیدا کردیم که چنین کلمه‌ای را پیدا کنیم، آزمودن آن از این لحاظ که آیا شمارهٔ حروف مقرّر شده را دارد و به صورت معکوس هم که خوانده شود معنایی متناسب با بیان مسئله دارد یا نه. شاید لازم باشد چند کلمه را به خاطر بیاوریم تا از میان آنها یکی بتواند هر دو قسمت شرط را تحقّق بخشد: screw, wheel, shaft, hinge, و lever . motor

و جواب البتّه rotor است !

۱ـ اصل کتاب انگلیسی بوده و ما نخواستیم در ترجمه آن را عوض کنیم که خود انگلیسی بودن کلمه هم حالتی معمّایی دارد و یک مسئله به شمار می‌رود.

۹. در شمارهٔ ۳، امکانات یافتن یک «مسئلهٔ یافتنی» را از طریق ترکیب مجدّد بعضی از عناصر «مسئله یافتنی» طرح شده طبقه‌بندی کردیم. اگر نه یک مسئله تازه، بلکه دو مسئله تازه یا بیشتر وارد کنیم، امکانات بیشتری وجود دارد که لازم است به آنها اشاره کنیم ولی نباید برای طبقه‌بندی آنها بکوشیم.

هنوز امکانات دیگری ممکن است پیدا شود. بالخاصّه، حلّ یک «مسئلهٔ یافتنی» ممکن است وابستهٔ به حلّ یک «مسئله ثابت کردنی» بوده باشد. ما تنها به این امکان مهم اشاره می‌کنیم؛ ملاحظهٔ نبودن جا برای بحث ما را از پرداختن به بحث دراین خصوص باز می‌دارد.

۱۰. در مورد «مسائل ثابت کردنی» تنها تنبیهات و ملاحظات کوتاهی می‌توان برآنچه گفته شد افزود. این ملاحظات به ملاحظات گسترده‌تری شباهت دارد که بیش از این (از ۲ تا ۹) در مورد «مسائل یافتنی» آوردیم.

پس از فهم چنین مسئله‌ای به صورت یک کل، عموماً لازم است قسمتهای مختلف آن را در معرض آزمایش و مطالعه قرار دهیم. قسمتهای اساسی عبارت است از فرض و نتیجهٔ قضیه‌ای که اثبات یا رد کردن آن از ما خواسته شده است. باید این قسمتها را به خوبی بفهمیم: **فرض چیست؟ نتیجه چیست؟** اگر لازم باشد که به نکات خاص نیز بپردازیم، می‌توانیم **قسمتهای مختلف فرض را از یکدیگر جدا کنیم** و هر قسمت را جداگانه مورد ملاحظه و تحقیق قرار دهیم. سپس می‌توانیم به قسمتهای دیگر بپردازیم و مسئله را بیشتر و بیشتر تجزیه کنیم.

پس از تجزیه کردن مسئله، باید بکوشیم تا عناصر آن را به شکلی تازه با یکدیگر ترکیب کنیم. مخصوصاً درآن می‌کوشیم تا از ترکیب عناصر قضیّه تازه‌ای استخراج کنیم. از این لحاظ سه امکان وجود دارد.

(۱) **این که نتیجه را نگاه داریم و فرض را تغییر دهیم.** نخست سعی می‌کنیم تا چنین قضیّه‌ای را به یاد آوریم: **به نتیجه نگاه کنید! و بکوشید تا دربارهٔ قضیّه‌ای آشنا بیندیشید که همین نتیجه یا نتیجه‌ای مشابه آن داشته باشد.** اگر توفیقی برای به یادآوردن این قضیّه بهرهٔ ما نشد، می‌کوشیم تا آن را اختراع کنیم: **آیا می‌توانید دربارهٔ فرض دیگری بیندیشید که از آن بتوانید این نتیجه را استخراج کنید؟** فرض را می‌توانیم با حذف کردن قسمتی از آن بدون افزودن چیزی برآن تغییر دهیم: **تنها یک جزءِ از فرض را نگاه دارید،** و باقی آن را حذف کنید؛ آیا نتیجه هنوز صحیح است؟

(۲) **فرض را نگاه می‌داریم و نتیجه را تغییر می‌دهیم: آیا می‌توانید چیز سودمندی از**

فرض استنتاج کنید؟

(۳) **فرض ونتیجه هردو را تغییر می‌دهیم.** اگر نتوانیم با تغییر دادن یکی از این دو به نتیجه برسیم، به آن تمایل پیدا می‌کنیم که هردو را تغییر دهیم. **آیا می‌توانید فرض یا نتیجه یا در صورت لزوم هر دو را چنان تغییر دهید که فرض تازه و نتیجهٔ تازه به یکدیگر نزدیکتر باشند؟**

دراین جا از تلاش‌برای طبقه‌بندی امکانات گوناگون که از وارد کردن دویا بیشتر «مسئله ثابت کردنی» در ضمن حل کردن یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» عرضه شده پیدا می‌شود، یا در نتیجهٔ پیوستن آن مسئله با یک «مسئله یافتنی» پیش می‌آید، سخنی نمی‌گوییم.

تخصیص گذشتن از ملاحظهٔ دسته‌ای از چیزها به دسته‌ای کوچکتر یا تنها به یک موضوع و شیء مندرج درآن دسته است. تخصیص غالباً در حلّ مسائل سودمند واقع می‌شود.

۱. مثال. اگر در یک مثلّث، r شعاع دایرهٔ محاطی و R شعاع دایرهٔ محیطی و H درازترین ارتفاع آن بوده باشد، آن گاه

$$r + R \leqq H$$

می‌خواهیم این قضیّه را ثابت (یا رد) کنیم؛ یک «مسئله ثابت کردنی» در برابر خود داریم.

مسئلهٔ طرح شده از گونه‌ای غیرعادی است. به ندرت می‌توانیم مسئله‌ای مربوط به مثلّثها با چنین نتیجه‌ای به خاطر بیاوریم. اگر اتّفاق دیگری برای ما نیفتد، می‌بایستی حالت خاصّی از همین حکم ناآشنا را مورد آزمایش قرار دهیم. شناخته‌ترین مثلّثها مثلّثی متساوی الاضلاع است که درآن

$$r = \frac{H}{3} \qquad R = \frac{2H}{3}$$

و این حکم صادق است.

اگر هیچ فکر دیگری به خاطر ما نرسد، می‌توانیم حالت خاصّ گسترده‌تر مثلّثهای متساوی‌السّاقین را در نظر بگیریم. شکل چنین مثلّثی با زاویهٔ رأس آن تغییر می‌کند و برای آن دوحالت حدّی (یا محدود کننده) وجود دارد، که دریکی از آنها زاویهٔ رأس

برابر با ۰° است، و در دیگری برابر با ۱۸۰°. در حالت نخستین قاعدهٔ مثلّث متساوی‌السّاقین محو می‌شود و آشکارا چنین خواهیم داشت:

$$r = 0 \qquad R = \frac{1}{2} H$$

که بنابر آن حکم موردنظر به اثبات می رسد. ولی درحالت دوم محدودکننده، هرسه ارتفاع محو می‌شود و چنین خواهیم داشت:

$$r = 0 \qquad R = \infty \qquad H = 0$$

که درآن حکم به اثبات نرسیده است. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که قضیّه طرح شده نادرست است و، بنابراین مسئله را حل کرده‌ایم.

ضمناً، واضح است که حکم همچنین برای مثلّثهای متساوی‌السّاقین بسیار پهن که زاویه‌های رأس آنها بسیار نزدیک به ۱۸۰ است نیز نادرست است و بنابراین می‌توانیم رسماً از توجّه به حالتهای حدّی‌که‌ممکن است استناد به آنها نادرست به نظر برسدخودداری کنیم.

۲. «استثنا قاعده را تأیید می کند.» «استثنا قاعده را به اثبات می‌رساند.» بایداین گفتهٔ بسیار معروف را همچون یک شوخی در نظر بگیریم، و به سستی و اهمالِ گونه‌ای از منطق بخندیم. اگر امور را جدّی بگیریم البتّه یک استثنا برای باطل کردن بدون تردید هرقاعده یا حکم کلّی کفایت می کند. معمولیترین و از بعضی جهات بهترین روش برای رد کردن چنین حکمی درست عبارت از عرضه کردن چیزی است که پذیرای آن حکم نباشد؛ چنین چیزی را بعضی از نویسندگان به نام **مثالِ ضد** خوانده‌اند.

حکم ادّعایی کلّی مربوط به دسته‌ای از چیزها است؛ برای رد کردن آن حکم به تخصیص می‌پردازیم، یعنی از آن دسته یک چیز را انتخاب می کنیم که با آن حکم نمی‌خواند. در مثال پیشین (در شمارهٔ ۱) کیفیّت این عمل را نشان دادیم. باید در ابتدا هر حالت سادهٔ خاص را مورد آزمایش قرار دهیم، یعنی هرچیز که کمابیش به صورت اتّفاقی انتخاب شود و بتوانیم آن را به آسانی امتحان کنیم. اگر این امتحان نشان دهد که آن حالت با حکم کلّی بیان شده سازگار نیست، آن حکم باطل می‌شود و کار ما به پایان می‌رسد. ولی اگر آن چیز امتحان شده با حکم توافق داشته باشد، امکان آن هست که از امتحان آن چیز نکته و اشاره‌ای استخراج کنیم. ممکن است این اندیشه برای ما پیدا شود که حکم باید درست باشد، و راهی به ذهن ماتلقین شود که از آن راه بتوانیم

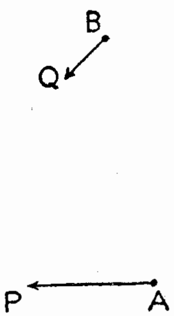
به اثبات حکم دست پیدا کنیم. یا این که ممکن است، همچون در مثال مندرج در شمارهٔ ۱، امتحان راهی را به ما تلقین کند که درجهت آن بـه جستجـوی مـثال ضد بــرخیزیم، یعنی حالتهای دیگری که برایِ اثبات یا ردّ حکم باید به آنها تـوجّه کـنیم. مــی‌تــوانیم حالتی را که امتحان کرده‌ایم تغییر دهیم و به جستجوی حـالت گـستردهٔ خــاصّ دیـگر بپردازیم و در صدد یافتن حالتهای حدّی که نمونهٔ آن در شمارهٔ ۱ آمده است براییم.

حالتهای حدّی به صورتی خاصّ آموزنده است. اگر یک حکم کلّی چنان فرض شده است که همهٔ پستانداران را شامل می‌شود، لازم است بـرپستانداران غـیرعادی هـمچون وال نیز صدق کند. چون مثال وال را امتحان کنیم، امکان آن هست که حکم را رد کنیم؛ احتمال فراوانی برای این ابطال وجود دارد، بدان جهت که حالتهای حدّی در معرض آن است که مورد غفلت اختراع کنندگان تعمیمها قرار گرفته باشد. ولی اگر بـه ایـن نتیـجه رسیدیم که حکم کلّی حتّیٰ درحالت حدّی نیز صحیح است، دلیل استقـرائی کـه از ایـن آزمایش و تحقیق به دست می‌آید از آن جهت مستحکم می‌شود که چشم انداز رد کـردن آن مستحکم بوده است. بدین گونه دچار این وسوسه می‌شویم که جمله‌ای را کـه شمـارهٔ ۲ با آن آغاز شده بود بدین شکل اصلاح کنیم: «استثناهای مـوردانتظار آزمـون صحّـت قاعده است.»

۳. مثال. سرعتهای دوکشتی و محلهای قرار گـرفتن آنهـا در لـحظه‌ای مـعیّن دردست است، هرکشتی در امتداد خطّ مستقیم با سرعت ثابت حرکت می کـند. فـاصلهٔ دوکشتی را درآن هنگام که نزدیکترین فاصله را با یکدیگر دارند به دست آورید.

مجهول چیست؟ کوتاهترین فـاصلهٔ مـیان دوجسم مـتحرّک. آن دو جسم را بـاید همچون دو نقطهٔ مادّی درنظر بگیریم.

داده‌ها چیست؟ وضع ابتدایی نقاط مادّی درحال حرکت و سرعت هر یک از آنها. این سرعتها مقدار و جهت ثابت دارند.



شکل ۱٤

شرط چیست؟ فاصله را باید برای کوتاهترین مقدار آن به دست آورد، یعنی در آن لحظه که دو نقطهٔ متحرّک (کشتیها) ازهر وقت دیگر به هم نزدیکتر شده‌اند.

شکلی رسم کنید. علامتهای مناسب را به کار برید. در شکل ۱٤ نقاط A و B نمایندهٔ اوضاع نخستین دو کشتی است. قطعه خطهای جهتدار (بردارها) AP و BQ سرعتهای دو کشتی را نشان می‌دهد. و چنان است که کشتی نخستین در امتداد خطّ گذران بر A و P پیش می‌رود و فاصلهٔ AP را در واحد زمانی طی می‌کند، و کشتی دوم نیز به همین گونه در امتداد خطّ BQ در حرکت است.

چه چیز مجهول است؟ کوتاهترین فاصلهٔ دو کشتی که یکی در امتداد AP در حرکت است و دیگری در امتداد BQ.

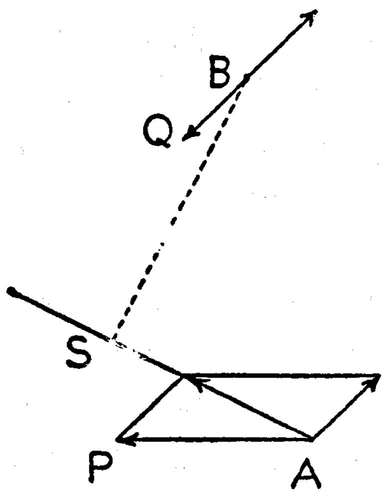
اکنون معلوم است که چه چیز را باید پیدا کنیم؛ ولی، اگر بخواهیم تنها وسایل ابتدایی را به کار بریم، هنوز در تاریکی هستیم و نمی‌دانیم چگونه باید آن را به دست آوریم. مسئله چندان آسان نیست و دشواری آن رنگ خاصّی دارد که می‌کوشیم آن را با گفتن این جمله بیان کنیم که «در اینجا تنوّع فراوان وجود دارد». اوضاع ابتدایی A و B و سرعتهای AP و BQ می‌توانند به راههای گوناگون داده شده باشند؛ در واقع، چهار نقطه A و B و P و Q باید اتّفاقی انتخاب شوند. داده‌ها هرچه باشد، راه‌حل باید بتواند به کار رود و هنوز نمی‌دانیم چگونه راه‌حلّ واحدی را برای متناسب بودن با همهٔ این امکانات به دست آوریم. ازاحساس تنوّع فراوان ممکن است سرانجام این پرسشها و پاسخها برای ما پیدا شود.

آیا می‌توانید مسئلهٔ وابسته‌ای را تخیّل کنید که بیشتر در دسترس باشد؟ یک مسئله خاصتر؟ البتّه، حالتهای حدّی خاصّی وجود دارد که در آنها یکی از دو سرعت از میان می‌رود. آری، کشتی در B ممکن است لنگر انداخته باشد و Q ممکن است با B یکی شود. کوتاهترین فاصله از یک کشتی ساکن به یک کشتی متحرّک عبارت از طول خطّی است که از کشتی ساکن بر خطّ مستقیم امتداد حرکت کشتی دیگر عمود شده باشد.

٤۰ اگر فکری که پیدا شد با این احساس قبلی همراه باشد که هنوز کارهایی در پیش است، و این که حالت حدّی خاص (که ممکن است بیش از آن ساده باشد که مناسب جلوه‌گر شود) باید نقشی ایفا کند- در آن صورت- این فکر البتّه یک **اندیشهٔ درخشان** به شمار می‌رود.

در اینجا مسئله‌ای وابسته به مسئلهٔ شما وجود دارد، یعنی مسئله تخصیص یافته‌ای که هم‌اکنون آن را حل کردید. آیا می‌توانید آن را به کار برید؟ آیا می‌توانید

نتیجهٔ آن را به کار گیرید؟آیا لازم است یک عنصر کومکی وارد کار کنید تا بتوانید بهره‌مند شدن از آن نتیجه را ممکن سازید؟ می‌تواند به‌کار برده شود، ولی چگونه؟ چگونه می‌توانیم نتیجه‌ای را که از فرض ساکن بودن B به دست آوردیم درحالتی به کار بریم که B متحرّک است؟ سکون حالت **خاصّی** از حرکت است. و حرکت نسبی است-و، بنابرآن، سرعت داده شدهٔ B هرچه باشد، می‌توانیم B را ساکن فرض کنیم! اندیشهٔ روشنتر چنین است: اگر به دستگاه و مجموعهٔ مشتمل بردو کشتی حرکت یکنواخت واحد بدهیم، اوضاع نسبی آنها بایکدیگر تغییر نمی‌کند، و فاصله‌های نسبی همان که بود باقی می‌ماند، و نیز مخصوصاً کوتاهترین فاصلهٔ نسبی دو کشتی که درمسئله خواسته شده چنین خواهد بود. اکنون می‌توانیم حرکتی ایجاد کنیم که از سرعت یک کشتی بکاهد و آن را به صفر برساند و مسئله کلّی را به حالت خاصّی



شکل ۱۵

بازگرداند که هم‌اکنون آن را حل کردیم. فرض کنید سرعتی برابر باسرعت BQ ولی درجهت مخالف آن، هم بر BQ و هم بر AP افزوده باشیم. این همان عنصر معاون است که کاربرد نتیجهٔ خاص را امکانپذیر می‌سازد.

برای ساختن کوتاهترین فاصله به شکل ۱۵ نگاه کنید.

۵. راه‌حلّ گذشته (در ۳ و ٤) مشتمل بریک الگوی منطقی است که باید آن را تحلیل کنیم و به خاطر بسپاریم.

برای آنکه مسئلهٔ اصلی را حل کنیم (درسطرهای آغاز ۳) نخست مسئله‌ای دیگر را حل کردیم که به شایستگی می‌توانیم آن را مسئلهٔ کومکی (درسطرهای پایان ۳) بنامیم. مسئلهٔ کومکی حالت خاصّی از مسئلهٔ اصلی است (حالت حدّی خاص که درآن یکی از دو کشتی ساکن است). مسئلهٔ اصلی پیشنهاد شده بود، و مسئلهٔ کومکی درجریان حلّ مسئلهٔ اصلی اختراع شد. مسئلهٔ کومکی حالتی خاص و درواقع **کوتاهپروازتر** از مسئلهٔ اصلی بود. سپس چگونه است که می‌توانیم مسئلهٔ اصلی را برپایهٔ مسئلهٔ کومکی حل کنیم؟ بدان سبب است که درتحویل کردن مسئلهٔ اصلی به مسئلهٔ کومکی یک ملاحظهٔ اساسی مکمّل (دربارهٔ نسبی بودن حرکت) علاوه کردیم.

کامیابی ما درحلّ مسئلهٔ اصلی از برکت دو ملاحظه و توجّه بود. نخست یک مسئله کومکی دارای مزیّت اختراع کردیم. دوم، برای عبور از مسئلهٔ کومکی به مسئلهٔ اصلی اکتشاف یک ملاحظهٔ مکمّل یار ما شد. مسئلهٔ طرح شده را بابرداشتن دوگام حل کردیم، به همان گونه که اگر برای عبور از نهربخت یار ما باشد و سنگ پرشی درمیان نهر پیدا کنیم، عبور ما از روی نهر نیز بادوگام صورت می‌گیرد.

خلاصه آنکه مسئلهٔ کومکیِ خاصِ بادشواری کمتر و کوتاهپروازتر را به عنوان سنگ پرش درحلّ مسئلهٔ دشوارتر و بلندپروازتر و کلّیتر اصلی مورد بهره برداری قرار دادیم.

٦. تخصیص کاربردهای دیگری نیز دارد که در این جا نمی‌توانیم از آنها بحث کنیم. تنها به آن اشاره می‌کنیم که می‌تواند در آزمایش حلّ مسئله سودمند واقع شود

(آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟)

گونه‌ای از تخصیص که تاحدّی ابتدایی است، غالباً برای معلّم سودمند واقع می‌شود. وآن مجسّم وعینی ساختن عناصر مجرّد ریاضی مسئله است ، مثلاً، اگر متوازی‌السّطوح قائمی در مسئله باشد، معلّم می‌تواند کلاس درس را برای تجسّم بخشیدن به‌آن به شاگردان نشان دهد (بخش ۸). در هندسهٔ تحلیلی فضایی، یک گوشهٔ کلاس می‌تواند به عنوان مبدأ مختصّات در نظر گرفته شود: کف اطاق ودر ودیوار مجاور آن سطوح مختصّات، ودویال افقی ویک یال قائم محورهای مختصّات. در ضمن بیان مفهوم سطح دوّار، معلّم می‌تواند یک منحنی بر روی در اطاق ترسیم کند وآن در را به آهستگی باز کند. اینها یقیناً تدبیرهایی ساده است ونباید برای آشنا کردن شاگردان با ریاضیّات از پرداختن به چنین تدبیرها امساک وخودداری شود. ریاضی که علمی بسیار

مجرّد است باید به صورتی بسیار تجسّم یافته وعینی معرّفی وعرضه شود.

تشخیص در اینجا همچون یک اصطلاح فنّی تربیتی به کار رفته که معنی آن «تعیین خصلت وخصوصیّت کار دانشجو» است. گواهی‌نامه های پایانی دوره‌های تحصیلی به صورتی خام نشانه‌ای برای همین تشخیص است. معلّمی که می‌خواهد کار شاگرد را بهتر کند، همچون پزشکی که می‌خواهد وضع بهداشتی بیمار خود را بهبود بخشد، به تشخیص دقیقتر ونزدیکی از خوب وبد کار او نیازمند است.

در مورد بحث خودمان مخصوصاً بامهارت وکارایی شاگرد در حلّ مسائل سروکار داریم. چگونه می‌توانیم آن را مشخّص کنیم؟ شاید بتوانیم از تمایز میان چهار مرحلهٔ حلّ مسئله استفاده کنیم. در واقع رفتار دانشجو در مراحل مختلف کاملاً مشخّص کنندهٔ کاردانی او است.

در فهم کامل مسئله، به سبب فقدان تمرکز، شاید گسترده‌ترین نقص در حلّ مسائل پیدا شود. از لحاظ **طرح نقشه** وبه دست آوردن یک اندیشهٔ کلّی نسبت به حلّ مسئله، دوخطای متقابل فراوان دیده می‌شود. بعضی از شاگردان بدون داشتن نقشه یا اندیشهٔ کلّی به حلّ مسئله حمله‌ور می‌شوند؛ بعضی دیگر، به سبب خامدستی ونادانی، منتظر آمدن اندیشه‌ای نیکو می‌مانند وهیچ کاری را که بتواند آمدن آن اندیشه را تسریع کند انجام نمی‌دهند. در **اجرای نقشه**، خطای فراوانتر بیمبالاتی وناشکیبایی در آزمودن هرگام است. **ناتوانی در وارسی کردن نتیجه** روی هم رفته بسیار زیاد است؛ دانشجو به آن شاداست که‌جوابی‌به‌دست‌آورده،وبه‌همین‌جهت‌قلم‌رافرومی‌گذاردوازاین که‌نتایج دور از احتمالی به دست آورده است هیچ ناراحت نمی‌شود.

معلّمی که خطایی از این گونه راتشخیص دهد، با اصرار ورزیدن در بارهٔ بعضی از پرسشهای فهرست، فرصتی برای درمان آن پیدا خواهد کرد.

تصمیم، امید، کامیابی.این یک اشتباه است که حل کردن مسئله را «کارعقلی» محض بدانیم؛ تصمیم غیرصمیمانه وخرسندی سست به انجام دادن کاری اندک، ممکن است برای مسائل سردستی کلاس درس خوب باشد. ولی برای حل کردن یک مسئلهٔ علمی جدّی قدرت اراده‌ای لازم است که شخص با آن بتواند سالهای دراز رنج کوشش برای حلّ آن مسئله ونومیدیهای حاصل از ناکامی راتحمّل کند.

۱. تصمیم با امید و نومیدی، وبا رضایت خاطر و سرخوردگی نوسان پیدامی‌کند. اگر امید آن داشته باشیم که حلّ مسئله درست در گوشه‌ای نهفته است، رفتن در راه حلّ مسئلهٔ آسان می‌شود، ولی در آن هنگام که هیچ راهی برای بیرون آمدن از دشواری به نظر نمی‌رسد، ثبات قدم ورزیدن کاری بسیار دشوار است. هنگامی که پیشبینی ما درست درمی‌آید، هیجان زده ومسرور می‌شویم. و آن گاه که راه در پیش گرفتهٔ بامقداری اعتماد ناگهان به بنبست می‌رسد وتصمیم ما متزلزل می‌شود، افسرده ودلسرد خواهیم شد.

«برای پرداختن به کارامیدوار بودن، و برای کامیابی پافشاری کردن هیچ نیازمند به امید نیست.» چنین سخنی می‌تواند برخاستهٔ ازیک اراده یا شرافت یا انجام وظیفه یا اقدام برای دفاع از حق بوده باشد. ولی از این گونه مصمّم بودن کاری برای شخص دانشمند برنمی‌آید که باید امیدی برای آغاز کردن وموفّقیّتی برای پیش‌رفتن و ادامه به تحقیق داشته باشد.درکارعلمی لازم است که تصمیم به صورتی حکیمانه به پیشبینی وچشمداشت تقسیم شود. نباید تامسئله‌ای سودی نداشته باشد به کارکردن دربارهٔ آن بپردازید؛ هنگامی به کارجدّی بر می‌خیزید که مسئلهٔ شما آموزنده به نظر برسد؛ اگر وعده‌ای که مسئله می‌دهد بزرگ باشد، تمام شخصیّت خود را در راه حلّ آن بسیج می‌کنید. اگر هدف شما تعیین شده است سخت به آن می‌چسبید، ولی بیجهت آن را برای خود دشوار نمی‌سازید. به کامیابیهای کوچک با چشم بی اعتنا نگاه نمی‌کنید بلکه، برخلاف، چشم به راه یافتن آنها هستید: **اگر نمی‌توانید مسئله راحل کنید، نخست در آن بکوشید که مسئله‌ای وابستهٔ به آن راحل کنید.**

۲. هنگامی که یک دانشجو مرتکب اشتباهی احمقانه می‌شود، یا به صورتی خشم انگیز کند کار می‌کند، همیشه عیب دریک چیز است؛ او اصلاً میل ندارد که مسئله راحل کند یاآن راچنان که شایسته است بفهمد وبه همین جهت نتوانسته است آن رابفهمد. بنابراین، استادی که واقعاً می‌خواهد به شاگرد خود کومک کند، پیش ازهر کار باید حسّ کنجکاوی او را برانگیزد، و میل و آرزویی برای حل‌کردن مسئله در او به وجود آورد. همچنین معلّم باید گاه به شاگرد اجازه دهد که خودش تصمیم بگیرد و به انجام وظیفهٔ خود بپردازد.

تعلیم‌دادن حلّ مسئله‌گونه‌ای از تربیت خواست و اراده است. دانشجو با حل‌کردن مسائلی که چندان برای او آسان نیست، این مطلب را می‌آموزد که در ناکامی ثبات‌قدم

داشته باشد، و قدر پیشرفتهای کوچک را بداند، و منتظر دست‌یافتن به اندیشهٔ اساسی باشد، و هنگامی که این اندیشه ظاهر می‌شود، با همهٔ توانایی تمام توجّه خود را به آن معطوف دارد. اگر شاگردی در آموزشگاه فرصت آشناشدن با هیجانات گوناگون حاصل از تلاش برای حلّ مسائل پیدا نکند، تربیت ریاضی او در حیاتیترین نقطه دچار شکست شده است.

تعریف یک اصطلاح عبارت از بیان‌کردن معنی آن با الفاظ و اصطلاحات دیگری است که بنا به فرض آنها را خوب می‌شناسیم.

۱. **اصطلاحات فنّی** در ریاضیّات بر دو گونه است: بعضی همچون اصطلاحات ابتدایی پذیرفته شده و آنها را تعریف نکرده‌اند. بعضی دیگر همچون اصطلاحات مشتق‌شده درنظر گرفته می‌شوند و آنها را با الفاظ دیگر تعریف می‌کنند، بدین‌معنی که معانی آنها از طریق اصطلاحات ابتدایی و اصطلاحات مشتق‌شدهٔ دیگری که پیشتر تعریف شده‌اند، به دست می‌آید. به همین‌جهت است که تعریف صوری و رسمی برای مفاهیم ابتدایی نقطه و خطّ راست و سطح وجود ندارد [1]. ولی مفاهیمی همچون «نیمساز زاویه» یا «دایره» یا «سهمی» را تعریف می‌کنیم.

آخرین اصطلاح ذکرشده را می‌توانیم بدین‌صورت تعریف کنیم:

سهمی مکان هندسی نقاطی است که فواصل آنها از یک نقطهٔ ثابت و یک خطّ راست ثابت با یکدیگر برابر است. نقطهٔ ثابت **کانون سهمی** نام دارد و خطّ ثابت **هادی**. نیز این مطلب معلوم است که همهٔ عناصر در یک سطح جای دارند و نقطهٔ ثابت (کانون) بر روی خطّ ثابت (هادی) قرار نگرفته است.

فرض آن است که خواننده معنی اصطلاحات تعریف شده را نمی‌داند: سهمی، کانون سهمی، هادی سهمی، ولی چنان فرض می‌شود که از معنی همهٔ اصطلاحات دیگر همچون نقطه و خطّ راست و سطح و فاصلهٔ یک نقطه از نقطهٔ دیگر و نقطهٔ ثابت و مکان هندسی و جز آن آگاه است.

۲. **تعریفهای واژه نامه‌ها** از لحاظ شکل خارجی با تعریفهای ریاضی تفاوت فراوان

۱ـ از این لحاظ افکار نسبت به زمان اوقلیدس و پیروان یونانی وی که نقطه و خطّ راست و سطح را تعریف می‌کردند، تغییر کرده است. ولی «تعریفهای» ایشان به ندرت شکل تعریفهای صوری دارد و بیشتر گونه‌ای از تجسّم شهودی است. البتّه این تجسّمها مُجاز است و حتّیٰ در تعلیم و تربیت بسیار مطلوب است.

ندارند، ولی با روحیّهٔ دیگری نوشته شده‌اند.

نویسندهٔ کتاب لغت با معنی عرفی و جاری کلمات سر و کار دارد. وی معنی جاری را می‌پذیرد و آن را با هر اندازه وضوح که بتواند به صورت تعریف در واژه‌نامهٔ خود می‌آورد.

ریاضیدان بامعنی عرفی اصطلاحات فنّی خود کاری ندارد یا لااقل ارتباطی که جنبهٔ اوّلیّت داشته باشد ندارد. این که «دایره» و «سهمی» یا اصطلاحات فنّی دیگر از این گونه در گفتگوی متعارفی چه معانی دارد چندان مورد توجّه او نیست. تعریف ریاضی معنی ریاضی را می‌آفریند.

۳.مثال. نقطهٔ تقاطع خطّ راستِ داده شده را با یک سهمی که نقطهٔ کانون و خطّ هادی آن داده شده، پیدا کنید.

برداشت ما ازهر مسئله وابستهٔ به حالت شناخت و دانش ما است. برداشت ما نسبت به مسئلهٔ فعلی به دامنهٔ آشنایی ما با خواصّ سهمی مربوط می‌شود.اگر دربارهٔ سهمی چیزهای فراوان بدانیم، در آن می‌کوشیم که از این دانش خود بهره‌گیری کنیم و چیزی سودمند به حلّ مسئله از آن بیرون آوریم: **آیا از قضیّه‌ای آگاهی دارید که کومکی از آن براید؟ از مسئله‌ای وابسته خبر دارید؟** اگر از سهمی و کانون وهادی چندان چیزی ندانیم، این اصطلاحات بیشتر مایهٔ پریشانخاطری ما می‌شود و طبیعتاً خواهان آن هستیم که هر چه زودتر از شرّ آنها خلاص شویم. چگونه می‌توانیم از آنها رهایی حاصل کنیم؟ به گفتگوی استاد و شاگردی گوش کنید که در خصوص مسئلهٔ طرح شده با هم سخن می‌گویند. آنان پیشتر **علامات مناسبی** اختیار کرده‌اند: Pبرای هر نقطهٔ مجهول تقاطع، F برای کانون، d برای هادی، c برای خطّ راستی که سهمی را قطع می‌کند.

«چه چیز مجهول است؟»

«نقطهٔ P»

«داده‌ها چیست؟»

«خطهای راست c و d و نقطهٔ F».

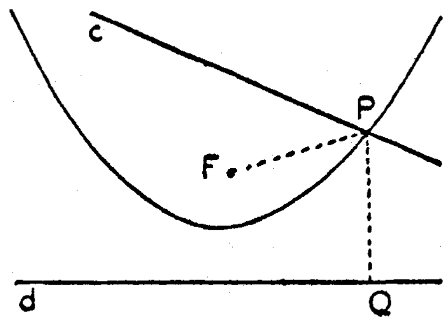
« شرط چیست؟ »

«Pنقطهٔ تقاطع خط راست c با سهمی موردنظر است که هادی آن d و کانون آن F است.»

«درست. به تصوّر من شما آن اندازه فرصت پیدا نکرده‌اید که سهمی را به درس بخوانید ولی، به گمانم، می‌توانید بگویید که سهمی چیست.»

«سهمی مکان هندسی نقاطی است که از کانون و هادی فاصله‌های برابر دارند.»
صحیح است. شما تعریف را خوب به یاد آوردید. این درست است، ولی باید آن را نیز به کار ببریم، به تعریف بازگردید. از روی تعریف سهمی در بارهٔ P چه می‌توانید بگویید؟

« P بر روی سهمی واقع است. بنابراین از F و d به یک فاصله قرار گرفته است.»
«خوب! شکلی رسم کنید.»



شکل ۱۶

«دانشجو خطهای PF و PQ را وارد شکل می‌کند که این آخری از نقطهٔ P بر خطّ d عمود شده است.»
«آیا اکنون می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟ »

.... ..

«آیا می‌توانید شرط مسئله را، با استفاده از خطهایی که خود وارد شکل کرده‌اید، دوباره بیان کنید؟»
« P نقطه‌ای از خطّ c به گونه‌ای است که $PF = PQ$».
«خوب. ولی خواهش می‌کنم باکلمات بگویید: PQ چیست؟»
«فاصلهٔ عمودی P از d ».
«بسیار خوب. آیا حالا می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید. ولی خواهش می‌کنم که آن را به وضوح و با جمله‌ای کامل بیان کنید.»
«نقطه‌ای برروی یک خطّ راست داده شدهٔ c پیدا کنید که فاصله آن از نقطهٔ معلوم F برابر با فاصلهٔ آن از خطّ راست معیّن d باشد»
«پیشرفت از بیان اصلی تا بیان دوبارهٔ خودتان را در نظر بگیرید. بیان نخستین

مسئله اکندهٔ از اصطلاحات فنّی نا آشنای سهمی و کانون و هادی بود، اندکی پر طمطراق و پرباد به نظر می‌رسید. و اکنون اثری از آن اصطلاحات ناآشنا بر جای نمانده است، شما مسئله را شکست داده‌اید. کار خوبی کردید!»

٤. حذف اصطلاحات فنّی نتیجهٔ مثال پیشین بود. از یک صورت بیانی مسئله آغاز کردیم که مشتمل بر پاره‌ای اصطلاحات فنّی «سهمی، کانون، هادی» بود وسرانجام به بیان مجدّد تهی از آن اصطلاحات رسیدیم.

برای حذف کردن یک اصطلاح فنّی باید تعریف آن را بدانیم، ولی دانستن تعریف تنها کافی نیست، باید آن را به کار بریم. در مثال پیشین تنها این کافی نبود که تعریف سهمی رابه خاطر آوریم. گام قطعی وارد کردن خطهای PF و PQ در شکل بود که برابر بودن آنها راتعریف سهمی تضمین کرده است. این روش نمونه است. عناصری شایسته را درتصوّر ودریافت خود نسبت به مسئله وارد می‌کنیم. برمبنای تعریف، روابطی میان عناصر وارد شده برقرار می‌سازیم. اگر این روابط کاملاً معنی را بیان کنند، تعریف را به کار برده‌ایم. با استفاده کردن از تعریف اصطلاحات فنّی راحذف کردیم.

روشی که هم اکنون بیان کردیم به نام **باز گشت به تعریفها** خوانده می‌شود.

براثر بازگشت به تعریف یک اصطلاح فنّی، از شرّ اصطلاح خلاص می‌شویم، ولی به جای آن عناصر تازه و روابط تازه وارد مسئله کرده‌ایم. تغییری که در ادراک و دریافت ما از مسئله حاصل می‌شود، ممکن است مهم باشد. به هرصورت، بیان مجدّد صورت مسئله و **تغییر شکل مسئله**، ناگزیر به نتیجه می‌رسد.

۵. تعریفها و قضایای شناخته. اگر کلمهٔ «سهمی» را بدانیم و اندیشهٔ مبهمی در بارهٔ شکل منحنی داشته باشیم ولی چیز دیگری دربارهٔ آن ندانیم، شناخت ما آشکارا برای حلّ مسئله‌ای که به‌عنوان مثال آوردیم، یا هر مسئله هندسی جدّی دیگری مربوط به سهمی کفایت نخواهد کرد. برای رسیدن به این هدف چگونه شناختی مورد نیاز است؟

علم هندسه را می‌توان تشکیل یافتهٔ از بدیهیّات و تعریفات و قضایا دانست. سهمی از بدیهیّات که با اصطلاحات ابتدایی همچون نقطه و خطّ راست و نظایر اینها سروکار دارد، وارد نیست. هر استدلال هندسی که پای سهمی در آن به میان آید، و حلّ هر مسئلهٔ مشتمل بر سهمی، می‌بایستی یا از طریق تعریفات صورت بگیرد و یا از راه قضایای هندسی مربوط به سهمی. برای حل کردن چنین مسئله‌ای، لااقل باید تعریف سهمی را بدانیم، ولی بهتر آن است که از چندین قضیّهٔ مربوط به سهمی نیز آگاه باشیم.

آنچه در بارهٔ سهمی گفتیم، در بارهٔ هر مفهوم و تصوّر همانند آن صحت دارد. هنگامی که حلّ مسئله‌ای را آغاز می‌کنیم که مشتمل بر آن مفهوم است، هنوز نمی‌دانیم که استفادهٔ از تعریف آن مفهوم سودمندتر است یا استفادهٔ از قضیّه‌ای مربوط به آن، ولی این امر یقینی است که باید این یک یا آن یک را مورد بهره برداری قرار دهیم.

ولی حالاتی وجود دارد که دیگر در آنها انتخاب صورت نمی‌گیرد. اگر تعریف مفهوم را به درستی بدانیم و چیزی جز آن ندانیم، ناگزیر باید از تعریف استفاده کنیم. ولی اگر از چند قضیّه مربوط به مفهوم موردنظر آگاه باشیم، و در کاربرد آنها آزمودگی داشته باشیم، احتمال آن هست که به قضیّهٔ مناسبی که متضمّن آن باشد دسترسی پیدا کنیم.

۰۶ چند تعریف. کره معمولاً به صورت مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ مفروض فاصله‌های برابر با یکدیگر داشته باشند تعریف می‌شود (نقاط در فضا است و منحصر به یک سطح نیست). ولی می‌توانیم کره را همچون سطح حاصل شدهٔ از دوران یک دایره بر گرد یکی از قطرهایش تعریف کنیم. کره تعریفهای شناختهٔ دیگری دارد، و جز اینها نیز می‌توان تعریفهای تازه‌ای برای آن یافت.

هنگامی که باید مسئلهٔ طرح شده‌ای را که متضمّن مفهوم مشتق شدهٔ «کره» یا «سهمی» است حل کنیم و می‌خواهیم به تعریف آن بازگردیم، لازم است از میان چند تعریف یکی را برگزینیم. در چنین حالتی این که کدام تعریف را انتخاب می‌کنیم حایز اهمّیت است.

یافتن وسعت سطح کره در زمانی که ارشمیدس این مسئله را حل کرد مسئله‌ای بزرگ و دشوار می‌نمود. ارشمیدس تعریفی از کره را برگزید که ما در بالا آن را نقل کردیم. وی چنان ترجیح داد که سطح کره را حاصل آمدهٔ از سطح جسمی بداند که از گردش یک دایره بر گرد قطری از آن پدید می‌آید. وی در آن دایره چند ضلعی منتظمی با شمارهٔ اضلاع جفت محاط کرد که قطر ثابتی رأسهای رو به روی دیگر آن را به هم می‌پیوست. چند ضلعی منتظم تقریبی از دایره است، و چون با دایره دوران کند، یک سطح محدّب ترکیب شده از دو مخروط با رأسهای قرار گرفته بر دو کنار قطر ثابت دایره، و چندین مخروط ناقص در میان آنها تشکیل می‌شود. وسعت این سطح مرکّب تقریبی از وسعت سطح کره است و ارشمیدس آن را برای اندازه‌گیری سطح کره مورد استفاده قرار داد. اگر کره را مکان هندسی نقاطی در نظر بگیریم که فواصل همهٔ آنها تا مرکز کره به یک اندازه است، چنین تعیین مساحت تقریبی نمی‌تواند به خاطر ما برسد.

۷. بازگشت به تعریفها برای اختراع برهان سودمند است ولی در وارسی و امتحان برهان نیز سودمند واقع می‌شود.

کسی یک راه حلّ ادّعایی تازه‌ای منسوب به ارشمیدس برای یافتن مساحت سطح کره عرضه می‌کند. اگر تنها اندیشهٔ مبهمی از کره داشته باشد، راه حلّ او به هیچ وجه خوب نخواهد بود. ممکن است اندیشهٔ روشنی از کره داشته باشد، ولی اگر نتواند این اندیشه را در برهان خود به کار اندازد، من نمی‌توانم بدانم که او اصلاً اندیشه‌ای داشته است، و برهان او خوب نخواهد بود. بنابراین، در ضمن گوش دادن به برهان او منتظر لحظه‌ای هستم که چیزی اساسی دربارهٔ کره بگوید و تعریف آن یا قضیّه‌ای در بارهٔ آن را به کار برد. اگر چنین لحظه‌ای هرگز فرانرسد، راه حلّ او خوب نیست.

نه تنها باید براهین دیگران را در معرض امتحان و وارسی قرار دهیم بلکه با براهین خودمان نیز به همین گونه باید عمل کنیم. **آیا همهٔ مفاهیم اساسی مندرج در مسئله را در نظر گرفته‌اید؟** آیا این مفهوم را چگونه به کار بردید؟ آیا معنی و تعریف آن را به کار گرفتید؟ آیا واقعیّتهای اساسی و قضایای شناختهٔ مربوط به آن را به کار بردید؟

این که بازگشت به تعریفها در امتحان صحّت یک برهان حایز اهمّیت است، به توسّط پاسکال مورد تأکید قرار گرفت که این قاعده از او است: «جایگزین کردن ذهنی تعریفها به جای تعریف شده‌ها.» این که بازگشت به تعریفها همچنین در طرحریزی یک برهان مهمّ است، به توسّط هادامار مورد تأکید قرار گرفته است.

۸. بازگشت به تعاریف عمل مهمّی از فکر و ذهن است. اگر بخواهیم بدانیم که چرا تعریفهای کلمات این اندازه اهمّیت دارند، باید نخست این مطلب بر ما محقّق شود که کلمات حایز اهمّیت است. نمی‌توانیم فکر و ذهن خود را بدون کلمات یا علامات یا نمادها به کار اندازیم. بنابراین، کلمات و علامات قدرت دارند. مردمان ابتدایی برای کلمات و علامات قدرت جادویی قائلند. ما می‌توانیم این اعتقاد را بفهمیم ولی در داشتن آن شریک نمی‌شویم. باید بدانیم که قدرت یک کلمه درصدا یا هوای گرمی که از دهان بیرون می‌آید نیست، بلکه در فکری است که کلمه یاداور آن است و سرانجام درواقعیّتهایی که اندیشه بر روی آنها بناشده است.

بنابراین، جستجوی معانی و واقعیّتها درماورای کلمات تمایلی سالم است. ریاضیدان، در ضمن بازگشت به تعریفها می‌خواهد به ارتباطهای فعلی اشیاء ریاضی در ماورای اصطلاحات فنّی دسترس پیدا کند، به همان‌گونه که فیزیکدان درآن سوی

اصطلاحات فنّی جویای آزمایشهای معیّن است و انسان معمولی با مقداری احساس وعقل سلیم خواستار آن است که پایین برود و به واقعیّتهای سخت برسد وتنها با کلمات محض وقت خود را تلف نکند.

تعمیم عبارت از گذشتن از ملاحظهٔ یک چیز به ملاحظهٔ دسته ای از چیزها است که آن چیز یکی از آنها به شمار می‌رود، یا گذشتن از ملاحظهٔ یک دستهٔ محدود به ملاحظهٔ دستهٔ فراگیرتری است که آن دسته محدود را نیز شامل است.

۱. اگر برحسب تصادف به چنین حاصل جمع برخوریم :

$$۱+۸+۲۷+٦٤=۱۰۰$$

ممکن است متوجّه این مطلب شویم که آن را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+٤^۳=۱۰^۲$$

حال طبیعی است که از خود چنین بپرسیم: آیا غالباً چنان اتّفاق می‌افتد که حاصل جمع مکعّبهایی همچون

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+n^۳$$

یک مربّع باشد؟ با طرح این سؤال، به عمل تعمیم پرداخته‌ایم. این تعمیم تعمیمی خوشبخت است، ازیک مشاهده و ملاحظه به یک قانون جالب توجّه کلّی رسیده است. در ریاضیّات و فیزیک و علوم طبیعی، بسیاری از نتایج براثر تعمیم خوشبخت به دست آمده است. رجوع کنید به **استقراء و استقراءِ ریاضی.**

۲. تعمیم ممکن است در حلّ مسائل سودمند واقع شود. به مسئله ذیل که مربوط به هندسهٔ فضایی است توجّه کنید: «یک خطّ راست و یک هشتوجهی منتظم داده شده است. سطحی را که بر خطّ مزبور گذشته باشد و هشتوجهی را به دونیمهٔ برابر تقسیم کند به دست آورید.» ممکن است این مسئله دشوار به نظر برسد ولی، در حقیقت، آشنایی مختصری با شکل هشتوجهی منتظم داشتن برای آن کافی است که مسئلهٔ عامتر ذیل را به ذهن القا کند: «یک خطّ راست و یک حجم دارای مرکز تقارن داده شده است. سطحی را به دست آورید که برآن خط بگذرد و حجم داده شده را به دو قسمت برابر تقسیم کند.» سطح خواسته شده البتّه از مرکز تقارن می‌گذرد و خطّ داده شده را در خود دارد. چون هشتوجهی مرکز تقارن دارد، دراین ضمن مسئلهٔ اصلی ما نیز حل شده

است.

خواننده از توجّه به این نکته غافل نخواهد ماند که مسئلهٔ دوم عامتر و کلّیتر از مسئلهٔ اول و، با وجود این، حلّ آن آسانتر است. در واقع کار عمدهٔ ما در حلّ مسئله اوّل اختراع کردن مسئلهٔ دوم بود. با اختراع کردن مسئلهٔ دوم، به نقش مرکز تقارن توجّه پیدا کردیم. خاصّیتی از هشتوجهی را آشکار ساختیم که برای حلّ مسئلهٔ حل کردنی جنبهٔ اساسی داشت، و آن مرکز تقارن داشتن هشتوجهی بود.

ممکن است حلّ مسائل کلّیتر آسان باشد. این گفته محالنما به نظر می‌رسد ولی، پس از مثالی که گذشت، دیگر در نظر ما محال نمی‌نماید. دستاورد عمده در حلّ یک مسئلهٔ خاصّ اختراع کردن یک مسئلهٔ کلّی بود. پس از دستاورد عمده، تنها جزءِ کوچکی از کار باقی ماند. بدین ترتیب، درحالت مورد نظر ما، حل مسئلهٔ کلی و عام تنها جزءِ کوچکتر حلّ مسئلهٔ خاصّ است.

نگاه کنید به **محالنمای مخترع.**

۳. «حجم هرم مربّع القاعدهٔ ناقصی را به دست آورید که درازای ضلع قاعدهٔ زیرین آن ۱۰ و درازای ضلع قاعدهٔ زبرین آن ۵ و ارتفاع آن ٦ سانتی‌متر است.» اگر به جای اعداد ۱۰ و ۵ و ٦ حروف، مثلاً a و b و h قرار دهیم، به کار تعمیم پرداخته ایم. مسئله‌ای کلّیتر از مسئلهٔ نخستین به دست می‌آوریم که چنین است: «حجم هرم مربّع القاعدهٔ ناقصی را به دست آورید که طول قاعدهٔ زیرین آن a و، ضلع قاعدهٔ زبرین b، و ارتفاع آن h است.» چنین تعمیمی ممکن است بسیار سودمند واقع شود. برای گذشتن از یک مسئلهٔ «عددی» به یک مسئله «حرفی» به روشهای تازه دسترس پیدا می کنیم، می توانیم داده‌ها را تغییر دهیم و، با این کار نتیجه‌ای را که به دست آورده‌ایم از راههای گوناگون آزمایش کنیم. نگاه کنید به **آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟** ۲ و **تغییر شکل مسئله.**

تغییر شکل مسئله. یک حشره (چنان که در جای دیگر اشاره شد) درآن می‌کوشد که از طریق پنجره از اطاق فرار کند، و عمل بیحاصل عبور غیرممکن از میان شیشهٔ پنجره را مکرّر در مکرّر انجام می‌دهد، و در صدد فرار کردن از پنجرهٔ دیگر که درآن باز است و به راحتی می‌تواند از آن بیرون رود نمی‌افتد. یک موش با هوشمندی بیشتر عمل می‌کند؛ هنگام افتادن در تله کوشش می‌کند که از میان میله‌های آن عبور کند و اگر این کار از میان دو میله

امکانپذیر نبود به آزمایش فاصلهٔ میان میله‌های دیگر می‌پردازد. یک انسان می‌تواند، یا باید بتواند، آزمایش خویش را هوشمندانه‌تر تغییر دهد، و امکانات گوناگون را با فهم بیشتر اکتشاف کند، و از اشتباهات و خطاها و کوتاهیهای خود چیزهای تازه بیاموزد. اندرز رایج این است که «آزمایش کن، دوباره آزمایش کن». اندرز خوبی است. حشره و موش و انسان از آن پیروی می‌کنند، ولی اگر کسی با کامیابی بیشتر از دیگران از این اندرز بهره‌مند می‌شود، به سبب آن است که هوشمندانه‌تر مسئلهٔ خود را تغییر می‌دهد.

۱. در پایان کار خودمان، در آن هنگام که به حلّ مسئله کامیاب شده‌ایم، تصوّر و دریافت ما از مسئله کاملتر از آن است که در آغاز حلّ مسئله بود. برای پیشرفت از طرز تصوّر اصلی خود نسبت به مسئله به تصوّر و دریافتی کاملتر و پرورده‌تر، ایستگاههای مختلف را می‌آزماییم و مسئلهٔ خودمان را از جوانب مختلف در نظر می‌گیریم و به آن نگاه می‌کنیم.

کامیابی در حلّ مسئله وابسته است به انتخاب سیمای حقیقی و حمله‌ور شدن به دژ از طرفی که به آن دسترسی داریم. برای یافتن این که کدام سیما و جنبه سیمای راستین است و کدام طرف طرف قابل نفوذ، جوانب و سیماهای مختلف را می‌آزماییم، مسئله را تغییر می‌دهیم.

۲. تغییر دادن مسئله کاری اساسی است. این واقعیّت را می‌توان از راههای گوناگون توضیح داد. مثلاً، از یک دیدگاه، پیشرفت در حلّ مسئله همچون بسیج کردن و سازمان دادن شناختی است که پیشتر به دست آورده‌ایم. لازم است بعضی از عناصر را از مخزن حافظهٔ خود بیرون بکشیم و در مسئله به کار بریم. تغییر پیدا کردن مسئله به ما دراستخراج این گونه عناصر مدد می‌رساند. چگونه؟

ما چیزها را از طریق گونه‌ای از «عمل تماس» که به نام «تداعی معانی» یا «همخوانی اندیشه‌ها» خوانده می‌شود، به یاد می‌آوریم؛ آنچه در فکر خود در زمان حال داریم ما را به یاد چیزی می‌اندازد که در حادثه‌ای پیش از این با آن در تماس بوده ایم. (برای بحث در بارهٔ نظریّهٔ همخوانی و محدودیّت آن، نه جای کافی درکتاب حاضر وجود دارد و نه نیازی به آن است.) با تغییر دادن مسئله، نقطه‌ها و نکته‌های تازه‌ای وارد می‌کنیم که از این راه تماسهای تازه و امکانات برقرار شدن تماسهای شایسته‌ای با مسئلهٔ حل کردنی فراهم می‌آید.

۳. نمی‌توانیم امید آن داشته باشیم که هر مسئلهٔ شایستهٔ صرف وقت برای حل کردن آن را بدون تمرکز شدید حل کنیم. ولی با تمرکز توجّه بر روی نقطه‌ای معیّن به

آسانی خسته می‌شویم. برای آنکه توجّه خود را زنده و فعّال نگاه داریم، لازم است چیزی که مورد توجّه ما قرار گرفته است پیوسته در حال تغییر باشد.

اگر در حلّ مسئله پیشرفت کنیم، کاری برای انجام دادن و نقاط تازه‌ای برای آزمودن وجود دارد، و توجّه ما مشغول و علاقه‌مندی ما زنده است. ولی اگر نتوانیم به پیش برویم، توجّه ما پژمرده می‌شود، و علاقه و شوق ما فرو می‌نشیند، از مسئله خسته می‌شویم، و افکار ما سرگردانی پیدا می‌کند، و خطر آن است که مسئله را روی هم رفته گم کنیم. برای گریز از این خطر لازم است دربارهٔ آن مسئله **پرسش تازه‌ای برای خود طرح کنیم.**

پرسش تازه سرپوش از امکانات ناآزمودهٔ تماسّ با شناخت قبلی ما برمی‌دارد، و امید ما را به برقرارکردن تماسهای سودمند دوباره زنده می‌کند. پرسش تازه، با نشان دادن سیمای تازه‌ای از مسئله، **بار دیگر از راه تغییر مسئله علاقهٔ ما را به حلّ آن برمی‌انگیزد.**

۴. مثال. حجم هرم ناقص مربّع القاعده را با طول ضلع زیرین a و ضلع زبرین b و ارتفاع h حساب کنید.

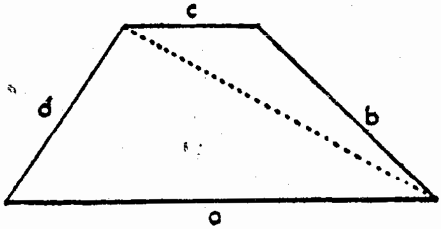
این مسئله می‌تواند برای شاگردانی طرح شود که از تعیین حجم منشور و هرم آگاهی دارند. اگر شاگردان نتوانند با اندیشه‌ای از خود به حلّ این مسئله بپردازند، معلّم با تغییر داده‌ها ممکن است کار را دقیقتر آغاز کند. از هرم ناقصی آغاز می‌کنیم که در آن $b < a$ است. اگر b تدریجاً افزایش پیدا کند تا برابر با a شود، چه پیش خواهد آمد؟ هرم ناقص به صورت یک منشور درمی‌آید که حجم آن برابر با a^2h است. اگر b تدریجاً کوچک شود تا به صفر برسد چه پیش خواهد آمد؟ هرم ناقص به صورت یک هرم درمی‌آید که حجم آن $a^2h/3$ است.

این تغییر داده‌ها، پیش از هرچیز، توجّه دانشاموزان را نسبت به مسئله برمی‌انگیزد. سپس ممکن است این اندیشه را به ذهن آنان القا کند که از نتایج نقل شدهٔ دربارهٔ منشور و هرم به صورتی استفاده کنند. به هرحال، به خواصّ معیّنی از نتیجه دست یافته‌ایم؛ فرمول نهایی باید چنان باشد که با $b = a$ به صورت a^2h درآید، و با $b = 0$ به صورت $a^2h/3$. دانستن خواصّی از نتیجه‌ای که باید به آن برسیم، مزیّتی به شمار می‌رود. از این خواص ممکن است تلقینات سودمندی حاصل شود، و، در هر حالت، هنگامی که به جواب قطعی رسیدیم می‌توانیم آن را از این راه مورد آزمایش قرار دهیم. بدین ترتیب، از پیش جوابی برای این پرسش به دست می‌آوریم: **آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟** (در آنجا به شمارهٔ ۲ رجوع کنید.)

۵. مثال. ذوزنقه‌ای بسازید که چهارضلع a و b و c و d آن در دست است.

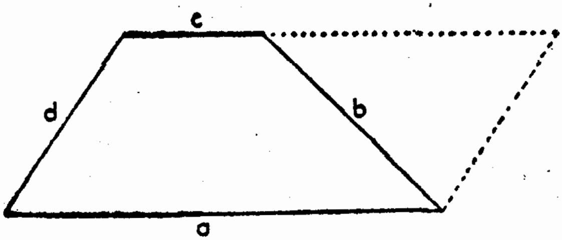
فرض می‌کنیم که a قاعدهٔ تحتانی و c قاعدهٔ فوقانی باشد. a و c برابر نیستند ولی موازی با یکدیگرند. دوضلع دیگر b و d موازی نیستند. اگر اندیشهٔ دیگری نباشد، به تغییر دادن داده‌ها می‌پردازیم.

کار خود را باذوزنقه‌ای با $a>c$ آغاز می‌کنیم. اگر c کاهش پیدا کند تا به صفر برسد، چه اتّفاق خواهد افتاد؟ ذوزنقه به یک مثلّث مبدّل می‌شود. مثلّث شکلی آشنا وساده است که می‌توانیم آن را با داده‌های گوناگون بسازیم؛ وارد کردن این مثلّث در شکل دارای مزیّتی است. با رسم کردن یک خطّ معاون یعنی قطری از ذوزنقه این مثلّث را به دست می‌آوریم (شکل ۱۷) . ولی با آزمودن مثلّث به این نتیجه می‌رسیم که از آن کومکی برای ما حاصل نمی‌شود، تنها دو ضلع a و d را از آن داریم در صورتی که باید سه داده در اختیار داشته باشیم.



شکل ۱۷

بهتر است به آزمودن چیزی دیگر بپردازیم. هنگامی که c افزایش پیدا کند تا برابر با a شود چه پیش خواهد آمد؟ ذوزنقه به صورت یک متوازی‌الاضلاع در می‌آید. آیا می‌توانیم از آن استفاده کنیم؟ اندکی آزمایش (شکل ۱۸) توجّه ما را به مثلّثی جلب می‌کند که بر ذوزنقه اصلی در ضمن ترسیم متوازی‌الاضلاع افزوده‌ایم. این مثلّث به آسانی ساخته می‌شود، زیرا سه ضلع b و d و $a-c$ آن در دست است.



شکل ۱۸

با تغییر دادن مسئلهٔ اصلی (ساختن ذوزنقه)، به یک مسئله کومکی دست یافتیم که بیشتر در دسترس قرار دارد (یعنی ساختن یک مثلّث). با استفادهٔ از مسئلهٔ کومکی به آسانی می‌توانیم مسئلهٔ اصلی خود را حل کنیم (باید متوازی‌الاضلاع را کامل کنیم).

مثال ما مثالی نمونه است. این که نخستین تلاش ما بیحاصل ماند نیز حالت نمونه دارد. چون دو باره به آن باز گردیم، خواهیم دید که نخستین تلاش چندان بیحاصل نبوده است.اندیشه‌ای در آن وجود داشته است، مخصوصاً فرصتی برای ما فراهم آورد تا به عنوان وسیله‌ای برای رسیدن به هدف به فکر ساختن یک مثلّث بیفتیم. در واقع، با تغییر دادن آزمایش ناکام ماندهٔ نخستین خود به آزمایش کامیار دوم رسیدیم. c را تغییر دادیم، نخست به کاهش آن پرداختیم، و سپس به افزایش آن.

۶. چنانکه در مثال پیش دیدیم، غالباً لازم است تغییراتی در مسئله را مورد آزمایش قرار دهیم. باید آن را مکرّر درمکرّر تغییر دهیم و به شکل دیگر بیان کنیم تا این که سرانجام به چیزی سودمند دست یابیم. از شکستی که نصیب ما می‌شود. چیز می‌آموزیم، ممکن است در آزمایش ناکام مانده اندیشهٔ خوبی وجود داشته باشد، و با تغییر شکل دادن به یک آزمایش بیحاصل ممکن است به آزمایشی موفّقیّت‌آمیز برسیم. آنچه پس از آزمایشهای گوناگون به آن می‌رسیم، غالباً، همچون در مثال گذشته، یک مسئلهٔ معاون قابل بهره‌برداری است.

۷. بعضی از اشکال تغییر دادن مسئله عموماً سودمند است، همچون بازگشت به **تعریف** و **تجزیه وترکیب مجدّد** و وارد کردن **عناصر معاون** و **تعمیم** و **تخصیص** واستفادهٔ از **تمثیل**.

۸. آنچه اندکی پیش (درشمارهٔ ۳) در بارهٔ پرسشهای جدید گفتیم که ممکن است بار دیگر سبب جلب توجّه ما به مسئله شود، برای استعمال درست فهرست ما حایز اهمّیت است.

معلّم از این فهرست برای کومک کردن به شاگردان خود استفاده می‌کند. اگر شاگرد پیشرفت کند، نیازی به کومک ندارد و معلّم نباید چیزی از او بپرسد. بلکه باید به او اجازه دهد که تنها کار کند و این امر البتّه برای استقلال شاگرد اهمّیت فراوان دارد. ولی درآن هنگام که چنین شاگردی در ضمن حلّ مسئله معطّل می‌ماند، معلّم البتّه باید پرسشها وپیشنهادهایی برای بیرون آوردن وی از حالت معطّلی طرح کند. چه اگر چنین نکند ممکن است شاگرد از مسئله خسته شود وآن را

کنار بگذارد، یا توجّه نسبت به آن را از دست بدهد ودرنتیجهٔ بی‌توجّهی وبی‌اعتنایی مرتکب اشتباهاتی آشکار واحمقانه شود.

باید فهرست را درحلّ مسائل خودمان به کار بریم. برای کاربرد صحیح آن، روشی را به کار می‌بریم که در حالت گذشته به کار بردیم. هنگامی که پیشرفت ما رضایت‌بخش است وملاحظاتی تازه خود به خود پیدا می‌شود، با پرسشهای نامربوط نباید مانع پیشرفت خودمان شویم. ولی درآن هنگام که پیشرفت به بنسبت رسیده وچیزی برای ما حاصل نمی‌شود، این خطر هست که‌از مسئله‌خسته‌وآزرده‌شویم. دراین‌صورت‌وقت‌آن‌است که در بارهٔ اندیشه‌ای کلی فکر کنیم که بتواند برای ما سودمند باشد، وطرح سؤال وپیشنهادی از فهرست ممکن است مناسب باشد. سؤالی خوشایند است که امید نشان دادن سیمای تازه‌ای از مسئله از آن احساس شود؛ چنین پرسشی می‌تواند علاقهٔ فروخفتهٔ مارا از نو برانگیزد ومارا به کار کردن واندیشیدن دلگرم سازد.

تقارن دومعنی دارد، یکی معنی خاصتر وهندسی؛ ودیگری معنی کلّی وغیر معمولی منطقی.

درهندسهٔ فضایی مقدّماتی دوگونه تقارن درنظر گفته می‌شود: تقارن نسبت به سطحی به نام سطح تقارن، وتقارن نسبت به نقطه‌ای به نام مرکز تقارن. چنین می‌نماید که بدن آدمی تقارن‌خوبی‌رامجسّم‌می‌سازدولی‌چنین‌نیست؛بسیاری‌ازاندامهای‌درونی بدن‌به‌حالت‌غیرمتقارن‌قرارگرفته‌اند. یک‌مجسّمه‌نسبت‌به‌یک‌سطح قائم‌تقارن‌دارد و چنان است که دونیمهٔ آن را می‌توان کاملاً با یکدیگر مبادله کرد.

درقبول عامتر کلمهٔ تقارن، یک کلّ را در صورتی متقارن می‌نامند که اجزاء «مبادله‌پذیر» با یکدیگر داشته باشد. چندگونه تقارن وجود دارد، تفاوت آنها در شمارهٔ قسمتهای مبادله‌پذیر و درعملی است که برای این مبادله باید صورت بگیرد. مثلاً، یک مکعّب دارای تقارنی از درجهٔ بالا است، شش وجه آن بایکدیگر قابل تبدیل است و ۸ رأس و ۱۲ یال آن نیز چنین است. عبارت

$$yz + zx + xy$$

متقارن است، هردو حرف از سه حرف x و y و z را می‌توان با یکدیگر مبادله کرد بدون آن که این عبارت تغییر پیدا کند.

تقارن، به معنی عامّ و کلّی، برای موضوع بحث ما مهمّ است. اگر مسئله‌ای از بعضی

جهات متقارن باشد، می‌توانیم از اجزاءِ مبادله‌پذیر آن بهره‌گیری کنیم و غالباً پرداختن به آن قسمتها که نقش واحدی دارند و به یک صورت عمل می‌کنند سودمنداست (به **عناصر معاون**(کومکی)، ۳ نگاه کنید).

در آن بکوشید که هرچه را متقارن است، به صورت متقارن مورد بحث و عمل قراردهید،و بیجهت از روی بی‌مبالاتی یک تقارن طبیعی را از میان نبرید. با وجود این، بعضی از اوقات ناگزیر باید با چیزهایی که نسبت به یکدیگر تقارن طبیعی دارند به صورت نامتقارن عمل کنیم. دو لنگهٔ یک دستکش قطعاً با یکدیگر متقارن است، ولی هیچ کس باآنها به صورت متقارن رفتارنمی‌کند و لنگهٔ دستکش دست راست را برای پوشاندن دست چپ به کار نمی‌برد.

تقارن در آزمایش صحّت نتیجه مسئله نیز سودمند واقع می‌شود، به بخش ۱٤ رجوع کنید.

تمثیل گونه‌ای از شباهت است. چیزهای همانند و مشابه یکدیگر از بعضی جهات با یکدیگر توافق دارند، چیزهای متماثل **در بعضی از روابط قسمتهای متناظر با یکدیگر توافق دارند.**

۱. متوازی الاضلاع قائم‌الزّاویه مشابه و متماثل با یک متوازی السّطوح قائم الزّوایا است. در واقع روابط میان اضلاع یک متوازی الاضلاع شبیه روابط میان وجوه یک متوازی السّطوح است.

هرضلع از متوازی الاضلاع قائم‌الزّاویه موازی باضلعی دیگر و عمود بر دو ضلع باقیمانده است.

هروجه از متوازی‌السّطوح قائم موازی بایک وجه و عمود بروجوه دیگر است. اگر ضلع را «یک جزء محدود کنندهٔ» متوازی‌الاضلاع، و وجه را «یک جزءِ محدود کنندهٔ» متوازی‌السّطوح بنامیم آن وقت می‌توانیم دوحکم یاد شده را به صورت یک حکم در آوریم و آن را چنین بیان کنیم: هرجزءِ محدود کننده موازی با جزءِ محدود کنندهٔ دیگر و عمود بر دیگر اجزاءِ محدود کننده است.

بدین گونه بعضی از روابط را که مشترک میان دو مجموعه از اشیاءِ باهم مقایسه شده، یعنی اضلاع مربّع مستطیل و وجوه مکعّب مستطیل است، بیان کرده‌ایم. تشابه و مماثلت این دو مجموعه عبارت از این اشتراک در روابط است.

۲. تمثیل در طرز تفکّر و درسخن گفتن همه روزه و نتیجه‌گیریهای متعارفی و نیز

در تعبیرات هنری و در عالیترین دستاوردهای علمی مانفوذ دارد و در تراز های مختلف به کار می‌رود. مردمان غالباً از تمثیلهای مبهم و غیر کامل و به صورت غیر کامل آشکار شده استفاده می‌کنند، ولی ممکن است تمثیل به تراز دقّت ریاضی برسد. همه گونه تمثیل ممکن است در اکتشاف راه حلها نقشی ایفا کند و به همین جهت نباید از هیچ نوع تمثیل غافل بمانیم.

۳. اگر در ضمن حلّ یک مسئله به اکتشاف **مسئله سادهٔ مشابهی** توفیق پیدا کنیم، بخت یار ما شده است. در بخش ۱۵، مسئلهٔ اصلی ما مربوط به قطریک متوازی‌السّطوح قائم بود: و در نظر گرفتن یک مسئلهٔ مشابه ساده‌تر که مربوط به قطر یک مربّع مستطیل بود، به حلّ مسئلهٔ اصلی کومک کرد. اکنون به بحث بیشتر دربارهٔ این گونه مسائل می‌پردازیم. می‌خواهیم مسئلهٔ زیر را حل کنیم:

گرانیگاه (مرکز ثقل) یک چهاروجهی را پید کنید.

بدون شناختن حساب انتگرال، و بدون داشتن اطّلاعی از فیزیک حلّ این مسئله به هیچ وجه آسان نیست، در روزگار ارشمیدس و گالیله یک مسئلهٔ علمی جدّی به شمار می‌رفت. اگر بخواهیم آن را با کمترین اطّلاع علمی ممکن حل کنیم، باید چشم درپی یافتن مسئلهٔ ساده‌تر مشابهی داشته باشیم. مسئلهٔ متناظر با آن به صورت طبیعی در سطح بدین صورت پیدا می‌شود:

گرانیگاه یک مثلّث متجانس را پیدا کنید.

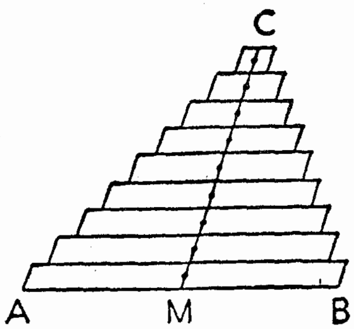
اکنون به جای یک پرسش با دو پرسش روبه رو هستیم. ولی یافتن پاسخهای این دو پرسش آسانتر از یافتن یک پرسش نخستین است ـ به شرط آنکه این دو پرسش به صورتی زیرکانه با یکدیگر پیوستگی پیداکنند.

٤. برای مدّتی کوتاه از مسئلهٔ اصلی مربوط به چهاروجهی منصرف می‌شویم و توجّه خود را به سوی مسئلهٔ مربوط به یافتن گرانیگاه مثلّث متجانس معطوف می‌داریم. برای حلّ این مسئله، باید چیزی دربارهٔ گرانیگاه بدانیم. اصل ذیل پسندیده است و خود را به صورتی طبیعی عرضه می‌کند:

اگر یک دستگاه ساخته شدهٔ از جرمهای S عبارت از پاره‌هایی باشد که هریک از آنها گرانیگاهی در سطح گرانیگاه پاره‌های دیگر دارد، در آن صورت گرانیگاه کلّ دستگاه S نیز در همین سطح خواهد بود.

این اصل همهٔ آنچه را که در مورد مثلّث به آن نیازمندیم در اختیار ما قرار می‌دهد. نخست، مستلزم آن است که گرانیگاه مثلّث درخود سطح مثلّث قرار گیرد.

سپس، می‌توانیم مثلّث را ساخته شدهٔ از الیاف یا رشته‌های بسیار باریکی به صورت متوازی‌الاضلاعهای موازی با یکی از اضلاع مثلّث (ضلع AB درشکل ۱۹) درنظر بگیریم. گرانیگاه هرلیف (هر متوازی‌الاضلاع) آشکارا نقطهٔ وسط آن است، و همهٔ این نقطه‌های میانی متوازی‌الاضلاعها بر روی خطّی واقع می‌شوند که رأس C را به وسط M از AB متّصل می‌کند (به شکل ۱۹ رجوع کنید).



شکل ۱۹

هرسطح که بر خطّ میانهٔ CM مثلّث بگذرد، شامل گرانیگاههای همهٔ الیاف متوازی سازندهٔ مثلّث خواهد بود. بدین ترتیب چنین نتیجه می‌گیریم که گرانیگاه مثلّث نیز بر روی همین خطّ میانه قرار دارد. ولی به همین دلیل که گذشت لازم می‌آید که بر روی دو خطّ میانهٔ دیگر مثلّث نیز بوده باشد و بنابراین **گرانیگاه مثلّث نقطهٔ مشترک تقاطع هر سه میانهٔ مثلّث خواهد بود.**

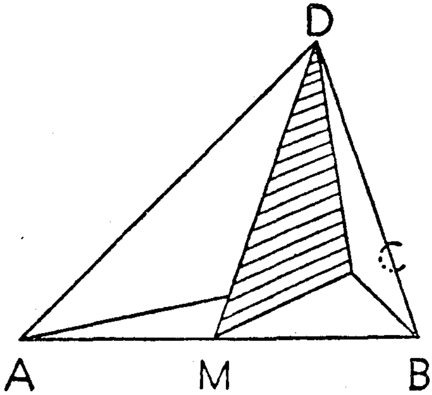
اکنون مطلوب است که از راه هندسی محض و مستقلّ از هر فرض مکانیکی ثابت شود که سه میانهٔ مثلّث در یک نقطه به یکدیگر می‌رسند.

۵. پس از حلّ مسئلهٔ مربوط به مثلّث، حلّ مسئلهٔ چهار وجهی کاملاً آسان می‌شود. مسئله‌ای همانند و متماثل و شبیه با مسئلهٔ طرح شده حل کرده‌ایم و با حلّ آن **نمونه‌ای برای پیروی** در اختیار داریم.

در حل کردن مسئلهٔ مشابه که اکنون آن را به عنوان سرمشق و نمونه به کارمی‌بریم، مثلّث را تشکیل یافتهٔ از الیاف متوازی با ضلع AB از مثلّث ABC درنظر گرفتیم. اکنون چهار وجهی $ABCD$ را تشکیل شدهٔ از الیافی موازی با یال AB آن درنظر می‌گیریم.

نقاط وسط الیافی که مثلّث را می‌ساختند، همه بر روی یک خطّ راست یعنی میانه

مثلّث واقع می‌شدند که نقطهٔ M وسط ضلع AB را به رأس C مقابل آن متّصل می‌کرد. نقاط وسط الیاف تشکیل دهندهٔ چهار وجهی همه در سطحی واقع می‌شوند که از نقطهٔ M وسط یال AB و یال مقابل آن یعنی CD به وجود می‌آید (به شکل ۲۰ رجوع کنید)، این سطح را سطح میانهٔ چهار وجهی می‌نامیم.



شکل ۲۰

در حالت مثلّث، سه میانهٔ نظیر MC داشتیم که هریک از آنها گرانیگاه مثلّث را بر روی خود داشت. بنابراین لازم می‌آمد که این سه میانه در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند که همان نقطه گرانیگاه مثلّث است. در حالت چهار وجهی شش سطح میانهٔ شبیه MCD داریم که بر هریک از نقطهٔ وسط یک یال و یال روبه روی آن تشکیل می‌شود و به همین جهت لازم می‌آید که شش سطح میانهٔ چهار وجهی در یک نقطه باهم تلاقی کنند که همان گرانیگاه چهار وجهی است.

۶. گرانیگاه چهار وجهی متجانس را بدین‌گونه یافتیم. برای کامل کردن حلّ مسئله، چنان مطلوب است که از راه هندسی محض و مستقلّ از ملاحظات مکانیکی ثابت کنیم که این شش سطح میانه همه از یک نقطه می‌گذرند که همان گرانیگاه چهار وجهی است.

هنگامی که مسئلهٔ یافتن گرانیگاه مثلّث متجانس را حل کردیم، گفتیم که مطلوب چنان است که از طریق هندسی نیز ثابت شود که سه میانهٔ مثلّث از یک نقطه می‌گذرند این مسئله مشابه مسئلهٔ نظیر آن در چهار وجهی ولی ساده‌تر از آن است.

در حلّ این مسئلهٔ مربوط به چهار وجهی، بار دیگر به حلّ مسئلهٔ ساده‌تر مشابه آن

در مثلّث می‌پردازیم (که در اینجا می‌توانیم آن را حل شده فرض کنیم). سه سطح میانه را که از یالهای DA و DB و DC خارج شدهٔ از رأس D می‌گذرند، در نظر می‌گیریم؛ هریک از آنها همچنین از وسط یال مقابل آن نیز می‌گذرد (سطح میانه‌ای که از DC گذشته، M را نیز شامل است، شکل ۸).این سه سطح میانه مثلّث ABC را در امتداد سه‌میانهٔ آن قطع می‌کنند. این سه میانه از یک نقطه می‌گذرند (که این نتیجه‌ای از مسئلهٔ ساده‌تر شبیه آن است) و این نقطه، درست همچون D ،نقطهٔ مشترکی از سه سطح میانه است. خطّ راستی که دو نقطهٔ مشترک را به یکدیگر بپیوندد ، مشترک در میان هر سه سطح میانهٔ چهار وجهی است.

ثابت کردیم که سه‌تا از شش سطح میانه که بر رأس D می‌گذرند یک خطّ راست مشترک دارند. همین امر در بارهٔ سه سطح میانه‌ای که از A می‌گذرد صادق است، و نیز چنین است در مورد سه سطح میانهٔ گذران بر B ، و سه سطح میانهٔ گذران بر C با پیوستن شایستهٔ این واقعیّتها به یکدیگر، می‌توانیم ثابت کنیم که شش سطح میانهٔ چهار وجهی یک نقطهٔ مشترک دارند. (سه سطح میانهٔ گذران بر اضلاع مثلّث ABC دارای یک نقطهٔ مشترکند، و سه خطّ تقاطع که از نقطهٔ مشترک می‌گذرد. حال گوییم که بنابر آنچه به اثبات رسید، بر هر خطّ تقاطع یک سطح میانهٔ دیگر باید بگذرد.)

۷. درشماره های ۵ و ٦ از مسئلهٔ مشابه ساده‌تری در بارهٔ مثلّث برای حلّ مسئله‌ای دربارهٔ چهاروجهی بهره‌برداری کردیم. ولی هنوز این دوحالت از جنبهٔ مهمّی با یکدیگر تفاوت دارند. در شمارهٔ ۵ **روش مسئلهٔ** مشابه ساده‌تری را مورد استفاده قرار دادیم که از راه‌حلّ آن نقطه به نقطه بهره گرفتیم. در شمارهٔ ٦ **نتیجهٔ مسئلهٔ** مشابه ساده‌تر را به کار بردیم وکاری به آن نداشتیم که این نتیجه چگونه به دست آمده است. ولی گاه می‌توانیم **هم روش و هم نتیجهٔ مسئله**‌مشابه ساده‌تری را به کار بگیریم. حتّیٰ مثال پیشین ما، اگر ملاحظات ذکرشدهٔ در ۵ و ٦ را به عنوان بخشهای مختلف حلّ یک مسئله درنظر بگیریم، این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ما مثالی نمونه است. در حلّ مسئلهٔ طرح شده می‌توانیم از راه‌حلّ یک مسئلهٔ ساده‌تر مشابه بهره‌برداری کنیم؛ می‌توانیم روش آن را به کار بریم، یا نتیجه آن را، یا هردو را. البتّه، در حالات دشوارتر ممکن است پیچیدگیهایی پیش بیاید که هنوز با مثال ما نشان داده نشده است. مخصوصاً امکان آن هست که حلّ مسئلهٔ مشابه نتواند مستقیماً برای حلّ مسئلهٔ اصلی مورد استفاده قرار گیرد. در این صورت شایسته است که دوباره راه‌حلّ را ملاحظه کنیم و آن را چندان تغییر بدهیم تا پس از آزمودن راه‌حلهای مختلف

سرانجام یکی از آنها را بتوانیم گسترش دهیم و مسئلهٔ اصلی را با آن حل کنیم.

۸. مطلوب چنان است که نتیجه، یا لااقل بعضی از جنبه‌های نتیجه را تا اندازه‌ای به صورت موجّه‌نما و قابل قبول پیشبینی کنیم. این پیشگویی و حدس قبلی موجّه‌نما غالباً برپایهٔ مشابهت بنا می‌شود.

مثلاً، ممکن است بدانیم که گرانیگاه یک مثلّث منطبق بر گرانیگاه سه رأس آن است (یعنی سه نقطهٔ مادّی با جرمهای برابر که بر سه رأس مثلّث قرار گرفته باشند). با دانستن این مطلب ممکن است حدس بزنیم که گرانیگاه چهاروجهی متجانس منطبق بر گرانیگاه چهاررأس آن است.

این حدس یک «استدلال تمثیلی» است. با دانستن این که مثلّث و چهاروجهی از جهاتی شبیه یکدیگرند، چنین حدس می‌زنیم که آنها از یک جهت دیگر نیز باهم شباهت دارند. اگر موجّه‌نمایی این حدس را به عنوان یک امر یقینی در نظر بگیریم، کار ابلهانه‌ای کرده‌ایم، ولی این حدس موجّه‌نما را از نظر دور داشتن و به آن توجّه نکردن، همان اندازه یا بیش از آن ابلهانه است.

استدلال از طریق مشابهت و تمثیل متعارفترین گونهٔ استدلال و نتیجه‌گیری به نظر می‌رسد. از آن کمابیش حدسهایی به دست می‌آید که تجربه و استدلال دقیقتر ممکن است آنها را تأیید کند یا حکم به باطل بودن آنها بدهد. شیمیدانی که برای پیشبینی نتیجهٔ تأثیر داروهای خود بر روی انسان آنها را بر روی جانوران می‌آزماید، نتایجی از راه تمثیل به دست می‌آورد. ولی کودکی که من او را می‌شناسم نیز چنین می‌کند. سگ دستاموز او را برای معاینه نزد دامپزشک می‌بردند و از او پرسیدند:

«دامپزشک کیست؟»

«دکتر جانوران»

«کدام جانور دکتر جانوران است؟»

۹. یک نتیجهٔ تمثیلی از چند حالت مشابه نیرومندتر از نتیجه‌ای است که از حالات کمتر به دست آمده باشد. با وجود این در اینجا کیفیّت مهمتر از کمیّت است. تمثیلهای واضح ومشخّص وزینتر از مشابهتهای مبهم است، ومثالهای منظّم شده بیش از مجموعه‌ای از حالات اتّفاقی معتبر است.

پیش از این (در شمارهٔ ۸) حدسی را در خصوص گرانیگاه چهار وجهی بیان کردیم. این حدس با تمثیل تأیید می‌شد، حالات چهاروجهی به حالت مثلّث شبیه

است.می‌توانیم حدس را با آزمودن یک حالت مشابه دیگر یعنی حالت یک مسئلهٔ متجانس (یعنی قطعه خطّ مستقیم با چگالی یکنواخت) تأیید کنیم.

مشابهت میان

قطعه خط   مثلّث   چهاروجهی

از چندین جهت است. یک قطعه خطّ جزئی از یک خطّ است، ومثلّث در سطح قرار دارد، وچهاروجهی در فضا. قطعه خطّ مستقیم ساده‌ترین شکل محدود به یک بعد است ومثلّث ساده‌ترین شکل چند ضلعی و چهاروجهی ساده‌ترین چند وجهی.

قطعه خطّ دوحدّ صفربُعدی (نقاط ابتدا و انتهای آن) دارد و درون آن یک بُعدی است.

مثلّث دارای سه حدّ صفربُعدی و سه حدّ یک بُعدی (سه رأس و سه ضلع) است و درون آن دوبعدی است.

چهاروجهی ٤ حدّ صفربُعدی و ٦ حدّ یک بُعدی و ٤ حدّ دوبُعدی (٤ رأس و ٦ یال و ٤ وجه) دارد و درون آن سه بُعدی است.

این اعداد را می‌توان در یک جدول جمع کرد. ستونهای متوالی مشتمل بر شماره‌های عناصر صفر و یک و دو سه بعدی برای قطعه خطّ و مثلّث و چهاروجهی است:

۲	۱		
۳	۳	۱	
٤	٦	٤	۱

اندکی آشنایی با نماهای یک دو جمله‌ای برای آن کافی است که در این اعداد بخشی از مثلّث پاسکال را مشاهده کنیم.

۱۰. اگر به تجربه دریافته باشیم که چیزهایی که آنها را با یکدیگر قیاس می‌کنیم با یکدیگر ارتباط دارند، «استدلال یا قیاس تمثیلی» ، همچون آنکه پس از این می‌آید ، در نظر ما وزن خاص پیدا می‌کند.

گرانیگاه یک میلهٔ متجانس با گرانیگاه دو نقطهٔ انتهایی آن یکی است.گرانیگاه یک مثلّث متجانس همان گرانیگاه سه رأس آن است. آیا حق نداریم حدس بزنیم که مرکز ثقل یک چهاروجهیِ متجانس منطبق بر مرکز ثقل چهار رأس آن است؟

نیز، گرانیگاه یک میلهٔ متجانس فاصلهٔ میان دو انتهای آن را بر نسبت ۱:۱ تقسیم می‌کند. گرانیگاه یک مثلّث فاصلهٔ میان هر یک از رأسها تا وسط ضلع مقابل آن را بر نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند. آیا حق نداریم حدس بزنیم که گرانیگاه یک چهار

وجهی متجانس فاصلهٔ میان هر رأس و گرانیگاه وجه مقابل آن را برنسبت ۱:۳ تقسیم می‌کند؟

بسیار نامتحمل به‌نظر می‌رسد که حدسهای طرح شدهٔ در این پرسشها نادرست باشد، و نظمی به این زیبایی به هدر برود. این احساس که ترتیب آهنگدار ساده نمی‌تواند فریبنده باشد، و راهنمای مشخّص مکتشف در ریاضیّات و علوم دیگر است، در زبان لاتین به صورتی بیان شده که ترجمهٔ آن چنین است: سادگی لاک و مهر حقیقت است.

[آنچه گذشت بر امور n بعدی قابل تعمیم است. به‌نظر نمی‌رسد که آنچه درمورد سه بُعد اوّلی برای $n=$ ۱،۲،۳ صحیح است پس از آن از درست بودن برای بُعدهای بیشتر ساقط شود. این حدس استدلال و «استنتاج از طریق استقراء» است؛ با آن مجسّم می‌شود که استقراء همیشه بر تمثیل بنا می‌شود. رجوع کنید به **استقراء و استقراء ریاضی**.]

[۱۱. این قسمت را باتوجّه مختصر به حالات بسیار مهمّی که در آنها قیاس تمثیلی به حدّ دقّت اندیشه‌های ریاضی می‌رسد پایان می‌دهیم.

(I) دومجموعه ازاشیاء ریاضی‌مثلاً S وS'، بدان سان با یکدیگر پیوسته‌اند که بعضی‌از روابط میان اشیاءِ Sدر زیر فرمان همان قوانین حاکم بر اشیاءِ مجموعهٔ S'است.

مثال این‌گونه ازتمثیل و مشابهت میان S وS'چیزی است که در شمارهٔ ۱ از آن بحث کردیم؛ S را اضلاع مربّع مستطیل بگیرید وS' را وجوه مکعّب مستطیل.

(II) میان‌اشیاءِ دومجموعهٔ S وS' یک تناظر یک به یک نگاهبان بعضی‌از روابط است. یعنی، اگر رابطه‌ای میان اشیاءِ یک مجموعه صادق باشد، همان رابطه میان اشیاءِ متناظر از مجموعهٔ دیگر نیز صادق است. چنین ارتباطی میان دومجموعه‌گونهٔ دقیقی از تمثیل است، آن را همشکلی(یا همشکلی همه وجهی) می‌نامند.

(III) میان دو مجموعهٔS وS' که روابط مخصوصی با یکدیگر دارند، ممکن است تناظر یک به چند وجود داشته باشد. چنین ارتباطی(که در شاخه‌های گوناگون تحقیقات ریاضی پیشرفته و بالخاصّه در نظریّهٔ گروهها اهمّیّت خاص دارد ونیازمند آن نیست که در اینجا به تفصیل مورد بحث واقع شود) به‌نام همشکلی خوانده می‌شود.

تنظیم و نوشتن معادلات همچون ترجمه کردن از یک زبان به زبانی دیگر است (**علامتگذاری**، ۱). این تشبیه که نیوتون آن را درکتاب **کلّیّات علم حساب** خود آورده،

ممکن است برای روشن کردن ماهیّت بعضی از دشواریها که غالباً معلّم و شاگرد هردو آن را احساس می‌کنند، سودمند باشد.

۱. نوشتن و آراستن معادلات به معنی بیان کردن شرطی که با کلمات بیان شده از راه نمایش دادن آن با علامتها و نمادهای (سمبولهای) ریاضی است؛ ترجمهٔ از زبان معمولی به زبان فرمولهای ریاضی است. دشواریهایی که ممکن است در ساختن معادلات داشته باشیم دشواریهای ترجمه است.

برای ترجمه کردن جمله‌ای از زبان انگلیسی به زبان فرانسه دوچیز لازم است. نخست، باید کاملاً جملهٔ انگلیسی را فهمیده باشیم. دوم، باید با صورتهای بیان خاصّ آن در زبان فرانسه آشنا باشیم. درهنگام بیان کردن شرطی که در صورت مسئله با کلمات آمده به وسیلهٔ نمادهای ریاضی نیز وضعی که پیش می‌آید با وضع ترجمه بسیار شبیه است. نخست، باید کاملاً شرط را فهمیده باشیم. دوم باید با صورتهای بیان ریاضی آشنا باشیم.

اگر بناباشد که یک جملهٔ انگلیسی کلمه به کلمه به فرانسه ترجمه شود، این گونه ترجمه کردن کار آسانی خواهد بود. ولی در زبان انگلیسی ترکیبات و تعبیراتی است که نمی‌توانیم آنها را کلمه به کلمه به زبان فرانسه ترجمه کنیم. اگر در جملهٔ ما از این گونه ترکیبات وجود داشته باشد، کار ترجمه دشوار خواهد شد؛ باید به کلمات جدا از یکدیگر کمتر توجّه کنیم، و بیشتر توجّه خود را به کلّ معنی معطوف داریم؛ پیش از ترجمه کردن جمله باید طرز تنظیم آن را تجدید کنیم.

درساختن و تنظیم معادلات تقریباً چنین عملی صورت می‌گیرد. درحالات آسان، بیان لفظی تقریباً به شکل خودکار به اجزائی متوالی تجزیه می‌شود که هریک از آنها را می‌توان بلافاصله بانمادهای ریاضی نوشت. در حالتهای دشوارتر، شرط اجزائی دارد که نمی‌توانیم آنها را فوری به نمادهای ریاضی ترجمه کنیم. اگر چنین باشد، باید به بیان لفظی کمتر توجّه کنیم و توجّه خود را بیشتر به معنی معطوف سازیم. پیش از آن که به نوشتن فرمولها آغاز کنیم، لازم است ترتیب بیانی شرط را تغییر دهیم، ودرضمن این کار نگاهی نیز به منبع علامتها ونمادهای ریاضی داشته باشیم.

درهمهٔ حالات آسان ودشوار ،باید شرط را بفهمیم، وپاره‌های مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنیم، وبپرسیم: **آیا می‌توانی آنها را بنویسی؟** درحالات آسان، بیدرنگ موفّق می‌شویم که شرط را به اجزایی قابل نوشتن بانمادهای ریاضی تجزیه کنیم. درحالات

دشوار، تقسیم صحیح وشایستهٔ شرط به این اندازه آشکار نیست.

بهتر است توضیحی که پیشتر گذشت، پس از مطالعهٔ مثالهای ذیل دوباره خوانده شود.

۲. دوکمّیّت را که حاصل جمع آنها ۷۸ وحاصل ضرب آنها ۱۲۹۶ است به دست آورید.

صفحهٔ کاغذ را با خطّی قائم به دونیمه تقسیم می کنیم. دریک طرف بیان لفظی را که به اجزاءِ مناسب تقسیم شده باشد می‌نویسیم. در طرف دیگر، مقابل هرجزءِ از بیان لفظی عبارت جبری متناظر باآن را ثبت می کنیم.

اصل در طرف راست صفحه است وترجمهٔ نمادی آن در طرف چپ.

بیان مسئله

به فارسی	به زبان جبری
دوکمّیّت را پیدا کنید که حاصل	$x, \quad y$
جمع آنها ۷۸ وحاصل ضرب آنها	$x + y = 78$
۱۲۹۶ باشد.	$xy = 1296.$

دراین حالت، بیان شفاهی تقریباً خود به خود به بخشهای متوالی تقسیم می‌شود که هریک از آنها را می‌توان بلافاصله به صورت نمادهای ریاضی در برابر آنها نوشت.

۳. عرض و ارتفاع یک منشور مربّع‌القاعده را که حجم آن ۶۳ سانتیمتر مکعّب و وسعت سطح آن ۱۰۲ سانتیمتر مربّع است به دست آورید.

مجهول چیست؟ ضلع x قاعده و ارتفاع y منشور.

داده‌ها چیست؟ حجم ۶۳ سانتیمتر مکعّب و وسعت سطح ۱۰۲ سانتیمتر مربّع.

شرط چیست؟ منشور باقاعدهٔ مربّع به ضلع x و ارتفاع y باید حجمی برابر ۶۳ سانتیمتر مکعّب و وسعت سطحی برابر با ۱۰۲ سانتیمتر مربّع داشته باشد.

قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید. دراینجا دو قسمت وجود دارد، یکی مربوط به حجم و دیگری مربوط به سطح.

هیچ تردیدی برای تقسیم کردن تمام شرط به دو جزء برای ما حاصل نمی‌شود، ولی نمی‌توانیم «بلافاصله» این دو را برروی کاغذ بیاوریم. باید بدانیم که حجم و قسمتهای مختلف سطح منشور چگونه محاسبه می‌شود.ولی اگر به اندازهٔ کافی از هندسهٔ

مربوط به منشور آگاه باشیم، به آسانی می‌توانیم شرط را به شکلی دیگر چنان بیان کنیم که نوشتن معادلات مربوط به آن به آسانی میسّر شود. درطرف راست صفحه صورت دوباره تنظیم یافته و گستردهٔ مسئله را می‌نویسیم که آمادهٔ برای ترجمه شدن به زبان جبری است:

برروی منشور قائمی باقاعدهٔ مربّع،	
ضلع قاعده	x
و ارتفاع قاعده را پیدا کنید.	y
نخست، حجم معلوم است.	63
از وسعت سطح قاعده که مربّع است،	x^2
و ارتفاع آن ،	y
حجم منشور به صورت یک	
حاصل ضرب درمی‌آید.	$x^2y = 63$
دوم، وسعت سطح منشور	
دردست است.	102
این سطح عبارت از دو مربّع	
باضلع x	$2x^2$
و چهار مربع مستطیل، هریک	
باقاعدهٔ x و ارتفاع y	$4xy$
که حاصل جمع آنها تمام سطح	
منشور را به دست می‌دهد.	$2x^2 + 4xy = 102.$

٤. با دردست بودن معادلهٔ یک خط مستقیم ومختصات یک نقطه، نقطه‌ای را پیدا کنید که قرینهٔ آن نقطه نسبت به خطّ داده شده باشد.

این مسئله‌ای از هندسهٔ مسطّحه تحلیلی است.

مجهول چیست؟ نقطه‌ای که مختصّات آن را p و q فرض می‌کنیم.

داده‌ها چیست؟ معادلهٔ یک خطّ راست، مثلاً $y = mx + n$ ، و نقطه‌ای با مختصّاتی مثلاً a و b

شرط چیست؟ نقاط (a, b) و (p, q) نسبت به خطّ $y = mx + n$ قرینهٔ

یکدیگرند.

اکنون به دشواری اصلی می‌رسیم که عبارت از تقسیم کردن شرط به اجزائی است که هریک از آنها را بتوانیم به زبان هندسهٔ تحلیلی ترجمه کنیم. ماهیّت این دشواری را باید خوب بفهمیم. تجزیهٔ شرط به اجزاءِ آن ممکن است از لحاظ منطقی غیرقابل اعتراض باشد و باوجود این به درد حلّ مسئله نخورد. آنچه دراینجا به آن نیاز داریم تجزیهٔ شرط به اجزائی است که باتعبیر تحلیلی متناسب باشد. برای یافتن چنین تجزیه‌ای باید **به تعریف تقارن باز گردیم،** ولی درعین حال یک چشم به منابع هندسهٔ تحلیلی دوخته باشیم. آیا تقارن نسبت به یک خط چه معنی دارد؟ چه نوع روابط هندسی را می‌توانیم به آسانی بازبان هندسه تحلیلی بیان کنیم؟ اندیشهٔ خود را دربارهٔ پرسش اوّل متمرکز می‌سازیم ولی دومی را نیز نباید فراموش کنیم. بدین ترتیب، سرانجام می‌توانیم تجزیه‌ای را که منظور ما دست یافتن به آن بود، به صورت زیر پیدا کنیم:

نقطهٔ داده شده	(a, b)
ونقطهٔ خواسته شده	(p, q)
چنان با یکدیگر مربوطند که نخست، خطّی که آنها را به یکدیگر متّصل می‌کند عمود برخطّ داده شده است	$\frac{q-b}{p-a} = -\frac{1}{m}$
و دوم،نقطهٔ وسط خطّی که دو نقطه را به هم می‌پیوندد بر روی خطّ داده شده است.	$\frac{b+q}{2} = m\frac{a+p}{2} + n.$

حدس خود را امتحان کنید. ممکن است حدس درست باشد، ولی پذیرفتن حدسی آشکار به عنوان حقیقتی به اثبات رسیده ـ که مردمان ابتدایی غالباً چنین می‌کنند ـ کاری ابلهانه است. حدس شما ممکن است غلط باشد. ولی در این صورت نیز آن را از نظر دور کردن ـ چنان که مردمان پرادّعا وفضلفروش غالباً چنین می‌کنند ـ باز کاری ابلهانه است. حدسهایی از گونهٔ خاص شایستهٔ آن است که در معرض آزمایش درآید و جدّی گرفته شود: آنها که برای ما پس از ملاحظهٔ دقیق و فهم

واقعی مسئله‌ای پیدا می‌شود که جدّاً به حلّ آن علاقه پیدا کرده‌ایم. این گونه حدسها معمولاً دست کم بخشی از تمام حقیقت را در بر دارند، ولی به ندرت تمام حقیقت را ثابت می‌کنند. با این همه امید وفرصت آن هست که اگر چنین حدسی به صورت شایسته در معرض تحقیق وملاحظه واقع شود، سبب رسیدن ما به تمام حقیقت باشد.

نادرستی بسیاری از حدسها در پایان کار معلوم شده است ولی همانها نیز در راهبری ما به حدس بهتر سودمند واقع شده‌اند.

هیچ اندیشه‌ای واقعاً بد نیست، مگر این که ناآزموده باشد. آنچه بد است، از اصل نداشتن اندیشه است.

۱. **مَکُنید** . داستان نمونه‌ای دربارهٔ مسترجان جونز بر سر زبانها است. مستر جونز در یک دفتر مشغول خدمت است. امیداندکی به اضافه حقوق داشته ولی‌امیدوآرزوی او، مثل بیشتر امید وآرزوهای دیگر، نقش برآب شده است. حقوق بعضی از همکارانش را اضافه کردند ولی از این اضافه‌ها چیزی نصیب او نشد. مسترجونز نمی‌توانست خاموش وآرام بماند. غصّه خورد وغصّه خورد تا عاقبت به آقای براون مدیر آن دفتر بدگمان شد واو را مسئول بی‌نصیب ماندن خود از اضافه حقوق گمان کرد.

نمی‌توانیم مسترجونز را برای این بدگمانی سرزنش کنیم. اشتباه واقعی در آن بود که پس از رسیدن به چنین گمانی، مسترجونز نسبت به همهٔ علامتهایی که اشاره به جهت مخالف بدگمانی داشت خود را کور نشان داد. قاطعانه اعتقاد داشت که آقای براون دشمن شخصی اوست ورفتارش چنان احمقانه شد که تقریباً در دشمن واقعی ساختنِ براون نسبت به شخص خودش به موفّقیّت رسید.

عیب کار مسترجونز در آن است که رفتاری همچون اغلب ما دارد. وی هرگز باورهای عمده واصلی خود را عوض نمی‌کند. باورهای کوچک را گاه وکاملاً ناگهانی تغییر می‌دهد: ولی هرگز درخصوص باورهای بزرگ وکوچک خودش تا زمانی که آنها را دارد، شکّی برای او پیدا نمی‌شود. هرگز دربارهٔ آنها شک نمی‌کند و آنها را مورد پرسش یا آزمایش همراه با انتقاد وخرده‌گیری قرار نمی‌دهد- مخصوصاً اگر بداند که مقصود از آزمایش انتقادی چیست از آن متنفّر می‌شود.

فرض کنیم مسترجونز تاحدّی در تصوّر خودش حق داشته باشد. سرش به کار خودش گرم است، به وظایف خود در دفتر وخانه عمل می‌کند. برای شک کردن وامتحان کردن وقت زیاد ندارد. در بهترین صورت، می‌تواند تنها معدودی از باورهای

خود را امتحان کند ودر این بیندیشد که چرا دربارۀ کسی شک کند که وقتی برای آزمودن درستی یا نادرستیِ آن شک ندارد؟

شما کاری همچون کار مسترجونز مکنید. مگذارید بدگمانی وحدس شما بدون امتحان چندان رشد کند که قابل ریشه‌کن شدن نباشد. به هر صورت، در موضوعات ومطالب نظری، بهترین اندیشه‌ها با پذیرفته شدن غیرنقدی آسیب می‌بینند وبا امتحان نقّادانه پرورش پیدا می‌کنند.

۲. **یک مثال ریاضی.** در میان همۀ چهار ضلعیهای دارای محیطی معیّن، آن را که بزرگترین مساحت را دارد به دست آورید.

مجهول چیست؟ یک چهار ضلعی.

داده‌ها چیست؟ اندازۀ محیط چهارضلعی.

شرط چیست؟ چهار ضلعی مطلوب باید سطحی بزرگتر از سطح چهار ضلعیهای دیگر دارای همان اندازۀ طول محیط بوده باشد.

این مسئله با مسائل معمولی هندسۀ ابتدایی تفاوت بسیار دارد، بنابراین طبیعی است که در حلّ آن باید از حدس استفاده شود.

محتملاً کدام یک از چهارضلعیهای فرضی می‌تواند سطح بزرگتر داشته باشد؟ ساده‌ترین حدس کدام است؟ شاید شنیده باشیم که درمیان تمام اشکال دارای یک طول محیط، دایره وسعت سطحی بزرگتر ازهمه دارد، حتّیٰ شاید این گمان برای ما حاصل آید که دلیلی برای موجّه نما بودن این گفته وجود دارد. در این اندیشه می‌افتیم که: شکل کدام چهار ضلعی به دایره نزدیکتر است؟ کدام یک در تقارن به آن نزدیکتر است؟

مربّع حدسی بسیار خوب است. اگر این حدس را جدّی بگیریم، ممکن است به این مطلب توجّه پیدا کنیم که منظور از آن چیست. ممکن است جرأت بیان کردن آن را پیدا کنیم: «درمیان چهار ضلعیهای دارای طول محیط معیّن، وسعت سطح مربّع ازهمه بزرگتر است.» اگر به آزمایش این بیان مصمّم شویم، وضع تغییر می‌پذیرد. در آغاز «مسئله‌ای یافتنی» داشتیم. پس از آن که به حدس خود یک صورت بیانی دادیم با یک «مسئله ثابت کردنی» روبه‌رو هستیم، باید این قضیّه بیان شده را ثابت یا رد کنیم.

اگر مسئله‌ای شبیه به این مسئله پیشتر حل نکرده باشیم، وظیفۀ ما به راستی دشوار خواهد بود. **اگر نمی‌توانید مسئلۀ طرح شده را حل کنید، نخست در حلّ مسئله‌ای مرتبط و وابستۀ به آن بکوشید. آیا می‌توانید یک قسمت از مسئله را حل کنید؟** ممکن است به نظر ما

چنان برسد که چون مربّع درمیان چهارضلعیها دارای مزیّتی است، به سبب همین واقعیّت می‌بایستی در میان مربّعهای مستطیل نیز دارای مزیّت باشد.اگر بتوانیم حکمی را که پس این خواهیم آورد به اثبات برسانیم، جزئی از مسئله را حل کرده‌ایم: «درمیان همهٔ مستطیلهای با طول محیط معیّن مساحت مربّع از همه بزرگتر است.»

این قضیّه بیش از قضیّهٔ سابق در دسترس و قابل اثبات به نظر می‌رسد؛ البتّه از آن ضعیفتر است. به هر صورت، باید معنی آن درست بر ما معلوم شود؛ باید جرأت داشته باشیم که آن را با تفصیل دیگر دوباره بیان کنیم.

وسعت سطح یک مستطیل با ضلعهای a و b برابر با ab است، و محیط آن برابر با $2a + 2b$.

یک ضلع از مربّعی که دارای همان طول محیط باشد، $\frac{a+b}{2}$ است، و مساحت آن $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ خواهد بود. این مساحت باید بزرگتر از مساحت مستطیل باشد، یعنی

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$$

آیا این نامساوی درست است؟ همین ادّعا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab.$$

ولی این نامساوی درست است، زیرا که همسنگ است با

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

یا با

$$(a-b)^2 > 0$$

که این نامساوی یقیناً درست است، مگر این که $a=b$ باشد که در آن صورت مستطیل آزمایش شده به شکل مربّع است.

هنوز مسئلهٔ خود را حل نکرده‌ایم، ولی با روبه رو شدن سر راست با حدس خودمان به مقداری پیشرفت نایل شده‌ایم.

۲. **یک مثال غیرریاضی.** دریک جدول کلمات متقاطع باید یک کلمهٔ انگلیسی هفت حرفی را بیابیم که برگهٔ آن چنین است: «دیوارها را درست کن دوباره، پس و پیش.»

مجهول چیست؟ یک کلمه.

داده‌ها چیست؟ طول کلمه که باید هفت حرفی باشد.

شرط چیست؟ در برگه آمده است. کاری است مربوط به دیوار ولی بسیار مبهم.

بنابراین باید برگهٔ معرّفی کلمه را دوباره مورد بررسی قرار دهیم. در این ضمن قسمت آخـــر برگـــه ممکـــن است توجّـــه ما را به خود جلب کـند: «.... دوبـاره، پس وپیش.» **آیا می‌توانید قسمتی از مسئله را حل کنید؟** دراینجا امید آن هست کـه پـیشوند کلمه به خاطر برسد . چون تکرار در این جا مورد تأکید قرار گـرفته، بـه احتمـال قـوی باید کلمه با پیشوند « re » که در زبان انگلیسی نمایندهٔ تـکرار است آغـاز شده بـاشد. این حدسی بسیار آشکار است. اگر به پـذیرفتن آن وسوسه شویم، بـه مـعنی آن تـوجّه خواهیم کرد. کلمهٔ خواسته باید چنین صورتی داشته باشد:

R E - - - - -

آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟ اگر کلمهٔ متقاطع با کـلمهٔ مـورد نظـر چنـان باشد که حرف اوّل کلمهٔ ما باید با R شروع شود، همین R آغاز آن خواهد بود. بـنابراین باید به یافتن کلمهٔ دیگر بپردازیم تا معلوم شود حرفی از آن که بـا حـرف اول کـلمهٔ مـا یکی است R است یا لااقل نمی‌توانیم درآن دلیلی برای R نبودن پیدا کنیم؛ آن گـاه بـه کلمهٔ خودمان باز می‌گردیم. دوباره می‌پـرسیم: شرط چیـست؟ در ضمـن امـتحان وملاحظهٔ مجدّد، تعبیر «... پس وپیش» توجّه ما را به خود جلب می‌کند. آیا ممکن است مقصود آن بوده باشد که کلمه به صورت معکوس نیز خوانده می‌شود وهمان معنی کلمهٔ اصلی را دارد؟ این حدس وضوح کمتر دارد، ولی چنین حـالاتی نیـز وجـود دارد (بـه تجزیه وترکیب مجدّد ۸ نگاه کنید.)

به هر تقدیر، به آزمایش این حدس می‌پردازیم؛ فرض می‌کنیم کـه ایـن حـدس مـا درست باشد. در این صورت کلمهٔ ماباید چنین صورتی داشته باشد:

RE - - - ER.

وعلاوه براین حرف سوم آن باید عیناً همان حرف پـنجم بـاشد، احتمال بیشتر آن است که این حرف غیرمصوت وحرف چهارم وسط کلمه مصوت بوده باشد.

اکنون خواننده به آسانی می‌تواند حدس بزند که آن کـلمه چیـست. اگـر چیـز دیگری به او کمک نکرد، می‌تواند همهٔ مصوّتها را یکی پس از دیگری برای حـرف وسط

کلمه امتحان کند [1] .

حشو. رجوع کنید به **شرط.**

حکمت ضرب المثلها. حل کردن مسائل یکی از فعّالیّتهای بنیادی انسان است. در واقع، بزرگترین قسمت تفکر خودآگاهانهٔ ما به مسائل مربوط می‌شود. هنگامی که تسلیم افکارآمیخته به خیال نشده باشیم، اندیشه‌های ما متوجّه به هدفی است، درصدد یافتن وسیله‌ای برای حل کردن یک مسئله هستیم.

بعضی از اشخاص در رسیدن به هدفهای خود که حل کردن مسائل است، کامیابی بیشتر دارند، وبعضی دیگر کمتر. این تفاوت موردتوجّه قرار گرفته ودر آن بحث وتحقیق شده است، وچنان می‌نماید که بعضی از ضرب‌المثلها جوهر این رسیدگی وتحقیق را نشان می‌دهد. به هر صورت، ضرب المثلهای فراوانی وجود دارد که به صورتی شگفت‌انگیز روش حلّ مسائل ومشکلات وبینش عقل سلیم که باید در آن به کار رود وحیله‌ها وتدبیرهای متعارفی وخطاها واشتباهاتی که در این راه پیش می‌آید، بیان شده است. در این ضرب‌المثلها اشاراتی ظریف وزیرکانه آمده، ولی پیداا ست که نظامی‌علمی وتهی از عدم انسجامها وتاریکیها در آنها مشاهده نمی‌شود. برخلاف، بسیاری از آنها را می‌توان یافت که اندرزهای کاملاً مخالف با اندرزهای دیگر ضرب المثلها می‌دهند، وبه این ترتیب وسعت دامنهٔ فراوانی برای تعبیر وتفسیر فراهم می‌آید. اگر ضرب‌المثلها را منبع معتبر وقابل استنادی از فرزانگی وحکمتی بدانیم که به صورت کلّی قابل تطبیق وپیروی است، کاری ابلهانه کرده‌ایم، ولی حیف است که از توصیف روشهای راهیابانه‌ای که از ضرب‌المثلها ممکن است به دست آید غافل بمانیم.

جمع آوردن وگروهبندی کردن ضرب‌المثلهایی که مربوط به طرح نقشهٔ کار وجستجوی وسایل وانتخاب خطّ عمل وبه صورت خلاصه ضرب‌المثلهایی که وابستهٔ به حلّ مسائل است، کاری جالب توجّه است. از جای خاصّی که نوشتن این‌گونه مطالب لازم دارد، تنها قسمت کوچکی در کتاب حاضر در اختیار ما قرار دارد؛ بهترین کاری که می‌توانیم بکنیم، نقل کردن معدودی از ضرب‌المثلها است که مراحل عمدهٔ حلّ

۱ـ عبارت نمایندهٔ برگهٔ یافتن کلمه در متن به این صورت است:
Do the walls again, back and forth.
وکلمهٔ جواب repaper یعنی تجدید کاغذ دیواری دیوارها است. مترجم

مسائل را که در فهرست ما مورد تأکید قرار گرفته است، ودر بخشهای ٦و ١٤ وجاهای دیگر دربارهٔ آنها بحث کرده‌ایم، در برداشته باشد. ضرب‌المثلهای نقل شده را با حروف سیاه ثبت کرده‌ایم.

۱. نخستین کاری که برای مسئلهٔ خود باید بکنیم، فهمیدن آن است : **هر کس که بد بفهمد، بد جواب می‌دهد.** باید به صورتی روشن ببینیم که می‌خواهیم به چه هدفی برسیم: **پیش از آغاز به پایان بیندیشید.** این قطعه اندرزی بسیار قدیمی است، ولی با کمال تأسّف باید گفت که همه کس به این اندرز خوب بااعتنا نگاه نمی‌کند، ومردمان غالباً بدون آن که به صورت لازم وشایسته هدفی را که می‌خواهند به آن برسند فهمیده باشند، به جستجو وسخن گفتن وحتّیٰ مشاجره کردن با دیگران در آن باره می‌پردازند. **آدم دیوانه آغاز را در نظر می‌گیرد وآدم عاقل به پایان می‌نگرد.** اگر پایان در ذهن ما روشن وآشکار نباشد، به آسانی ممکن است از راه حلّ مسئله دور شویم وآن را رها کنیم. **مرد حکیم در پایان آغاز می‌کند، ومرد ابله در آغاز به پایان می‌رسد.**

ولی تنها فهمیدن مسئله کافی نیست، بلکه باید میل حل‌کردن آن در ما وجود داشته باشد. بدون داشتن میلی شدید به حلّ مسئلهٔ دشوار، بخت در رسیدن به جواب آن یار ما نخواهد شد. **هر جا اراده باشد راه هم هست.**

۲ . طرح یک نقشه، و اندیشهٔ درستی برای عمل شایسته داشتن، دستاورد مهمّی در حلّ مسئله است.

یک اندیشه و فکر نیکو یک بخت مساعد و یک الهام و یک موهبت الاهی است که باید شایستگی آن را پیدا کنیم: **سعی و کوشش مادر بخت نیکو است. پایمردی و ثبات قدم شکار را از پا درمی‌آورد. یک درخت بلوط با ضربهٔ یک تبر فرو نمی‌افتد. اگر بار اوّل موفّق نشدید، تلاش کنید ، مکرّر تلاش کنید.** ولی تنها تلاشهای مکرر کافی نیست، بلکه باید وسایل را تغییر دهیم و نوع آزمایش خود را عوض کنیم. **با همهٔ کلیدهای دستهٔ کلید آزمایش کنید. پیکانها از همه‌گونه چوب ساخته شده‌اند.** باید آزمایش و تلاش خود را با اوضاع و احوال تطبیق دهیم. **به محض آنکه باد وزید، بادبان را آماده کن. برش جامهٔ خود را با پارچه‌ای که داری موافق ساز. اگر نمی‌توانیم کاری را که دوست داریم انجام دهیم، باید چنان کنیم که می‌توانیم.** اگر شکست خوردیم، باید چیز دیگری را بیازماییم. **انسان عاقل فکر خود را عوض می‌کند، و یک دیوانه هرگز چنین نمی‌کند.** حتّیٰ لازم است از همان آغاز کار آمادهٔ یک شکست احتمالی نقشه و طرح خود باشیم و طرح دیگری در دسترس داشته باشیم. **برای کمان خود دو زه**

داشته باش. البتّه امکان آن هست که این‌گونه عوض‌کردن طرح را بیش از اندازهٔ لازم انجام دهیم. در آن صورت در معرض این طنز قرار می‌گیریم: بساز و خراب کن، روز به اندازهٔ کافی دراز است. اگر هدف را از نظر دور نداریم، کمتر دچار اشتباه خواهیم شد. **هدف ماهیگیری قلّاب انداختن نیست بلکه گرفتن ماهی است.**

سخت در آن می‌کوشیم تا چیز سودمندی از حافظهٔ خود بیرون بیاوریم ، با وجود این در اغلب اوقات هنگامی که اندیشه‌ای سودمند خودرا عرضه می‌دارد، به سبب آنکه ناآشکار است قدر آن را نمی‌دانیم. شخص ماهر و کاردان اندیشه‌هایی بیش از شخص ناشی و تازه‌کار ندارد، ولی قدر آنچه را که دارد خوب می‌داند و آن را بهتر به کار می‌برد. **مرد فرزانه فرصتهایی بیش از آنچه می‌یابد برای خود فراهم می‌آورد. مرد فرزانه از هرچه به دستش برسد برای خود افزاری می‌سازد. مرد فرزانه فرصت را به بخت نیکو تبدیل می‌کند.** یا، مزیت کارشناس در آن است که وی پیوسته چشم به فرصتها دارد. **یک چشم به سوی فرصت عمده داشته باش.**

۳۰ باید اجرای نقشهٔ خود را در لحظهٔ درست و درآن هنگام که رسیده و آماده است آغاز کنیم، نه پیش از آن. بدون ملاحظه نباید آغاز کنیم. **پیش از جهیدن نگاه کن. پیش از اعتمادکردن آزمایش کن. یک تأخیر عاقلانه راه را هموار می‌کند.** از سوی دیگر، نباید بیش از اندازه درنگ کنیم. **اگر می‌خواهید کشتی شما با خطر رو به رو نشود، باید هرگز به دریا نروید. محتملترین را انجام بده و بهترین را متوقّع باش. وسیله را به کار بر و خدا نعمت و برکت خواهد داد.**

باید داوری خود را برای تعیین لحظهٔ مناسب به کار اندازیم. و در اینجا هشداری به موقع وجود دارد که به رایجترین اشتباه و شایعترین شکست داوری ما اشاره می‌کند: **آنچه را که خواستار آنیم به زودی باور می‌کنیم.**

نقشهٔ ما معمولاً کلّیات را در برمی‌گیرد. باید خود متقاعد شویم که جزئیات با طرح کلّی سازگار است یا نه، و به همین‌جهت لازم است هر جزئی را پس از جزئی دیگر به دقّت آزمایش کنیم. **از نردبان پلّه، پلّه باید بالا رفت. خرده خرده بدان سان که گربه شکار خود را می‌خورد. درجه به درجه کارت را انجام بده.**

در ضمن اجرای نقشه باید مواظب آن باشیم که گامها به ترتیب صحیح برداشته شود، که دراغلب موارد درست ترتیبی برعکس ترتیب اختراع دارد. **آنچه دیوانه درپایان کار انجام می‌دهد، عاقل در آغاز کاربه آن می‌پردازد.**

۴. نگریستن به عقب پس از حلّ مسئله مرحله‌ای مهمّ وآموزنده از کار است.آن کس که دوباره فکر نکند، اصلاً فکر نکرده است. فکرهای دوم بهتر است.

با آزمایش مجدّد حلّ مسئله، ممکن است تأییدی اضافی برای نتیجه به دست آوریم. باید به مبتدیان گفت که این تأیید اضافی ارزشمند است، ودو دلیل بهتر از یک دلیل است. **ایمنی درسوارشدن بادو لنگر است.**

۵. به هیچ وجه بحث وتشریح ضرب‌المثلهای مربوط به حلّ مسائل را به پایان نرسانیده‌ایم. ولی ضرب‌المثلهای دیگری که بتوانیم نقل کنیم کمتر مشتمل بر موضوعات تازه است، وبیشتر صورتهای دیگری از مطالبی است که تاکنون نقل کرده‌ایم. بعضی ازجنبه‌های پیشرفته‌تر وتنظیم یافتهٔ فرایند حلّ مسائل به ندرت می‌تواند درچشم انداز حکمت ضرب‌المثلها واقع شود.

درتوصیف وبیان جنبه‌های علمی ومنظّم حلّ مسائل، نگارنده دراین جا وآن جا کوشید تانقش خاصّ ضرب‌المثلها راتقلید کند که کار آسانی نیست. و پس از این به نقل معدودی ضرب‌المثلهای «ترکیبی» می‌پردازیم که بیان کنندهٔ ایستارهای تا اندازه‌ای پیشرفته وعالمانه است.

هدف وسیله‌ها را پیشنهاد می‌کند.

پنج بهترین دوست شما اینها است: چه چیز، چرا، چه جا، چه وقت و چگونه. بپرسید چه چیز، چرا، چه جا، چه وقت و چگونه - و هنگامی که نیاز به اندرز دارید از هیچ کس دیگر چیزی نپرسید.

حل کنندهٔ باهوش مسئلهغالباً از خود چیزهایی می‌پرسد که شبیه پرسشهای مندرج در فهرست است، یا پس از شنیدن این پرسشها از کس دیگر، کار برد درست آنها راخود کشف می‌کند. ممکن است اصلاً آگاهی از این امر نداشته باشد که سؤال واحد را تکرار می‌کند. یا سؤال حکم جانور دستاموز وی را پیداکرده است؛ می‌داند که درفلان مرحله از حلّ مسئله پرسش عبارت از جزئی از ایستار خاصّ ذهنی او است وبا طرح سؤال درست آن ایستار شایسته را برای خود به وجود می‌آورد.

حل کنندهٔ باهوش پرسشها وپیشنهادهای فهرست ما را پیدا می‌کند. به خوبی توضیحات ومثالهای مجسّم کنندهٔ یک پرسش رامی‌فهمد وممکن است جای استعمال خاصّ فلان سؤال رابه حدس پیداکند، ولی نمی‌تواند به فهم واقعی دست یابد مگر آن

که پس از روبه روشدن با روشی که پرسش می‌کوشد تا آن روش را برای کار او مقرّر دارد، واز راه آزمودنِ سودمندی آن، بتواند کار برد مناسب وصحیح پرسش را خود اکتشاف کند.

حل کنندهٔ هوشمند مسئله آمادهٔ آن است که همهٔ پرسشهای فهرست را ازخود بپرسد، ولی هرگز تا پیش از آن که باملاحظهٔ دقیق مسئله‌ای که در برابر خود دارد و با داوری شخصی بدون تعصّب خویش به طرح سؤال برانگیخته شده باشد، به این کار اقدام نخواهد کرد. درواقع، او خود باید تشخیص بدهد که درکجا وضع حاضر به اندازهٔ کافی شبیه با وضعی است که درآن سؤال باکامیابی طرح شده ودرکجا چنین نیست.

حل‌کنندهٔ باهوش بیش از هرچیز در آن می‌کوشد که مسئله را هرچه کاملتر وروشنتر بفهمد. ولی فهمیدن تنها کافی نیست، لازم است تمام توجّه خود را برآن متمرکز سازد، ومشتاقانه خواهان حلّ مسئلهٔ موردنظر باشد. اگر نتّواند میل واقعی برای این کار در خود پدید آورد، بهترین کار آن است که دست از آن بکشد. راز کامیابی کامل در وارد کردن تمام شخصّیت خودتان در مسئله‌ای است که می‌خواهید آن را حل کنید.

خوانندهٔ با هوش یک کتاب ریاضی خواستار دو چیز است:
نخست، می‌خواهد این را بداند که گام کنونی برهان درست است.
دوم، می‌خواهد از هدف گام کنونی آگاه شود.

مستمع با هوش یک سخنرانی یا درس ریاضی نیز دارای چنین خواستها است. اگر نتواند بفهمد که گام کنونی برهان درست است و حتّیٰ گمان برد که محتملاً نادرست است، ممکن است اعتراض کند و گوینده را مورد پرسش قرار دهد. اگر نتواند در گام برداشته شده هدفی را تشخیص دهد، یا دلیلی برای آن گمان نکند، معمولاً نمی‌تواند حتّیٰ صورتی برای اعتراض پیدا کند، و به همین جهت به اعتراض نمی‌پردازد بلکه دچار شگفتی و ناراحتی می‌شود و رشتهٔ برهان را از دست می‌دهد.

معلّم هوشمند و مؤلّف باهوش‌کتاب درسی باید این نکته را به خاطر داشته باشد. درست نوشتن و درست سخن گفتن قطعاً لازم است، ولی کافی نیست. یک فرعِ نتیجهٔ گرفته شده که در کتاب یا بر تخته سیاه کلاس به درستی عرضه شده، در صورتی که هدف گامهای برداشته در آن غیر قابل فهم باشد، و شنونده یا خواننده نتواند بفهمد که

چگونه امکان یافتن چنین برهانی پیدا می‌شود، و از آن به راهی برای این که خود بتواند چنین برهانی برای خود بسازد نرسد، امکان آن هست که دور از دسترس و غیر آموزنده باشد.

پرسشها و پیشنهادهای فهرست ما می‌تواند برای مؤلّف و معلّمی در تأکید کردن بر روی هدف و انگیزه‌های برهان سودمند باشد. و از این لحاظ مخصوصاً این پرسش مفید واقع می‌شود که : **آیا از همهٔ داده‌ها استفاده کردید؟** معلّم یا مؤلّف کتاب می‌تواند با طرح این سؤال دلیل خوبی برای در نظر گرفتن آن داده که حل کنندهٔ مسئله از به کار بردن آن غافل مانده است ارائه کند. خواننده یا شنونده نیز می‌تواند همین سؤال را برای فهمیدن دلیل این که چرا معلّم یا مؤلّف فلان عنصر را به کار برده است طرح کند، و احتمال آن می‌رود که با پرسیدن این سؤال بتواند این گام از برهان را برای خود کشف کند.

دراین جا مسئله‌ای وابستهٔ به مسئلهٔ شما وجود دارد که پیشتر حل شده است. این خبر خوشی است، مسئله‌ای که راه حلّ آن دانسته است و ارتباطی با مسئلهٔ حل کردنی ما دارد، قطعاً مایهٔ دلخوشی است و اگر این وابستگی نزدیک و راه حلّ ساده باشد، دلخوشی حاصل از توجّه به آن بیشتر خواهد شد. احتمال زیاد برای آن وجود دارد که چنین مسئله‌ای در حلّ مسئلهٔ حاضر سودمند واقع شود.

وضعی که در اینجا از آن بحث می‌کنیم وضع نمونهٔ برجسته و مهمّی است. برای این که به خوبی متوجّه آن شویم، بهتر است آن را با وضعی که هنگام کار کردن با یک مسئله کومکی با آن روبه‌رو هستیم مقایسه کنیم. در هر دو حالت، هدف ما حل کردن یک مسئلهٔ A است و مسئلهٔ B را به این امید وارد کار کرده‌ایم که از آن سودی برای حلّ مسئله A به دست آوریم. تفاوت در ارتباط ما با B است. در اینجا به آن کامیاب شدیم که یک مسئلهٔ قدیمی را که از حلّ آن آگاهی داریم به خاطر آوریم، ولی هنوز نمی‌دانیم که آن را چگونه به کار بریم. در آنجا، به آن توفیق یافتیم که مسئلهٔ تازه B را اختراع کنیم؛ می‌دانیم (یا به شدّت گمان داریم) که چگونه B را به کار بریم، ولی هنوز نمی‌دانیم که چگونه آن را حل کنیم. مشکل ما دربارهٔ B همهٔ تفاوت میان دو وضع را به وجود می‌آورد. هنگامی که این دشواری از میان برداشته شود، B را در هر دو حالت یکسان به کار می‌بریم؛ باید نتیجه یا روش را به کار بریم (بدان سان که در

مسئله کومکی، ۳ گفته شد)، و، اگر بختیار باشیم، امکان آن هست که از نتیجه و روش هردو استفاده کنیم. در وضعی که اینجا ملاحظه می‌شود از حلّ B به‌خوبی آگاهیم ولی هنوز نمی‌دانیم که چگونه از آن بهره گیری کنیم. بنابراین، چنین می‌پرسیم: ***آیا می‌توانید آن را به‌کار برید؟ آیا می‌توانید نتیجهٔ آن را به‌کار برید؟ آیا می‌توانید روش آن را به‌کار برید؟***

نیّتِ به کار بردن مسئلهٔ حل شدهٔ سابق در طرز تصوّر و دریافت ما از مسئلهٔ حل‌کردنی تأثیر می‌گذارد. با کوشش در وابسته کردن دو مسئلهٔ تازه و کهنه به یکدیگر، بعضی از عناصر مهمّ مسئلهٔ کهنه را وارد مسئلهٔ نو می‌کنیم. مثلاً، مسئلهٔ ما تعیین کره‌ای است که بر چهار وجهی داده شده محیط شده باشد. این یک مسئله از هندسهٔ فضایی است. باید به‌خاطر بیاوریم که پیش از آن مسئله‌ای مشابه را از هندسهٔ مسطّحه با پیدا کردن دایرهٔ محیطی یک مثلّث حل کرده‌ایم. سپس به یاد می‌آوریم که در مسئلهٔ قدیمی هندسهٔ مسطّحه عمودهای منصّف اضلاع مثلّث را به کار می‌گرفتیم. وارد کردن چیزی مشابه آن در حلّ مسئلهٔ کنونی معقول به‌نظر می‌رسد. بدین ترتیب ممکن است به آنجا برسیم که به‌عنوان عناصر کومکی متناظر، سطوح عمود بر وسط یالهای چهار وجهی را مورد استفاده قرار دهیم. پس از این اندیشه به آسانی می‌توانیم بر روی حلّ مسئله هندسهٔ فضایی، به پیروی از راه حلّ مشابه آن در هندسهٔ مسطّحه، به‌کار بپردازیم.

مثالی که ذکر شد نمونه‌ای برجسته است. درنظر گرفتن مسئله‌ای که پیشتر حل شده بود و با مسئلهٔ حل کردنی ارتباط و وابستگی داشت، ما را به وارد کردن عناصری کومکی برانگیخت، و داخل شدن این عناصر کمکی مناسب این امکان را برای ما فراهم آورد که مسئلهٔ وابسته را با بهره‌گیری کامل از آن در حلّ مسئلهٔ کنونی مورد استفاده قرار دهیم. هنگامی به چنین اندیشه می‌افتیم که، با احتمال ممکن شمردن استعمال مسئلهٔ وابستهٔ حل شدهٔ سابق در حلّ مسئله فعلی، چنین می‌پرسیم: **آیا می‌توانید یک عنصر معاون که استعمال آن را ممکن سازد وارد کنید؟**

در اینجا قضیّه‌ای مربوط به قضیّهٔ شما هست که پیشتر آن را ثابت کرده‌اید. برای این روایت از ملاحظه‌ای که موردبحث قرار گرفت، مثالی در بخش ۱۹ آمده است.

دکارت، رنه (۱۶۵۰-۱۵۹۶)، ریاضیدان و فیلسوف بزرگ فرانسوی است که نقشهٔ آن درسر داشت که روشی کلی برای حل مسائل به دست دهد، ولی کتاب **قواعد توجیه**

فکر خود را ناتمام گذاشت. قطعاتی از این کتاب وی که پس از مرگ او از روی اوراق دستنوشتهٔ وی به دست آمد و به چاپ رسید، مشتمل است بر موادّی در بارهٔ حلّ مسائل که بیشتر و جالبتر از آن است که در کتاب شناخته شده ترش به نام گفتار دربارهٔ روش آمده است، هرچند «گفتار» به احتمال زیاد پس از «قواعد» نوشته شده بوده است. سطرهای ذیل از دکارت ظاهراً منشأ و خاستگاه «قواعد» را نشان می‌دهد: «هنگامی که جوان بودم، و چیزهایی دربارهٔ اختراعات هوشمندانه می‌شنیدم، درصدد آن برآمدم که حتّیٰ بدون داشتن کتابهای نویسندگان آن اختراعات، از پیش خود اختراع کنم. با این کار، رفته رفته دریافتم که بعضی از قاعده‌ها را به کار می‌برم».

راهیابی (heuristic) یا (heuretic) نام شاخه‌ای از تحقیق در منطق یا فلسفه یا روانشناسی بوده که حدود آن به خوبی تحدید نشده و کمتر به صورت تفصیلی از آن سخن رفته و چنان است که امروز به دست فراموشی سپرده شده است. هدف راهیابی تحقیق در روشهای اختراع و اکتشاف است. نشانه‌های معدودی از این بحث را می‌توان در نوشته‌های شارحان اوقلیدس ملاحظه کرد، مخصوصاً فقره‌ای از **پاپوس** از این لحاظ جالب توجّه است. مشهورترین کوششها برای تأسیس دستگاهی از راهیابی از **دکارت** و **لایبنیتس** است که هر دو از ریاضیدانان وفلاسفهٔ بزرگ بوده‌اند. برنارد **بولتسانو** گزارشی قابل توجّه ومفصّل دربارهٔ آن داده است. کتابچهٔ کوچک حاضر کوششی برای زنده کردن راهیابی به صورتی نوین است. به **راهیابی نوین** رجوع کنید.

راهیابی نوین در آن می‌کوشد که فرایند حلّ مسائل ومخصوصاً **عملیّات ذهنی وعقلی سودمند** در این فرایند راچنان که شایسته است قابل فهم سازد. برای تحقیق جدّی در راهیابی باید زمینه‌های منطقی و روانشناختی آن در نظر گرفته شود، ودراین پژوهش آنچه نویسندگان قدیمی همچون **پاپوس** و **دکارت** و **لایبنیتس** و **بولتسانو** در این خصوص گفته‌اند نباید درمعرض غفلت قرار گیرد ولازم است بیطرفانه دربارهٔ آنها قضاوت شود. آزمودگی درحل کردن مسائل ونیز آزمودگی در توجّه داشتن به دیگران که مشغول حلّ مسئله هستند، می‌بایستی شالوده‌ای باشد که راهیابی برآن بنا می‌شود. در این مطالعه وتحقیق نباید از هیچ نوع ازمسائل غافل بمانیم که ممکن است از این راه سیماهای مشترکی در ضمن پرداختن به هر گونه مسئله دسترس پیدا کنیم؛ باید به

سیماهای کلّی توجّه داشته باشیم و از این لحاظ کار خود رامستقلّ ازموضوعی که مسئله باآن ارتباط پیدا می‌کند انجام دهیم. تحقیق در راهیابی هدفهایی «عملی» دارد، فهم بهتر عملیّات ذهنی و فکری که در حلّ مسائل سودمند واقع می‌شود، می‌تواند تأثیر خوبی درامر تعلیم وبالخاصّه در آموزش ریاضیّات داشته باشد.

کتاب حاضر نخستین تلاش برای متحقّق ساختن این برنامه است. اکنون در این باره به بحث خواهیم پرداخت که چگونه مواد گوناگون ومقاله‌های این واژه‌نامه با برنامهٔ موردنظر توافق دارد.

۱.فهرست ما در حقیقت فهرستی از آن عملیات فکری و عقلی است که معمولاً در حلّ مسائل سودمند واقع می‌شود، پرسشها و پیشنهادهای فهرست شده اشاره به چنین عملیّات است. بعضی از این عملیّات بار دیگر در بخش دوم کتاب حاضر توصیف شده است، و از بعضی از آنها به صورت کاملتر دربخش اوّل کتاب به صورت کامل بحث کرده‌ایم.

برای کسب اطّلاعات بیشتر دربارهٔ پرسشها و پیشنهادهای فهرست، خواننده باید به پانزده مادّه و مقاله‌ای از واژه‌نامه رجوع کند که عناوین آنها در اوّلین جمله‌ها از پانزده بند فهرست آمده است:**مجهول چیست؟ آیا ممکن است شرط را تأمین کند؟ یک شکل رسم کنید...آیا می‌توانید از نتیجه استفاده کنید؟** خواننده‌ای که خواستار اطّلاعاتی در بارهٔ مادّهٔ خاصّی از فهرست باشد، باید به اوّلین کلمات‌بندی که آن مادّه در آن آمده نگاه کند و سپس به آن مادّه در واژه‌نامه بازگردد که آن کلمات عنوان آن است. مثلاً پیشنهاد «**به تعریفها رجوع کنید**»دربندی از فهرست آمده که جمله اوّل آن چنین است:آیا می‌توانید مسئله را دوباره بیان کنید؟ خواننده در ذیل این عنوان ارجاعی به **تعریف** مشاهده می‌کند که در آن مادّهٔ پیشنهاد مورد بحث در معرض توضیح قرار گرفته است.

۲.فرایند حلّ مسائل فرایندی پیچیده است که چندین جنبهٔ مختلف دارد. در دوازده مقاله و مادّهٔ اصلی این واژه‌نامه، بعضی از این جنبه‌ها با مقداری تفصیل مورد بحث قرار گرفته است، در آنچه پس از این می‌آید به عناوین آنها اشاره خواهیم کرد.

هنگامی که به شدّت کار می‌کنیم، با هوشیاری از پیشرفت کار خودمان آگاهی داریم، اگر این پیشرفت سریع باشد برخود می‌بالیم و شاد می‌شویم، و اگر کند باشد افسردگی پیدا می‌کنیم. آیا چه چیز برای **پیشرفت و دستاورد** در حلّ مسائل اساسی است؟ مادّه‌ای که از این پرسش بحث می‌کند غالباً در قسمتهای دیگر واژه‌نامه مورد

ارجاع قرار گرفته و باید هر چه زودتر خوانده شود.

در ضمن کوشش برای حلّ یک مسئله، نوبه به نوبه جنبه‌های متفاوت آن را مورد **ملاحظه قرار** می‌دهیم، و آن را پیوسته در فکر خود زیر و رو می‌کنیم؟ **تغییر شکل مسئله** برای کار ما جنبهٔ اساسی دارد. ممکن است مسئله را از راه **تجزیه و ترکیب مجدّد** عناصر آن، یا از طریق بازگشت به **تعریف** بعضی از اصطلاحات تغییر دهیم، یا این کار را از راه تدبیرهای عمدهٔ **تعمیم** و **تخصیص** و **تمثیل** به انجام برسانیم. تغییر مسئله ممکن است ما را به اکتشاف یک **مسئلهٔ کومکی** که بیشتر در دسترس قرار گرفته است رهبری کند.

باید با کمال دقّت میان انواع مسئله تفاوت قائل شویم:**مسئلهٔ‌یافتنی**،**مسئلهٔ ثابت کردنی**.فهرست ما بیشتر به «مسائل یافتنی» اختصاص دارد. باید آن را مورد تجدیدنظر قرار دهیم و بعضی از پرسشها و پیشنهادهای آن را تغییر دهیم تا بر «مسائل ثابت کردنی» نیز قابل تطبیق باشد.

در هرگونه مسئله، ولی مخصوصاً در مسائل ریاضی که چندان ساده نباشد، **علامتگذاری**و **اشکال**هندسی کومکی بزرگ و غالباً ضروری به شمار می‌رود.

۳.فرایند حلّ مسئله جنبه‌های متعدّد دارد که به بعضی از آنها در این کتاب اصلاً توجّه نداشته‌ایم و دربارهٔ بعضی دیگر تنها به اختصار سخن گفته‌ایم. به نظر من، حق داریم که در یک عرضه داشت کوتاه، از ذکر نکاتی که دقیق و ظریف به نظر می‌رسند یا بسیار فنّی هستند و یا در بارهٔ آنها اختلاف نظر وجود دارد، صرف‌نظر کنیم.

استدلال راهیابانهٔ موقّتی که تنها موجّه نما به نظر می‌رسد، در اکتشاف راه‌حلّ مسئله حایز اهمّیت است، ولی نباید آن را به جای دلیل وبرهان بگیرید؛ می‌توانید حدس بزنید، ولی لازم است که **حدس خود را امتحان کنید.** طبیعتِ براهین راهیابانه در مادّهٔ **نشانه‌های پیشرفت** آمده، ولی بحث دراین باره بازهم می‌تواند ادامه پیدا کند.

ملاحظه کردن بعضی از الگوهای منطقی درموضوع ما حایز اهمّیت است، ولی چنان شایسته می‌نمود که از گنجاندن مقاله‌ای فنّی خودداری کنیم. تنها دو مقاله به صورت غالب اختصاص به جنبه‌های روانشناختی دارد که یکی **تصمیم، امید، کامیابی است** ودیگری **کار ضمیر ناخودآگاه.**

ملاحظه‌ای فرعی در بارهٔ روانشناسیِ جانوری آمده است، رجوع کنید به **کار کردن رو به عقب.**

دراین باره تأکید شده است که همه‌گونه مسائل، مخصوصاً **مسائل عملی**، وحتی **معمّاها**، درچشم‌انداز راهیابی قرار گرفته‌اند. نیز دراین خصوص تأکید شده است که **قواعد اکتشاف** درآن سوی چشم‌انداز پژوهش جدّی قرار گرفته است؛ این امر، از قرار معلوم، از آغاز جامعهٔ بشری رواج داشته، وچنان می‌نماید که خلاصه وجوهر بخشهای باستانی در **حکمت ضرب‌المثلها** محفوظ مانده است.

٤. معدودی مقاله دربارهٔ مسائل خاصّ گنجانده شده وبعضی از مقالات که جنبهٔ عام داشته بسط یافته است، بدان جهت که آنها یا قسمتی از آنها می‌توانسته است درنظر استادان یا دانشجویان مورد توجّه خاص قرار گیرد.

مقالاتی به بحث درآن مسائل مربوط به روش اختصاص یافته است که در ریاضیّات مقدّماتی مهمّ است، همچون: **پاپوس و کار کردن رو به عقب** (که پیشتر در ۳ به آن اشاره شد) و**برهان خلف واثبات غیر مستقیم** و **استقراء واستقراء ریاضی** و **تنظیم ونوشتن معادلات** و **آزمون با بعد** و **اثباتها برای چیست؟** معدودی از مقالات بیشتر به معلّمان اختصاص دارد، همچون **مسائل عادی** و **تشخیص**، ومقالاتی دیگر بیشتر مخصوص دانشجویانی است که بلند پروازی آنان از حدّ متوسّط بیشتر است، همچون **حل‌کنندهٔ باهوش مسئله**و **خوانندهٔ باهوش**و **ریاضیدان آینده**.

دراین جا باید به این مطلب اشاره شود که گفتگوی میان استاد وشاگردانش که در بخشهای ۸ و ۱۰ و۱۸ و۱۹و ۲۰ ودر مقالات گوناگون این واژه نامه آمده ممکن است همچون سرمشقی نه تنها برای معلّمی که می‌خواهد راهنمای شاگردانش باشد بلکه برای دانشجویی باشد که می‌خواهد خود به تنهایی مسئله را حل کند. تفکّر واندیشیدن را همچون «گفتگویی عقلی وذهنی» وگونه‌ای از مکالمهٔ میان شخص متفکّر وخودش توصیف کردن، توصیفی نادرست نیست. مکالمهٔ مورد نظر پیشرفت حلّ مسئله را نشان می‌دهد؛ حل کنندهٔ مسئله، در ضمن سخن گفتن با خود، می‌تواند در خطّ مشابهی پیشروی کند.

۵. قصد ما آن نیست که در بارهٔ همهٔ عناوینی که باقی مانده است چیزی بگوییم؛ تنها به گروههای معدودی از آنها اشاره خواهیم کرد.

در بعضی از مقاله‌ها ملاحظاتی در بارهٔ تاریخ موضوع بحث ما آمده است، همچون: **دکارت** و **لایبنیتس** و**بولتسانو**و **راهیابی** و **اصطلاحات کهنه ونو** و **پاپوس** (از این آخری در شمارهٔ ٤ بحث شد.)

معدودی از مقالات به توضیح اصطلاحات فنّی اختصاص دارد: **شرط** و**قضیّهٔ**

فرعی.

بعضی از مقالات تنها جنبهٔ ارجاعی دارد (آنها را در فهرست مندرجات با علامت ستاره‌ای که در پایان آنها گذاشته شده ممتاز ساخته‌ایم).

۶. هدف راهیابی کلّیّت است و می‌خواهد روشها را مستقلّ از موضوع آنها مورد بحث قرار دهد و آنها را در هرگونه مسئله به کاربرد ولی در عرضه‌داشت حاضر منحصراً مسائل مربوط به ریاضیّات مقدّماتی به عنوان مثال ذکر شده است. نباید از نظر دور داشت که این یک محدودیّت است ولی امیدواریم که این محدودیّت آسیبی جدّی به روش بحث و تحقیق ما نرسانده باشد. درواقع، مسائل ریاضیّات مقدّماتی همه‌گونه تنوّع را عرضه می‌دارند، و مطالعهٔ راه‌حلهای آنها در دسترس و جالب توجّه است. علاوه‌براین، هرچند مسائل غیرریاضی به ندرت به عنوان مثال آمده، هرگز آنها را به صورت کامل فراموش نکرده‌ایم. مسائل بسیار پیشرفتهٔ ریاضی هرگز به شکل مستقیم نقل نشده ولی زمینهٔ حقیقی عرضه داشت حاضر را فراهم آورده است. ریاضیدان متخصّص که علاقه‌ای به این‌گونه تحقیق داشته باشد، به آسانی می‌تواند مثالهایی از تجربهٔ شخصی خود برای روشن کردن نکات تجسّم یافتهٔ با ریاضیّات مقدّماتی در کتاب حاضر بر آنها بیفزاید.

۷. نویسندهٔ این کتاب چنان دوست دارد که وامداری و سپاسگزاری خویش را نسبت به بعضی از مؤلّفان معاصر که نامشان در مقالهٔ راجع به راهیابی نیامده است، اظهار دارد. از این جمله‌اند: ارنست ماخ فیزیکدان و فیلسوف، ژاک هادامار ریاضیدان، ویلیم جیمز و ولفگانگ کوهلر روانشناس. نیز خواستار آن است که از ک. دونکیر روانشناس و ف. کراوس ریاضیدان یاد کند که در اثرش (که پس از چاپ و انتشار کتاب حاضر منتشر شده و مشتمل بر تحقیقات پیشرفته است) بعضی ملاحظات مشابه ملاحظات کتاب حاضر مشاهده می‌شود.

ریاضیدان آینده باید حل‌کنندهٔ مسئلهٔ زیرکی بوده باشد، ولی چنین بودن به تنهایی کافی نیست. در وقت کافی باید بتواند مسائل ریاضی مهم را حل کند، ونخست باید معلوم کند که موهبت فطری وی مخصوصاً برای حلّ چه نوع مسائل شایستگی دارد.

برای وی، مهمترین بخش کار نگریستن به‌عقب دربارهٔ مسئلهٔ حل شده است. باوارسی کار خود و شکل نهایی حلّ مسئله باتنوّعی تمام‌ناشدنی از چیزهای مشاهده‌کردنی روبه‌رو خواهد شد. باید دربارهٔ دشواری مسئله و دربارهٔ اندیشهٔ قطعی

تأمّل کند، باید درآن بکوشد که معلوم کند چه چیز مانع پیشرفت وی بوده وچه چیز سرانجام به او کومک کرده است. باید چشم به‌راه اندیشه‌های شهودی ساده باشد! **آیا می‌توانید بایک نگاه ببینید؟** لازم است روشهای گوناگون را باهم مقایسه کند و به گسترش آنها بپردازد: **آیا می‌توانید از راه دیگری به نتیجه برسید؟** باید تلاش کند تا از مقایسهٔ مسئلهٔ کنونی خود بامسائلی که پیشتر حل کرده بود، به روشن کردن مسئلهٔ حاضرتوفیق حاصل کند، باید بکوشد تا مسائلی تازه اختراع کند و برمبنای کار تازه تمام شدهٔ خود آنها را حل کند: **آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در حلّ مسائلی دیگر به‌کار برید؟** باجذب کردن هرچه کاملتر مسئله‌ای که حل کرده، شناخت بسیار تنظیم یافته‌ای به‌دست می‌آورد که آماده برای استفاده است.

ریاضیدان آینده، همچون هر کس دیگر، از راه تقلید و تمرین، چیز می‌آموزد. باید نگران آن باشد که نمونه‌های درستی برای تقلید کردن بیابد. باید کار یک معلّم انگیزنده را به‌خوبی ملاحظه کند. باید بایک دوست شایسته و کاری به‌رقابت برخیزد. سپس، آنچه مهمتر است این که نه‌تنها به‌خواندن کتابهای درسی بپردازد، بلکه به‌مطالعهٔ کتابهای نویسندگان خوب بپردازد تاآنکه مؤلّف شایسته‌ای را برای تقلیدکردن پیدا کند. باید از جستجو برای یافتن آنچه به‌نظر وی ساده یا آموزنده یا زیبا است، لذّت ببرد. باید مسائلی حل کند و درصدد یافتن مسائلی درخور و مناسب باخویش برآید، و درحلّ آنها بیندیشد و مسائلی تازه اختراع کند. از این راهها، و نیز از طریق وسایلی دیگر، باید تلاش کند تا به‌نخستین اکتشافات مهمّ خود دست یابد: باید آنچه را که دوست دارد یا دوست ندارد، و مذاق خود، و خطّ مخصوص خودرا پیدا کند.

شرط جزئی اصلی از یک مسئلهٔ یافتنی است. نگاه کنید به **مسائل یافتنی، مسائل ثابت کردنی،** ۳. نیز رجوع کنید به **اصطلاحات کهنه و نو،**۲.

شرطی را به نام حشو یا زاید می‌خوانند که اجزاء زیادی غیرلازم داشته باشد. اگر اجزاء آن‌چنان مخالف یکدیگر باشند که چیزی نتواند شرط را تأمین کند، آن را متناقض می‌خوانند.

مثلاً، اگر شرطی با شماره‌ای از معادلات خطّی بیش از شمارهٔ مجهولها بیان شود، یا حشو است یا متناقض؛ اگر شرط با شمارهٔ معادلات خطّی کمتر از شمارهٔ مجهولها بیان شود، از این راه به دست آوردن مجهول امکانپذیر نیست؛ اگر این دو شماره با یکدیگر برابر باشد، معمولاً شرط برای تعیین مجهول کافی است، ولی در حالات استثنایی ممکن است متناقض یا غیرکافی باشد.

شکل آن را بکشید، نگاه کنید به **اشکال**. **وارد کردن علامتهای شایسته** ، نگاه کنید به **علامتگذاری**.

علامتگذاری. اگر بخواهید از مزایای علامت خوب گزیده و خوب شناخته شده به خوبی آگاه شوید، سعی کنید که معدودی از اعداد را که چندان کوچک نباشد، و با اعداد رومی نوشته شده‌اند، با یکدیگر جمع کنید، همچون اعداد MMMXC و MDXCVI و MDCXLVI و MDCCLXXXI و MDCCCLXXXVII.

نباید اهمّیت علامتها و نشانه‌های ریاضی را دست‌کم بگیریم. حسابگرهای جدید که در آنها علامتهای دهدهی به کار می‌رود، مزیّت فراوانی نسبت به حسابگرهای قدیمی دارند که دارای چنین روش شایسته‌ای برای نوشتن اعداد نبوده است. دانشجوی متوسّط امروزی که با علامتهای جبر و هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا است، در حلّ مسائل مربوط به وسعت سطح و حجم که نبوغ ارشمیدس را به کار می‌انداخته، نسبت به ریاضیدان یونانی از مزیّتی برخوردار است.

۱. سخن گفتن ونوشتن با یکدیگر ارتباط بسیار نزدیک دارند، و استعمال کلمات به فکر مدد می‌رساند و بعضی از فیلسوفان و زبانشناسان اندکی دورتر رفته واظهار داشته‌اند که به کار بردن کلمات برای به کارافتادن عقل ضروری است. ولی آخرین ادّعا تا حدّی مبالغه‌آمیز به نظر می‌رسد. اگر اندکی آزمودگی نسبت به کار جدّی ریاضی داشته باشیم، می‌دانیم که امکان انجام دادن تفکّری استوار بدون کاربرد کلمه میسّر است، وتنها نگریستن به اشکال هندسی یا علامتهای جبری کفایت می‌کند. اشکال و نمادها ارتباط نزدیکی با تفکّر ریاضی دارند، و به کاربردن آنها به فکر مدد می‌رساند. از این راه می‌توانیم ادّعای فیلسوفان و زبانشناسان را تا حدّی تأیید کنیم که کلمات را همردیف گونه‌های دیگر علامات بگیریم و بگوییم که **به کار بردن علامتها ظاهراً برای به کار افتادن عقل ضروری است.**

به هر صورت، استعمال نمادهای ریاضی به استعمال کلمات شبیه است. علامتهای ریاضی همچون گونه‌ای از زبان به نظر می‌رسد، **زبانی خوب ساخته شده** و خوب تطابق یافتهٔ با هدفی که دارد، زبانی موجز و دقیق و دارای قواعدی که بر خلاف قواعد صرف و نحو معمولی هیچ استثنایی در آن مشاهده نمی‌شود.

اگر این دیدگاه را بپذیریم، **تنظیم و نوشتن معادلات** همچون گونه‌ای از ترجمه به نظر خواهد رسید، یعنی ترجمهٔ از زبان معمولی به زبان نمادهای ریاضی.

۲. بعضی‌از نمادهای ریاضی، همچون + و− و = و چند علامت دیگر، معنای سنّتی ثابت دارند، ولی نمادهای دیگری همچون حروف الفبای بزرگ و کوچک یونانی و رومی در مسائل مختلف به معنی متفاوت به کار می‌روند. هنگامی که با یک مسئلهٔ تازه رو به رو می‌شویم، باید بعضی از نمادها را انتخاب و علامتهای مناسبی را وارد کار کنیم. با کاری شبیه کاربرد زبان متعارفی رو به رو هستیم. بعضی از کلمات در زمینه‌های متفاوت برای حکایت کردن از معانی مختلّف به کار می‌روند؛ هنگامی که دقّت حایز اهمّیت است، باید در انتخاب کلمات خود دقیق و محتاط باشیم.

یک گام مهم در حلّ مسئله انتخاب کردن علامتها است. این کار باید با دقّت صورت بگیرد. وقتی که اکنون برای انتخاب درست علامتها صرف می‌کنیم به صورت وقتی که پس از آن با اجتناب از تردید و سرگردانی صرفه‌جویی می‌شود، به ما بازپس داده می‌شود . علاوه بر این، در انتخاب دقیق علامتها، باید در بارهٔ عناصری از مسئله که باید علامتگذاری شوند به دقّت فکر کنیم. بنابراین، انتخاب علامتها سهمی اساسی در فهم مسئله دارد.

۳ـ علامت خوب باید خالی از ابهام و باردار و به یادآوردن آن آسان باشد؛ باید از داشتن معنی دیگر مزاحم اجتناب کند واز معنی دوم سودمند بهره بر گیرد: ترتیب و ارتباط علامتها باید ترتیب وارتباط چیزها را به ذهن القا کند.

٤. علامتها قبل از هر چیز باید خالی از ابهام باشد. این درست نیست که در یک امر تحقیقی نماد واحد نمایندهٔ دو چیز متفاوت باشد.اگر در ضمن حلّ یک مسئله برای کمّیّتی علامت a را انتخاب کردید، باید از نشانه‌گذاری هر چیز دیگری که با این مسئله ارتباط دارد با a خودداری کنید.البتّه می‌توانید در مسئله‌ای دیگر a را به معنی دیگری به کار برید.

با آنکه به کار بردن یک نماد برای چیزهای مختلف ممنوع است، به کار بردن نمادهای مختلف برای یک چیز ممنوع نیست. مثلاً، حاصل ضرب a و b را می‌توانیم به این صورتها نمایش دهیم:

$$a \times b \qquad a \cdot b \qquad ab.$$

درپاره‌ای از موارد به کار بردن دو علامت مختلف یا بیشتر برای یک چیز دارای مزیّت است، ولی در این حالات باید دقّت و احتیاط خاصّی صورت بگیرد. معمولاً، بهتر آن است که برای یک چیز تنها یک علامت به‌کار رود و در هیچ حالت بیجهت برای آن چند علامت انتخاب نشود.

۵. علامت خوب آن است که **آسان به یادآید**، و آسان شناخته شود. علامت باید بلافاصله ما را به یاد چیزی که نشانهٔ آن است بیندازد، و باآن چیز بلافاصله آن علامت به یاد ما بیاید.

تدبیر ساده‌ای برای آنکه علامتها به آسانی قابل شناختن باشد این است که حرف اوّل کلمهٔ نمایندهٔ چیز مورد نظر را علامت انتخاب کنیم. مثلاً، دربخش ۲۰ حرف r را برای نرخ (به انگلیسی rate) و حرف t را برای زمان (Time) و حرف V را برای حجم (Volume) برگزیدیم. ولی در همهٔ موارد نمی‌توانیم حرف اوّل کلمه را به‌کار بریم. مثلاً در بخش ۲۰، چون r را برای نرخ انتخاب کرده بودیم دیگر نمی‌توانستیم همین حرف را برای شعاع (radius) انتخاب کنیم. سببهای دیگری نیز برای محدودیّت گزینش نمادها وجود دارد و وسایل دیگری برای قابل شناختن بودن آنها هست که از آنها بحث خواهیم کرد.

۶. علامت نه تنها به آسانی قابل شناختن است، بلکه در شکل بخشیدن به تصوّر و دریافت ما در آن هنگام که **ترتیب و ارتباط علامتها القاکنندهٔ ترتیب و ارتباط چیزها با یکدیگر به ذهن است**، به صورتی خاص سودمند واقع می‌شود. برای تجسّم بخشیدن به این نکته ذکر چند مثال لازم می‌نماید.

(I) برای اشاره کردن به چیزهایی که در تصوّر مسئله به یکدیگر نزدیکترند، حروفی را برمی‌گزینیم که در ترتیب الفبایی به یکدیگر نزدیکترند.

مثلاً، به صورت کلّی حروف آغاز الفبا همچون a و b و c را برای مقادیر ثابت یا داده شده به کار می‌بریم،وحروف آخر الفبا همچون x و y و z را برای مقادیر مجهول یا متغیّر.

در بخش ۸ حروف a و b و c را برای درازا و پهنا و بلندای یک متوازی السّطوح به کار بردیم. دراین مورد انتخاب حروف آغاز الفبا بر انتخاب حرفهای اوّل نمایندهٔ کلمات l (درازا، length) و w (پهنا، width) و h (بلندا، height) ترجیح دارد، سه طول در مسئله نقش واحد دارند و همین امر سبب آن بوده است که سه حرف متوالی الفبا برای نمایاندن آنها انتخاب شود. علاوه بر این، چون c, b, a در آغاز الفبا جای دارند، همان گونه که گفتیم، معمولیترین حروف برای اشاره کردن به کمّیتهای داده شده خواهند شد. درحالتی دیگر، اگر سه طول نقشهای متفاوت داشته باشند و دانستن این که کدام یکی از آنها افقی است و کدام یک قائم حایز اهمّیّت است، انتخاب علامتهای l و w و h رجحان دارد.

(II) برای نمایاندن چیزهایی که به یک دسته تعلّق دارند، غالباً حروف متعلّق به یک الفبا را برای یک دسته به کار می‌بریم و برای دسته‌های متفاوت از الفباهای متفاوت استفاده می‌کنیم. مثلاً در هندسه مسطّحه غالباً:

حروف بزرگ رومی A و B و C..... را برای نقطه‌ها؛

و حروف کوچک رومی a و b و c را برای خطها.

و حروف کوچک یونانی α و β و γ را برای زاویه‌ها به کار می‌بریم.

اگر دوچیز متعلّق به دسته‌های متفاوت دارای ارتباط خاصّی با یکدیگر باشند که در مسئلهٔ ما حایز اهمّیت است، برای اشاره کردن به آنها حروف متناظر الفباهای مختلف را به کار می‌بریم همچون A و a و B و b وغیره. مثالی آشنا علامتگذاریهای مثلّث است:

A و B و C برای رأسها،

a و b و c برای ضلعها،

α و β و γ برای زاویه‌ها.

این مطلب تثبیت شده است که a ضلع مقابل رأس A است و زاویهٔ A به صورت α نمایانده می‌شود.

(III) دربخش ۲۰ حروف a و b و x و y چنان‌خوب انتخاب شده‌اندکه نمایندهٔ ماهیّت و ارتباط اجزاء و عناصری باشند که به آنها اشاره می‌کنند. حروف a و b اشاره به آن دارند که کمّیّتهای مورد نظر مقادیر ثابت است، x و y متغیّرها را نمایش می‌دهند، a مقدّم بر b است به همان‌گونه که x مقدم بر y است، و این خود نشان می‌دهد که a همان‌گونه رابطه را با b دارد که x با y دارد. a و x هردو افقی است، و b و y هردو قائم، و :

$$a : b = x : y$$

۷. علامت

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

نشان می‌دهد که دو مثلّث موردنظر با یکدیگر متشابهند. در کتابهای جدید مقصود از این فرمول آن است که دو مثلّث متشابه یکدیگرند و رأسهای متناظر به همان گونه است که دراین‌فرمول‌آمده است: A با E و B با F و C با G. درکتابهای قدیم این پیشبینی‌نشده بود، لازم بود خواننده به شکلها نگاه کند تا متوجّه شود که کدام حروف با یکدیگر متناظر است.

علامتگذاری نوین نسبت به علامتگذاری قدیمی ترجیح فراوان دارد. با این علامتگذاری نوین می‌توانیم بدون نگاه کردن به شکل نتایجی از فرمولها به دست آوریم، مثلاً می‌توانیم

$$\angle A = \angle E$$
$$AB : BC = EF : FG$$

و روابط دیگر را استنتاج کنیم. از علامتگذاری قدیمی نتیجهٔ کمتری به دست می‌آید و استخراج چنین نتایجی قطعی میسّر نیست.

علامتی که بیش از علامت دیگر بیان کننده باشد، **باردارتر** خوانده می‌شود. علامتگذاری جدید برای مثلّثهای متشابه باردارتر از علامتگذاری سابق است، و چون ترتیب و ارتباط چیزها را کاملتر از قدیمی منعکس می‌کند، می‌تواند بیشتر از علامتگذاری قدیمی پایه‌ای برای به دست آوردن نتایج باشد.

۸. کلمات معنی دوم دارند. بعضی از متنها که یک کلمه غالباً در آنها به کار می‌رود، در آن تأثیر می‌کند و چیزی برمعنی نخستین آن می‌افزاید و نوعی رنگ یا معنی دوم «یادلالت ضمنی» به آن می‌بخشد. هنگامی که در نوشتن مطلبی جانب دقّت و احتیاط را ملاحظه می‌کنیم، در آن می‌کوشیم تا از میان کلماتی که تقریباً معنی واحدی دارند آن یک را انتخاب کنیم که معنی دوم آن جا افتاده‌تر باشد.

در علامتهای ریاضی نیز چیز مشابهی وجود دارد. حتّی نمادهای ریاضی هم ممکن است از متنی که غالباً درآن به کار می‌روند یک معنی دوم کسب کنند. اگر بخواهیم علامت مورد نظر را با دقّت انتخاب کنیم، باید این امر را در نظر داشته باشیم. بهتر است این مطلب را کمی روشنتر بیان کنیم.

بعضی از حروف هست که یک معنی ریشه‌دار سنّتی به دست آورده‌اند. مثلاً e برای مبنای لوگاریتم طبیعی، i برای $\sqrt{-1}$ واحد موهومی ، و π برای نسبت محیط دایره به قطر آن. روی هم رفته بهتر آن است که این گونه علامات را منحصراً در معنی سنّتی آنها به کار بریم؛ اگر آنها را برای منظوردیگری مورداستفاده قراردهیم، ممکن است معنی سنّتی آنها گاه برحسب اتّفاق تأثیر کند و سبب پریشانی و گمراهی شود. ولی معنی دوم از این گونه برای شخص مبتدی که هنوز با موضوعات متعدّدی در ریاضیّات روبه‌رونشده، چندان زیانی ندارد.

در صورتی که معنی دوم نماد با مهارت و احتیاط به کار گرفته شود نیز می‌تواند سودمند و حتّیٰ بسیارسودمند باشد. علامتی که در فرصتهای قبلی به کاررفته ممکن

است به ما در یادآوردن بعضی از روشهای سودمند کومک کند؛ البتّه باید به اندازهٔ کافی محتاط باشیم و آشکارا معنی کنونی (اوّلی) نماد را از معنی سابق (دومی) آن جداکنیم. یک علامت استقرار یافته [همچون علامتگذاری سنّتی اجزاءِ مثلّث که پیشتر در ٦ (II) به آن اشاره کردیم] دارای مزیّتی بزرگ است. چون پیشتر در اوضاع و احوالهای متعدّد به کار رفته، ممکن است به ما برای به یادآوردن روشهای گوناگون موردعمل قرارگرفتهٔ پیشین مدد برساند. از طریق یک علامت استقراریافته فرمول موردنظر خود را به یادمی‌آوریم. البتّه باید در آن هنگام که به مقتضای اوضاع و احوال خاص ناگزیر از آن می‌شویم که علامتی استقراریافته را به معنایی متفاوت با معنی معمولی آن به کاربریم، به اندازهٔ کافی دقیق باشیم و احتیاط را از دست ندهیم.

۹. هنگامی که لازم است از میان دو علامت یکی را انتخاب کنیم، ممکن است دلیلی مقتضی استعمال یکی از آن دوباشد، و دلیلی دیگر مقتضی استعمال دیگری. برای برگزیدن آنچه شایسته‌تر است به تجربه و ذوق نیاز داریم، به همان‌گونه که برای انتخاب کلمات نیز داشتن تجربه و ذوق دخالت دارد. با این همه شناختن محاسن و معایبی که پیشتر به آنها اشاره کردیم خوب و سودمند است. به هرصورت، باید علامتها را به دقّت انتخاب کنیم و دلیل خوبی برای انتخاب خود داشته باشیم.

۱۰. نه‌تنها شاگردان کم استعداد کلاس بلکه شاگردان کاملاً باهوش ممکن است از درس جبر بیزارباشند. همیشه چیزی مِنْ عِنْدی و ساختگی در مورد علامتها وجود دارد؛ آموختن یک علامت جدید همچون تحمیل کردن باری بر حافظه محسوب می‌شود. شاگرد با هوش، در صورتی که چیزی در مقابل کشیدن این بار به عنوان جبران آن درنظرنداشته باشد، از تحمّل آن خودداری می‌کند. دانشجوی باهوش در صورتی حقّ تنفّر داشتن از جبر پیدا می‌کند که فرصتی برای او فراهم نشده باشد که باتجربهٔ شخصی متقاعد شود که زبان نمادهای ریاضی به فکر مدد می‌رساند. کومک کردن به وی برای دست یافتن به این نتیجه یکی از وظایف بسیارمهمّ معلّم است. گفتم که این وظیفه‌ای بسیارمهمّ است، ولی نمی‌گویم که انجام دادن این وظیفه آسان است. ملاحظاتی که پیشتر گذشت ممکن است کومکی به آن بکند. نیز نگاه کنید به **تنظیم و نوشتن معادلات**.وارسی یک فورمول از راه بحث پردامنه در بارهٔ خواصّ آن را به عنوان تمرینی که آموزندگی خاصّی دارد توصیه می‌کنیم؛ به بخش ١٤ و **آیا می‌توانید نتیجه را امتحان کنید؟** ۲مراجعه کنید.

عناصر معاون. دربارهٔ طرز تصوّر ما دربارهٔ مسئله در پایان کارمان چیزهایی بیشتر از آنچه با آن کار خود را آغاز کردیم وجود دارد (**پیشرفت و دستاورد، ۱**)، به‌تدریج که کار ما در حلّ مسئله پیشتر می‌رود، عناصر تازه‌ای بر آنچه در ابتدای کار در نظر گرفته بودیم می‌افزاییم. عنصری که می‌افزاییم و به آن منظور است که به حلّ مسئله کومک کند به نام **عناصر معاون** (یا معین یا کومکی) نامیده می‌شود.

۱. گونه های مختلفی از عناصر معاون وجود دارد. در حلّ یک مسئلهٔ هندسی امکان آن هست که خطهایی بر اشکال رسم‌شده بیفزاییم که به‌نام **خطوط معاون** خوانده می‌شوند. در حلّ یک مسئلهٔ جبری ممکن است ناگزیر از انتخاب مجهولی به نام **مجهول معاون** شویم (**مسئله کومکی، ۱**). قضیّهٔ معاون قضیّه‌ای است که بدان منظور به آن می‌پردازیم که بتواند در پیشرفت حلّ مسئلهٔ اصلی به ما کومک کند.

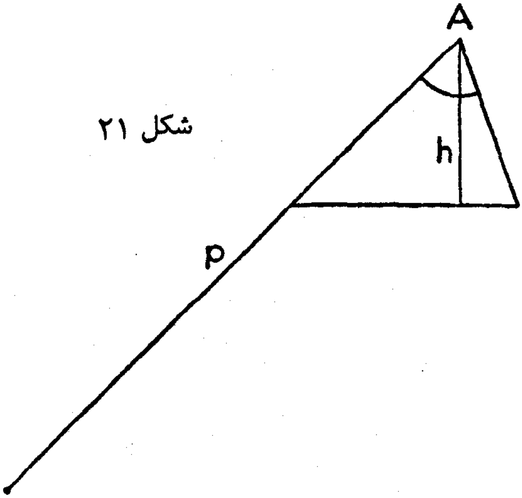
۲. برای وارد کردن عناصر معاون در حلّ مسئله دلایل گوناگون وجود دارد. هنگامی که در امر به یادآوردن **مسئله‌ای که با مسئلهٔ اصلی ما ارتباط دارد و پیشتر آن را حل کرده‌ایم** توفیق حاصل می کنیم، از این بابت بسیار خوشحال می‌شویم. محتمل است که بتوانیم از آن در حلّ مسئلهٔ فعلی بهره‌برداری کنیم، ولی هنوز نمی‌دانیم که چگونه آن را به کار گیریم. مثلاً، مسئله‌ای که در صدد حلّ آن هستیم یک مسئلهٔ هندسی است، ومسئله‌ای که پیشتر آن را حل کرده بودیم و اکنون به موفّقیّت آن را به خاطر آورده‌ایم مسئله‌ای مربوط به مثلّث بوده است. ولی در شکل ما هیچ مثلّثی وجود ندارد. برای آنکه بتوانیم از مسئلهٔ به خاطر آمده بهره‌برداری کنیم، لازم است یک مثلّث داشته باشیم، بنابراین می‌بایستی خطهایی اضافی برشکل خود بیفزاییم. به صورت کلّی، پس از آنکه مسئلهٔ حل شده‌ای را به یادآوردیم که می‌خواهیم از آن در حلّ مسئلهٔ فعلی کمک بگیریم، باید این سؤال را برای خود طرح کنیم: **آیا امکان آن هست که عناصری کومکی اضافه کنیم تا استفادهٔ از آن را امکانپذیر سازد؟** (مثالی که در بخش ۱۰ آمده مثالی نمونه است.)

در امر **بازگشت به تعریفها** نیز فرصت دیگری برای وارد کردن عناصر معاون پیش می‌آید. مثلاً، باتوضیح در بارهٔ دایره ممکن است نه‌تنها به مرکز وشعاع آن اشاره کنیم، بلکه همچنین این عناصر را در شکل خود وارد سازیم. بدون وارد کردن آنها نمی‌توانیم به کاربردی عینی ومحسوس از تعریف بپردازیم؛ تعریف را بدون رسم کردن اشکالی بیان کردن، چیزی جز لفّاظی نیست.

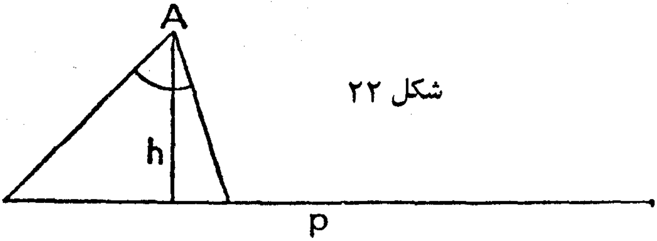
کوشش برای به کاربستن نتایج وبه عقب باز گشتن به تعریفها از جملهٔ بهترین دلایل برای وارد کردن عناصر معاون است، ولی کار به وارد کردن آنها تمام نمی‌شود. ممکن است لازم باشد عناصر معاونی برطرز تصوّر خود نسبت به مسئله از آن جهت اضافه کنیم که آن را کاملتر وانگیزنده‌تر وشناخته‌تر سازیم، هرچند هنوز به ندرت می‌دانیم که چگونه می‌توانیم به صورت آشکار از این عناصر افزوده شده بهره‌برداری کنیم. تنها این احساس را داریم که توجّه به مسئله از فلان راه وبا افزودن فلان عناصر اضافی «اندیشهٔ درخشانی» است.

برای افزودن یک عنصر معاون ممکن است دلیلی یا دلیل دیگر داشته باشیم، ولی به هر صورت لازم است که دلیلی برای این کار بوده باشد. بیجهت وبیدلیل نباید عناصر اضافی وارد مسئله کنیم.

۳. مثال. بادر دست داشتن ارتفاع خارج شدهٔ از یک رأس مثلّث و زاویهٔ مربوط به این رأس ومحیط مثلّث آن را رسم کنید.



شکل ۲۱



شکل ۲۲

علامات شایسته را به کار می‌بریم. α را برای نمایش زاویهٔ داده شدهٔ A به‌کار می‌بریم و h را برای ارتفاع خارج شدهٔ از رأس A و p را برای محیط مثلّث. شکلی رسم می‌کنیم و α و h را بر آن قرار می‌دهیم. آیا همهٔ داده‌ها را به‌کار بردیم؟ نه، شکل ما مشتمل بر دادهٔ p، که عبارت از طول محیط مثلّث است نیست. بنابراین لازم است p را نیز وارد کنیم. ولی چگونه؟

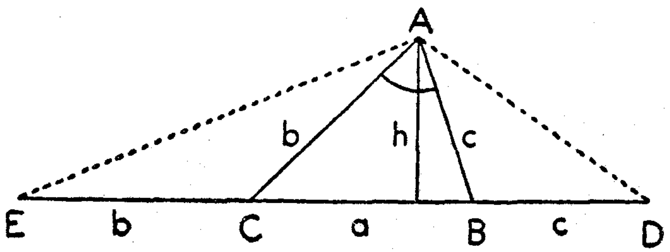
برای وارد کردن p می‌توانیم از راههای مختلف استفاده کنیم. آن راه که در شکل ۲۱ دیده می‌شود، ناشیانه بنظر می‌رسد. اگر در آن بکوشیم که کارساز نبودن این شکل را برای خود روشن کنیم و بدانیم چرا رضایتبخش نیست، ممکن است متوجّه شویم که سبب آن فقدان تقارن درآن است.

درواقع مثلّث سه ضلع مجهول a و b و c دارد. a را مطابق معمول نشانهٔ ضلع روبه‌روی رأس A می‌گیریم، می‌دانیم که،

$$a + b + c = p.$$

که در این فرمول ضلعهای b و c نقش مشابه دارند و آنها را می‌توان با یکدیگر مبادله کرد، مسئلهٔ ما نسبت به b و c متقارن است. ولی در شکلهای ۲۰ و ۲۱ برای ضلعهای b و c چنین نقشی مشاهده نمی‌شود. باترسیم خطّی برابر با p نسبت به b و c در آن اشکال به‌صورت نابرابر معامله شده است. شکلهای ۲۱ و ۲۲ تقارن طبیعی مسئله را نسبت به b و c تباه کرده‌اند. باید p را چنان قرار دهیم که نسبت به b و c ارتباط مشابه داشته باشد.

این نظر ما را بر آن می‌دارد که طول p را بدان صورت که در شکل ۲۳ مشاهده می‌شود قرار دهیم. بر طول a از مثلث قطعه خطّ CE به طول b را از یک کنار آن و



شکل ۲۳

قطعه خطّ BD را به طول c را از کنار دیگر آن می‌افزاییم تا خطّ ED از شکل ۲۳ برابر با p به‌دست آید.

$$b + a + c = p.$$

اگر مقداری تجربه در حلّ مسائل ساختمانی داشته باشیم، از این امر غافل نمی‌مانیم که همراه با خطّ ED در شکل، خطهای معاون AD و AE را نیز اضافه کنیم که قاعده‌های دو مثلّث متساوی السّاقین را تشکیل می‌دهند. وارد کردن عناصری در حلّ مسئله که به صورت خاصّ ساده و شناخته شده‌اند، همچون یک مثلّث متساوی السّاقین، بیدلیل و نامعقول به‌نظر نمی‌رسد.

این مایهٔ خوشبختی ما بوده است که خطهایی اضافی وارد شکل کرده‌ایم. با دقیق شدن در شکل جدید ممکن است این مطلب بر ما کشف شود که زاویهٔ EAD رابطه‌ای با زاویهٔ معلوم α دارد. با استفاده از مثلّثهای متساوی‌السّاقین ABD و ACE برما معلوم می‌شود که زاویهٔ DAE برابر با $\frac{\alpha}{2} + 90^\circ$ است.

پس از این ملاحظه طبیعی است که باید مثلّث DAE ساخته شود. تلاش برای حلّ این مسئله سبب وارد شدن مسئلهٔ معاونی می‌شود که حلّ آن بسیار آسانتر از مسئلهٔ اصلی است.

٤. معلّمان و نویسندگان کتابهای درسی نباید فراموش کنند که شاگرد باهوش و **خوانندهٔ باهوش** تنها به این قانع نمی‌شوند که درستی گامهای برداشته شده را در معرض تحقیق قرار دهند بلکه این را نیز می‌خواهند بدانند که انگیزه و هدف برداشتن گامهای مختلف چیست. وارد کردن یک عنصر معاون گامی آشکار است. اگر یک خطّ کومکی فریبنده ناگهان بدون دلیلی در شکل وارد شود و مسئله را به‌صورتی شگفت‌انگیز حل کند، دانشجویان و خوانندگان باهوش ناراحت و دلسرد می‌شوند؛ چنان احساس می‌کنند که گول خورده‌اند. ریاضیّات از آن جهت دلچسب و مورد توجّه است که نیروهای استدلال و اختراع ما را دربرمی‌گیرد. ولی اگر انگیزه و هدفِ آشکارترین گام نافهمیده باقی بماند، چیزی برای آموختن دربارهٔ استدلال و اختراع برجای نمی‌ماند. قابل فهم ساختن چنین گامها به توسّط اشارات وملاحظات شایسته(همچون در شمارهٔ ۳ پیش از این) یا با طرح پرسشها و پیشنهادهای به دقّت انتخاب شده(همچون دربخشهای ۱۰و ۱۸و ۱۹و ۲۰) مقداری از وقت و کوشش را می‌گیرد، ولی ممکن است ارزش آن را داشته باشد.

فضلفروشی یا پرادّعایی ومهارت، دو ایستار متضاد در برابر قواعد است.

۱- به کاربردن یک قاعده به صورت مستحکم و تردیدناپذیر، در حالاتی که شایسته است و در حالاتی که شایسته نیست، فضلفروشی و پرادّعایی است. بعضی از فضلفروشان ابلهان بیچاره‌ای بیش نیستند؛ هرگز قاعده‌ای را که می‌خواهند بدین‌گونه آگاهانه و بدین‌گونه ناآگاهانه به کاربرند، خوب نفهمیده‌اند. بعضی از آنان کاملاً کامیارند؛ قواعد را، دست‌کم در آغاز (پیش از آن که فضلفروش و پرادّعا شوند) فهمیده‌اند، و در بسیاری از موارد قاعدهٔ شایسته را انتخاب می‌کنند و تنها گاهگاه دچارشکست می‌شوند.

به کار بردن یک قاعده با راحتی طبیعی و با داوری صحیح در بارهٔ این که برای چه موارد شایسته است، و بدون آن که بگذاریم کلماتِ قاعده هدف عملی را که باید انجام گیرد یا فرصتهای وضع را در تاریکی قراردهد، یک مهارت و استادی است.

۲. پرسشها و پیشنهادهای فهرست ما ممکن است برای حل کنندگان مسئله و برای معلّمان هر دو سودمند باشد. ولی نخست باید خوب فهمیده شوند و طرز استعمال خاصّ آنها با آموزش و آزمایش و خطا، و با آزمودن شکستها و کامیابیهای حاصل از کاربرد آنها، به دست آید. دوم، استعمال آنها نباید صورت ادّعا و فضلفروشی پیداکند. بدون تشخیص و بدون پیروی از عادت خوب محکمی که به دست آورده‌اید، هرگز نباید پرسش یا پیشنهادی را طرح کنید. باید برای این کار و داوری کردن در بارهٔ آن با مقدّماتی که یادکردیم آمادگی پیداکرده باشید. شما در حال حل کردن مسئله‌ای دشوار و مهیّج هستید؛ گامی که باید پس از این آزمایش کنید، باید در تحت تأثیر ملاحظهٔ دقیق و خالی از تعصّب مسئله‌ای که در برابر خود دارید برداشته شود. می‌خواهید به دانشاموزی در حلّ مسئله کومک کنید؛ آنچه به شاگرد خود می‌گویید باید براساس فهم برخاستهٔ از روی مهربانی و محبّت شما نسبت به دشواریهای او باشد.

واگر تمایل به آن دارید که در نظردیگران بسیاردان معرّفی شوید و می‌خواهید از قاعده‌ای پیروی کنید، این قاعده را بیاموزید: همیشه نخست مغز خود را به کاراندازید.

قضیّه فرعی قضیه‌ای است که به آسانی آن را هنگام آزمودن قضیّه‌ای که تازه آن را یافته‌ایم به دست می‌آوریم. لفظ انگلیسی آن از اصلی لاتینی corollary است که معنی «رایگان» و «انعام» دارد.

قضیّه معاون، لفظ انگلیسی آن Lemma ریشهٔ یونانی دارد و ترجمهٔ تحت‌اللّفظی آن «آنچه فرض شده» است.

در آن می‌کوشیم که قضیّه‌ای مثلاً A را ثابت کنیم. به آن رهبری می‌شویم که درصدد اثبات قضیّهٔ دیگر B برآییم؛ اگر B درست باشد شاید بتوانیم از آن برای اثبات A استفاده کنیم. بدون اثبات B آن را موقّتاً ثابت شده فرض می‌کنیم و از این راه به اثبات A می‌پردازیم. این قضیّهٔ B «فرض شده» و قضیّه‌ای معاون و کومکی برای اثبات قضیّهٔ اصلی A است.

قواعد اکتشاف . نخستین قاعدهٔ اکتشاف داشتن مغز سالم و بخت نیکو است. قاعدهٔ دوم اکتشاف استوار نشستن و منتظر رسیدن **اندیشهٔ درخشان** ماندن است.

خوب است، تا حدّی گستاخانه به خاطر داشته باشیم که به تحقّق یافتن بعضی از آرزوها دلخوش نباشیم. قوانین شکست‌ناپذیر اکتشاف که ما را به حلّ همهٔ مسائل ریاضی توانا سازد، بیش از حجر فلاسفه که بیهوده کیمیاگران در صدد دست یافتن به آن بودند مطلوب است. چنین قاعده‌ای کار جادویی می‌کند، ولی می‌دانیم که چیزی به نام جادو به آن‌گونه که بیشتر مردمان آن گونه تصوّر می‌کنند، وجود ندارد. یافتن قاعده‌ای شکست‌ناپذیر که با آن بتوانیم هر گونه مسئلهٔ ممکن را حل کنیم، یک رؤیای کهنهٔ فلسفی است؛ ولی این رؤیا هرگز بیش از یک رؤیا نخواهد شد.

گونه‌ای از **راهیابی** نمی‌تواند هدفی چون دست یافتن به قواعد شکست‌ناپذیر داشته باشد؛ ولی ممکن است به تحقیق در بارهٔ روشهایی (همچون عملیّات مغزی و ذهنی و حرکتها و گامها) بپردازد که عموماً برای حلّ مسائل سودمند واقع می‌شوند. این روشها به وسیلهٔ هر شخص سالمی که به اندازهٔ کافی علاقه‌مند به مسئلهٔ خود باشد. مورد عمل قرار می‌گیرد. به آنها به وسیلهٔ پاره‌ای از پرسشها و پیشنهادها و اظهارنظرهایی که مردمان هوشمند برای خود و معلّمان هوشمند برای شاگردان خود طرح می‌کنند، اشاره می‌شود. مجموعه‌ای از این پرسشها و پیشنهادها، که با کلّیّت کافی بیان شده و با دقّت و وضوح تنظیم یافته باشد، ممکن است کمتر از حجر فلاسفه مطلوب به نظر برسد، ولی آن را می‌توان فراهم آورد. با فهرستی که در آغاز کتاب پیش از مقدّمهٔ آورده‌ایم می‌توان چنین مجموعه‌ای را تهیّه کرد.

قواعد تعلیم. نخستین قاعده و قانون آموختن به دیگران دانستن این مطلب است که چه چیز می‌خواهید تعلیم کنید. قاعدهٔ دوم آموزش دانستن مقداری بیش از آن چیزی است که می‌خواهید به دیگران بیاموزید.

نخستین چیزها اوّل می‌آید. نویسندهٔ این کتاب چنان فکر نمی‌کند که قواعد رفتار و کردار برای آموزگاران کاملاً بیفایده است، اگر چنین می‌بود هرگز جرأت آن پیدا نمی‌کرد که یک کتاب کامل در بارهٔ رفتار استادان و شاگردان بنویسد. با این همه نباید فراموش داریم که یک معلّم ریاضی باید مقداری ریاضیّات بداند، و معلّمی که می‌خواهد ایستار درست عقلی و ذهنی نسبت به مسائل را به شاگردان خود بیاموزد، لازم است خود چنان ایستاری را کسب کرده باشد.

قواعد سبک، قانون اول سبک: این است که چیزی برای گفتن داشته باشید. قانون دوم سبک این است که، برحسب تصادف، هنگامی که دو چیز برای گفتن دارید خود را مهار کنید، اوّل یکی را بگویید و سپس دیگری را، نه این که هر دو را همزمان بگویید.

کار ضمیر ناخودآگاه. شبی در ضمن صحبت می‌خواستم دربارهٔ یک نویسنده با یکی از دوستانم گفتگو کنم، ولی نتوانستم نام آن نویسنده را به یاد بیاورم. خسته شدم و سبب خستگی آن بود که یکی از داستانهایش را به خوبی در خاطر داشتم. نیز داستانهایی دربارهٔ خود آن نویسنده در یادداشتم که می‌خواستم آنها را نقل کنم؛ در واقع همه چیز را دربارهٔ او جز نامش می‌دانستم. مکرّر تلاش کردم که اسم او را به یاد بیاورم، ولی حاصلی به دست نیاوردم. فردای آن روز، به محض آنکه به فکر ناراحتی و خستگی شب گذشته افتادم، بدون هیچ کوشش نام آن نویسنده به یادم آمد.

خوانندهٔ کتاب حاضر محتملاً تجربه‌ای از این گونه دارد، و، اگر حل کنندهٔ پرحرارت مسئله‌ای بوده باشد، احتمالاً چنین تجربه‌ای در ضمن حلّ مسئله‌ها برای او پیش آمده است. غالباً اتّفاق می‌افتد که در حلّ یک مسئله هیچ توفیقی بهرهٔ شما نشود، سخت تلاش می‌کنید اما هیچ نتیجه‌ای به دستتان نمی‌آید. ولی هنگامی که پس از یک شب آرامش یا چند روز فاصله به آن مسئله باز می‌گردید، اندیشهٔ درخشانی آشکار می‌شود و مسئله را به آسانی حل می‌کنید. این که مسئله از چه گونه

باشد چندان مهم نیست؛ یک کلمهٔ فراموش شده، یک کلمهٔ دشوار از جدول کلمات متقاطع، آغاز یک نامهٔ خسته‌کننده و مایهٔ پریشانی، یا حلّ یک مسئلهٔ ریاضی ممکن است سبب بوده باشد.

از این اتّفاقات احساسی دربارهٔ **ضمیر ناخوداگاه** دست می‌دهد. واقعیّت این است که مسئله، پس از یک غیبت ممتد، ممکن است روشن و آشکار شده ونزدیکتر به حل آن از آن هنگام که از قلمرو تصرّف خوداگاهی بیرون افتاد، به خوداگاهی شما باز گردد. چه کس آن را پاک و روشن کرد و به حل نزدیک ساخت؟ آشکارا خود آن کس که به صورتی **ناخوداگاه** به حلّ آن اشتغال داشت. دادن پاسخی دیگر دشوار است، هر چند روانشناسان آغازهای پاسخ دیگری را یافته‌اند که ممکن است روزی رضایتبخش شود.

نظریّهٔ کار ضمیر ناخودآگاه هر شایستگی که داشته یا نداشته باشد این امر یقینی است که حدّی وجود دارد که در آن سوی این حد نمی‌توانیم ضمیر خود آگاه خویش را به کار برانگیزیم. لحظاتی هست که در آنها بهتر است مسئله را برای مدّتی کنار بگذاریم. با فراهم آوردن فرصتی برای آرام گرفتن مسئله و خودمان، فردا می‌توانیم با کوشش کمتر نتیجهٔ بیشتر به دست آوریم. «اگر امروز ممکن نباشد فردا ممکن است» یکی دیگر از گفته‌های قدیمی است. ولی مطلوب چنان است که مسئله را بدون دست یافتن به یک دستاورد به کنار نگذاریم تا زمانی بعد به سراغ آن برویم؛ دست کم کار جزءِ کوچکی از آن باید اتمام پذیرفته، و هنگامی که آن را ترک می‌کنیم جنبه‌ای از آن تا حدّی روشن شده باشد.

تنها آن گونه مسائل بهبود یافته باز می‌گردد که با شور و حرارت مشتاق حلّ آنها بوده‌ایم، یا برای حلّ آنها سخت تلاش و کوشش به خرج داده‌ایم؛ چنان می‌نماید که تلاش و تنش آگاهانه برای به راه انداختن کار ضمیر ناخود اگاه ضرورت دارد. به هر صورت، اگر آسان نبوده است، بسیار آسان خواهد شد؛ تنها با خوابیدن و آرام گرفتن و چشم به راه اندیشهٔ درخشان ماندن، می‌توانیم مسائل دشوار را حل کنیم.

در اعصار گذشته به یک اندیشهٔ نیکو همچون الهام و عطیّه‌ای الاهی و غیبی نگاه می‌کردند، لازم است که با کار، یا دست کم با خواست آرزوی بسیار شدید، شایستگی دریافت این موهبت را پیدا کنید[1].

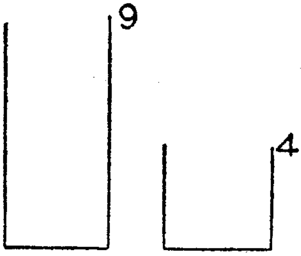
۱- برای آگاهی پیدا کردن بیشتر از «تفکّر ناخودآگاه» به کتاب **روانشناسی اختراع در میدان ریاضیّات** نوشته ژاک هادامار مراجعه کنید.

Jacques Hadamard, The Psychlogię Of Invention in The Mathematical Field.

کار کردن رو به عقب. اگر بخواهیم رفتار آدمی را بفهمیم، باید آن را با رفتار یک جانور مقایسه کنیم. جانوران نیز «مسائلی دارند» و «مسائل را حلّ می‌کنند.» روانشناسی در دهه‌های اخیر، با اکتشاف فعّالیت «مسئلهٔ گشایی» جانوران گوناگون به پیشرفتی اساسی دست یافته است. در این جا نمی‌توانیم از این تحقیقات سخن بگوییم ولی لازم است به صورت خلاصه یک تجربهٔ ساده و آموزنده را بیان کنیم تا توصیف ما همچون گونه‌ای شرح و تفسیر در خصوص روش تحلیل یا روش «کار کردن رو به عقب» بوده باشد. ضمناً باید بگوییم که از این روش در جای دیگری از این کتاب در ذیل نام «**پاپوس** » سخن به میان آمده است که شرح مهمّی از این روش را به او مدیونیم.

۱- می‌خواهیم پاسخی برای این پرسش دشوار پیدا کنیم: **چگونه با دو ظرف آب، یکی به گنجایش نه لیتر و دیگری به گنجایش چهار لیتر، می‌توانیم شش لیتر آب از یک نهر برداریم؟**

بهتر است شکل ظرفها را که می‌خواهیم با آنها کار کنیم، به خوبی برای خود مجسم سازیم. (**چه چیز از مسئله معلوم وداده شده است؟**) دو ظرف



شکل ۲٤

استوانه شکل را با قاعده های برابر که دو ارتفاع آنها نسبت به یکدیگر بر نسبت ۹ به ٤ بوده باشد، درنظر می‌گیریم (شکل ۲٤). اگر بر سطح جانبی هر ظرف خطّ مقیاس مدرّجی وجود می‌داشت که از روی آن می‌توانستیم ارتفاع آب را در ظرف بخوانیم، مسئلهٔ ما آسان می‌شد. ولی چون چنین مقیاسی وجود ندارد، از حلّ مسئله بسیار دوریم.

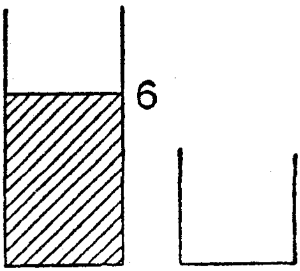
نمی‌دانیم چگونه ٦ لیتر را با این دو ظرف به دست آوریم، ولی آیا می‌توانیم اندازه‌ای دیگر را عملی کنیم؟ (**اگر نمی‌توانید مسئلهٔ طرح شده را حل کنید، نخست در آن بکوشید که مسئله‌ای مربوط به آن را حل کنید. آیا می‌توانید از داده‌ها چیزی به دست آورید؟**) خوب است کاری کنیم و اندکی برگرداگرد شکل بگردیم. می‌توانیم ظرف بزرگ را پرکنیم و چون با ریختن آب این ظرف پرشده در ظرف کوچکتر آن را پرسازیم، در ظرف

بزرگتر ۵ لیتر باقی می‌ماند. آیا از این راه می‌توانیم ٦ لیتر به دست آوریم؟ دو ظرف خالی در اختیار ما است. نیز می‌توانیم....

اکنون به کاری اشتغال داریم که همهٔ کسانی که با این معمّا روبه‌رو شوند چنان خواهند کرد. با دو ظرف خالی آغاز می‌کنیم، این و آن را می‌آزماییم. ظرفها را پر و خالی می‌کنیم، و پس از آن که با یک تجربه موفّق نشدیم به تجربه‌ای دیگر می‌پردازیم. در چنین حالتی رو به پیش کار می‌کنیم، یعنی از یک وضع داده شدهٔ نخستین به وضع مطلوب نهایی، از معلوم (داده) به مجهول. ممکن است اتّفاقاً پس ازچند بار آزمایش موفّق شویم.

۲. ولی مردمانِ دارای قابلیّت استثنایی، یا کسانی که این خوشبختی را داشته‌اند که در کلاسهای درس ریاضی چیزی بیش از عملیّات پیش پا افتاده و معمولی بیاموزند، در چنین آزمایشها دقّت زیادی مصرف نمی‌کنند بلکه به گردشی در پیرامون می‌پردازند و سپس به کارکردن روبه عقب برمی‌خیزند.

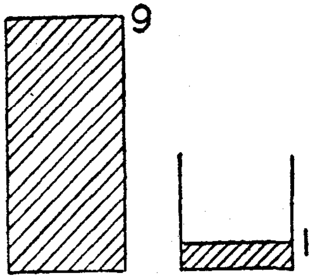
از ما چه چیز خواسته‌اند؟ (مجهول چیست؟) بهتر است وضع نهایی را که منظورنظر است هرچه روشنتر مجسّم سازیم. فرض کنید که ظرف بزرگ را با ٦ لیتر آب در داخل آن در کنارظرف خالی ٤ لیتری (شکل ۲۵) در برابر خود داشته باشیم. **(به گفتهٔ پاپوس، از آنچه خواسته شده آغاز و چنان فرض می‌کنیم که به آنچه خواسته شده دست یافته‌ایم.)**



شکل ۲۵

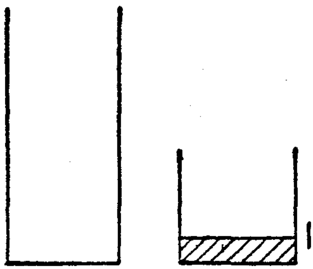
از کدام وضع پیشین می‌توانیم وضع مطلوب نهایی راکه درشکل ۲۵ نشان داده شده است به دست آوریم؟ **(به گفته پاپوس، باید تحقیق کنیم که از کدام مقدّمه ممکن است نتیجهٔ مطلوب حاصل شود.)** البتّه می‌توانیم ظرف بزرگ را به اندازهٔ تمام گنجایش آن، یعنی ۹ لیتر، پر کنیم. ولی لازم است پس از آن بتوانیم درست ۳ لیترآب را از آن بیرون بریزیم. برای این کار.... می‌بایستی یک لیتر آب در ظرف کوچک داشته باشیم! فکراین است.

(گامی که هم‌اکنون آن را به پایان رساندیم، به هیچ وجه آسان نیست. معدودی از اشخاص می‌توانند بدون تردید فراوان این گام را بردارند. در حقیقت با شناختن اهمّیت این گام طرحی را از حلّی که پس از این خواهد آمد پیشبینی می‌کنیم.)



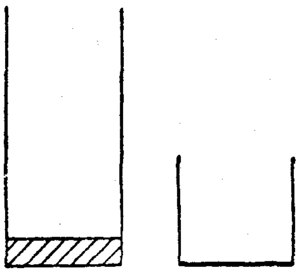
شکل ٢٦

ولی آیا چگونه می‌توانیم به وضعی که هم‌اکنون یافتیم و آن را با شکل ٢٦ مجسم ساختیم برسیم؟ (بهتر است باردیگر تحقیق کنیم که مقدّم بر مقدّمهٔ قبلی چه چیز می‌تواند باشد.) چون مقدار آب در نهر، برای منظور ما، نامحدود است، وضع شکل ٢٦ همان وضعی است که در شکل بعدی ٢٧ نمایش داده شده است.



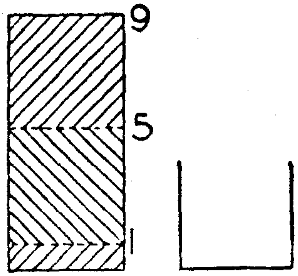
شکل ٢٧

یا در شکل ٢٨ :



شکل ٢٨

به آسانی می‌توان متوجّه این امر شد که اگر یکی از سه وضع اشکال ۲٦ و ۲۷ و ۲ به دست آمده باشد، هریک از دو وضع دیگر به آسانی در دسترس ما قراردارد، ولی ست یافتن به وضع شکل ۲۸ چندان آسان نیست مگر این که **پیشتر آن را دیده باشیم**، و ، صورت اتّفاقی در یکی از آزمایشهای قبلی توجّه ما را به خود جلب کرده باشد. در ممن گردش در پیرامون با دو ظرف، ممکن است، کار مشابهی انجام داده باشیم و آن اکنون در لحظهٔ مناسب به یادآوریم که وضع شکل ۲۸ می‌تواند از آنچه در شکل ۲۹



شکل ۲۹

نمایش داده ایم نتیجه شده باشد: ظرف بزرگ را با تمام گنجایش آن پر می‌کنیم، که با دوبار پر کردن ظرف ٤لیتری از آب آن و ریختن این آبها در نهر تنها یک لیتر آب در ظرف بزرگ باقی می‌ماند. از این راه، **سرانجام به چیزی می‌رسیم که پیشتر دانسته بود** (اینها کلمات پاپوس است) و با پیروی از روش تحلیل و **کارکردن روبه عقب** از رشتهٔ عملیات مناسب آگاه می‌شویم.

درست است، ما رشتهٔ درست و مناسب عملیّات را به صورت قهقرایی یافته‌ایم، ولی آنچه برای انجام دادن باقی می‌ماند **معکوس فرایند است و آغازکردن از آخرین نقطه‌ای که در تحلیل به آن رسیدیم** (چنانکه پاپوس گفته است.) نخست آنچه را که شکل ۲۹ نشان می‌دهد انجام می‌دهیم و شکل ۲۸ را به دست می‌آوریم؛ سپس به شکل ۲۷ و پس از آن به شکل ۲٦ و در پایان به شکل ۲۵ می‌رسیم. **با دوباره رسم کردن گامها، سرانجام به آن توفیق یافتیم که مطلوب مسئله را به دست آوریم.**

۳. در روایت یونانی، اکتشاف روش تحلیل (آنالیز) به افلاطون منسوب است. ممکن است این روایت کاملاً درست نباشد امّا، به هر صورت، اگر این روش اختراع افلاطون نبوده، دانشمندی یونانی لازم دانسته است که اختراع آن را به کسی که دارای نبوغ

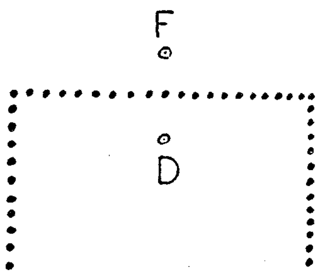
فلسفی است نسبت دهد.

محقّقاً در این روش چیزی است که بیمایه وسطحی نیست. در گردش در پیرامون ودورشدن از هدف وکارکردن قهقرایی وپیروی نکردن از راه مستقیم رسیدن به هدف، یک دشواری روانشناختی وجود دارد. هنگامی که توالی عملیّات مناسب را کشف می‌کنیم، فکر وعقل باید به ترتیبی پیش رود که درست عکس عملی است که واقعاً انجام می‌گیرد. گونه‌ای اکراه وبیمیلی روانشناختی برای پیروی از این ترتیب واژگونه وجود دارد که ممکن است مانع فهم دانشجوی کاملاً شایسته‌ای نسبت به این روش شود که آن را چنان که باید وشاید براو عرضه نداشته‌اند.

نبوغ خاصّی برای حل کردن قهقرایی مسئله لازم نیست؛ هرکس باتوسّل به اندکی عقل سلیم می‌تواند این کار را انجام دهد. لازم است اندیشهٔ خود را برروی هدف مطلوب متمرکز سازیم، وآن وضع نهایی را که می‌خواهیم به آن برسیم پیش خود مجسّم کنیم. آیا از کدام وضع پیشین می‌توانیم به آنجا برسیم؟ پرسیدن این سؤال طبیعی است، وبا پرسیدن آن رو به عقب کار می‌کنیم. حلّ مسائل بسیار ابتدایی طبیعتاً به کارکردن قهقرایی می‌انجامد؛ نگاه کنید به **پاپوس، ٤**.

رو به عقب کارکردن روشی برخاستهٔ از عقل سلیم است که در دسترس هرکس قرار دارد، ونمی‌توانیم در این شک داشته باشیم که پیش از افلاطون ریاضیدانان و جز آنان با آن عمل می‌کرده‌اند. آنچه یک دانشمند یونانی ممکن است به آن همچون یک دستاورد شایستهٔ نبوغ افلاطون نظر کرده باشد، بیان این روش با اصطلاحات کلّی و معرّفی کردن آن به صورت الگویی عملی و سودمند برای حلّ مسائل ریاضی و غیرریاضی بوده است.

۴۰ و اکنون به بیان آزمایش روانشناختی می‌پردازیم - اگر انتقال از افلاطون به سگها و مرغها و بوزینه‌ها ناگهانی و زشت نبوده باشد. نرده‌ای از سه طرف یک عرصهٔ به شکل مستطیل را احاطه کرده که طرف چهارم آن باز است (شکل ۳۰). سگی را پشت



شکل ۳۰

این نرده درنقطهٔ D قرار می‌دهیم، و مقداری خوراکی را درآن سوی نرده درنقطهٔ F حلّ مسئله برای سگ‌کاملاً آسان است. نخست وضعی به خود می گیرد که گویی‌می‌خواهد یک مرتبه بجهدوخودرا به خوراکی‌برساند، ولی‌بلافاصله ازآن منصرف می‌شود و پشت نرده گردش می‌کند و سرانجام با یافتن راه خروج بیرون می‌رود و خود را به غذا می‌رساند. ولی، گاهی که نقطه‌های D و F نزدیک به یکدیگر باشند، راه حل به این هموازی نیست؛ ممکن است سگ مدّتی وقت را برای فشردن و شکستن نرده یا جهیدن از بالای آن تلف کند تا این که سرانجام به «اندیشهٔ درخشانِ» (چنانکه ما می‌گوییم) دورگشتن و بیرون‌رفتن برسد.

مقایسه‌کردن رفتار جانوران متفاوت در برخورد با چنین وضعی در صورت قرارگرفتن به جای سگ جالب توجّه است. حلّ این مسئله برای یک شمپانزه یا یک کودک چهار ساله (که‌برای او یک اسباب‌بازی جذّابیّت بیشتر از خوراکی دارد) بسیار آسان است. ولی برای یک مرغ خانگی حل این مشکل به صورتی شگفت‌انگیز دشوار می‌نماید که مدتها با حالت بسیار تحریک‌شده به پس و پیش و این سو و آن سو می‌رود و خود را به نرده می‌زند تا پس از گذشتن مدتی دراز- اگر اصلاً برایش امکانپذیر باشد- خود را به طعمه برساند. احتمال دارد که پس از مدّتی دویدن برحسب اتّفاق کامیاب شود.

۵. البته نباید برروی آزمایشی که به صورت طرح گزارش شده، یک نظریّهٔ کلّی بنا کنیم. ولی توجّه کردن به شباهتها وتمثیلهای آشکار، به شرط آن که آمادهٔ وارسی مجدّد و ارزشیابی جدید آن باشیم، عیبی ندارد.

گشتن در پیرامون یک مانع همان کاری است که ما درحلّ هر گونه مسئله انجام می‌دهیم؛ آزمایش یک ارزش نمادی دارد. مرغ همچون کسانی عمل می کند که مسئلهٔ خود رابا سرهم بندی کردن وکوشیدن مکرّر در مکرّر حل می کنند وسرانجام بامساعدت یک اتّفاق مایهٔ خوشبختی و بدون بصیرت داشتن نسبت به دلایل کامیابی خود به موفّقیّت می‌رسند. سگ که پیش از دور گشتن می‌جهید وپارس می کرد و چنگ می‌زد، مسئلهٔ خود رابه صورتی حل کرد که ما مسئلهٔ دربارهٔ دوظرف ۹و ٤ لیتری راحل کردیم. تخیّل کردن خطّ مدرّجی بر روی ظرف که سطح آب را درآن نشان دهد، تقریباً به گونه‌ای از چنگ زدن بیحاصل شباهت داشت، و تنها این رانشان می‌داد که آنچه ما درصدد یافتن آن هستیم درجایی عمیقتر در زیر سطح قرار گرفته است. نیز نخست درآن کوشیدیم که رو به جلو کار کنیم، و سپس به اندیشهٔ دور زدن رسیدیم. سگ که،

پس از وارسی کوتاه وضع، به دورزدن پرداخت و حرارت به خرج داد، درست یا نادرست اثر بصیرتی عالیتر را نشان داد.

نباید مرغ خانگی را به سبب ناشیگری در رسیدن به طعمه ملامت کنیم. درگشتن پیرامون و دور شدن از هدف و اقدام کردن بدون نگریستن به هدف، مقداری دشواری وجود دارد. شباهتی آشکار میان دشواریهای مرغ و دشواریهای ما مشاهده می‌شود.

لایبنیتس، گوتفرید ویلهلم (۱۷۱۶-۱۶٤٦)، ریاضیدان وفیلسوف بزرگ طرحی برای تألیف یک کتاب دربارهٔ «هنر اختراع» ریخت ولی هرگز آن را به اجرا درنیاورد. باوجود این، قطعات پراکنده‌ای از آثارش نشان می‌دهد که وی اندیشه‌های جالب توجّهی دراین خصوص داشته که غالباً اهمّیت آنها مورد تأکید قرار گرفته است. مثلاً، جملهٔ ذیل از نوشته‌های او است: «هیچ چیز مهمتر از دیدن سرچشمه های اختراع نیست که، به اعتقاد من، از خود اختراعات جالب توجّه‌تر است.»

متناقض. رجوع کنید به **شرط.**

مجهول چیست؟ چه چیز خواسته شده؟ چه می‌خواهید؟ فرض آن است که درجستجوی چه چیز تلاش می‌کنید؟

داده‌ها چیست؟ چه چیز معلوم است؟ چه چیز دارید؟

شرط چیست؟ باچه شرطی مجهول به داده‌ها پیوسته است؟

دانشاموز می‌تواند این پرسشها را برای آزمایش اندازهٔ فهم دانشاموزان از مسئله مطرح کند، دانش‌آموز باید بتواند پاسخ این پرسشها را به روشنی و وضوح بدهد. علاوه براین، استاد توجّه دانشجو را به بخشهای اساسی یک مسئله یعنی مجهول و داده‌ها و شرط جلب می‌کند. هروقت که ملاحظهٔ این بخشها بار دیگر لازم به نظر برسد، این سؤالها تکرار می‌شود، و حتّیٰ درمرحلهٔ پایانی حلّ مسئله نیز ممکن است معلّم بار دیگر به طرح یکی از این سؤالات بپردازد. (مثالهایی دربخشهای ۸ و ۱۰ و ۱۸ و ۲۰، و درمقاله‌های **تنظیم و نوشتن معادلات** ۳ و ٤، **مسائل عملی**، ۱، **معماها**، و جاهای دیگر.)

پرسشها برای شخص حل کنندهٔ مسئله بزرگترین اهمّیت را دارد. از این راه اندازهٔ

فهم خود را از مسئله به دست می‌آورد و کمال توجه خود را به این یا آن قسمت از مسئله معطوف می‌دارد. حل کردن هر مسئله اساساً عبارت از پیوند دادن مجهول به داده‌ها است. بنابراین، حل کنندهٔ مسئله باید مکرّر در مکرّر فکر خود را درآن عوامل متمرکز سازد وبپرسد: **مجهول چیست؟ داده‌ها چیست؟**

مسئله ممکن است چند مجهول داشته باشد، یا شرط مشتمل برچند جزء باشد که لازم است هریک ازآنها جداگانه در نظر گرفته شود، یا این که گاه لازم آید که یکی از داده‌ها را به تنهایی مورد توجّه قرار دهیم.

بنابراین، باید پرسشهای خود را به صورتهای گوناگون طرح کنیم، همچون: **مجهولها کدام است؟ نخستین داده چیست؟ دومین داده کدام است؟ اجزاءِ مختلف شرط کدامها هستند؟ نخستین جزءِ (قید) شرط چیست؟**

بخشهای اساسی یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» عبارت است از فرض و نتیجه، وپرسشهای متناظر با آنها چنین است: **فرض چیست؟ نتیجه چیست؟** شاید لازم شود که به بیان لفظی این پرسشها تغییری بدهیم، یا بیان لفظی پرسشهایی را که زیاد طرح می‌شود به شکل دیگری در آوریم: **چه چیز را فرض می‌کنید؟ اجزاءِ مختلف فرض شما کدام است؟** (مثالهایی در بخش ۱۹ .)

محالنمای مخترع. نقشهٔ بلند پروازتر ممکن است فرصتهای کامیابی بیشتر داشته باشد.

این گفته محالنما می‌نماید. باوجود این، هنگامی که از یک مسئله به مسئلهٔ دیگری می‌گذریم، غالباً امکان این ملاحظه برای ما فراهم می‌آید که برخورد با مسئلهٔ تازه وبلندپروازتر آسانتر از برخورد با مسئلهٔ اصلی است. قضیّهٔ جامعتر وپردامنه‌تر ممکن است آسانتر به اثبات برسد، وبه همین‌گونه حل کردن مسئلهٔ کلّیتر آسانتر است.

چون از نزدیک به معدودی از مثالها نگاه کنیم، محالنما (paradox) از میان می‌رود (**تعمیم، ۲، استقراء و استقراءِ ریاضی، ۷**)، برای نقشهٔ اجرائی بلندپروازتر بدان شرط امید موفّقیّت می‌رود که تنها مبتنی بر ادّعا نباشد بلکه درآن دیدن چیزهایی در ماورای چیزهایی که بلافاصله حضور آنها را احساس می‌کنیم امکانپذیر باشد.

مسائل عملی از جهات گوناگون با مسائل ریاضی محض تفاوت دارند، و باوجود این انگیزه‌های اصلی و روشهای حل اساساً همان است. مسائل عملی مهندسی معمولاً مستلزم حلّ مسائل ریاضی است. چند کلمه‌ای در بارهٔ تفاوتها و شباهتها و ارتباطهای میان این دو گونه مسائل سخن خواهیم گفت.

۱. یک مسئلهٔ عملی عظیم ساختن سدّی بر روی یک رودخانه است. برای فهمیدن این مسئله به شناخت خاصّی نیاز نداریم. در روزگار تقریباً ماقبل تاریخی، بسیار پیش از عصر جدید و نظریّه‌های علمی ما، انسانهای آن زمان سدهایی بر درهٔ رودنیل و در جاهای دیگر جهان بسته بودند که درآن جاها به دست آمدن محصول در گرو آبیاری بود.

بهتر است مسئلهٔ ساختن سدّ مهمّی را درزمان حاضر در نظر بگیریم.

مجهول چیست؟ در مسئله‌ای از این گونه پای چند مجهول به میان می‌آید: محلّ درستِ بستن سدّ و شکل هندسی و ابعاد آن و موادّی که در ساختن آن باید به مصرف برسد و نظایر اینها.

شرط چیست؟ به این پرسش بایک جملهٔ کوتاه نمی‌توانیم پاسخ بدهیم، بدان جهت که درآن شرطهای چندی وجود دارد. در اجرای طرحی به این بزرگی لازم است بعضی از نیازهای مهمّ اقتصادی تأمین شود و به نیازهای دیگر هرچه کمتر آسیب برسد. سد باید نیروی برق فراهم آورد، و آب کشاورزی یا مصرفی را ذخیره کند و نیز برای مهارکردن سیلها سودمند باشد. ازسوی دیگر، لازم‌است‌امر کشتیرانی‌برروی‌رودخانه را هرچه کمتر مختل کند و به صید ماهی آسیب نرساند و چشم‌اندازهای زیبا را بدون ضرورت نابود نکند. و البتّه باید تا حدّ امکان هزینهٔ کم بردارد و هرچه سریعتر ساختن آن به پایان برسد.

داده‌ها چیست؟ شمارهٔ داده‌های مطلوب بسیار است. به داده‌های موضعنگاری مربوط به زمینهای مجاور رودخانه و ریزابه‌های آن نیاز داریم؛ داده‌های زمینشناختی برای تأمین استحکام شالودهٔ سدّ و جلوگیری از نشت کردن آب و تأمین مصالح ساختمانی خوب و در دسترس ضرورت دارد؛ داده‌های مربوط به هواشناسی در خصوص ریزش باران و برف سالانه و ارتفاع سیلابها نیاز داریم؛ اطّلاعات اقتصادی در بارهٔ ارزش زمینهایی که با بستن سد در آب غرق می‌شود و بهای مصالح و کار و جز اینها.

مَثَل ما نشان می‌دهد که مجهولها و داده‌ها و شرطها بسیار پیچیده است و به دقّت

یک مسئلهٔ ریاضی قابل تعیین و تجدید نیست.

۲ • برای حل کردن یک مسئله به مقداری شناخت که از پیش به دست آورده باشیم نیازمندیم. مهندس نوین مقدار اطّلاعات دست‌بالایی در اختیار دارد، و از نظریّهٔ علمی مقاومت مصالح آگاه است، و توده‌ای از تجربیّات مهندسی در نوشته‌های گوناگون فنّی خاص در دسترس او است. ما خود نمی‌توانیم در اینجا از این شناخت خاص استفاده کنیم ولی می‌توانیم برای تخیّل کردن آنچه در فکر سدساز قدیمی مصر می‌گذ شته است تلاش کنیم.

او البتّه شاید سدهای کوچک گوناگون دیگر را دیده بود: همچون برآمدگیهای زمین یا ساختمانهایی که از پیشروی آب جلوگیری می‌کرد و آب را در پشت خود نگاه می‌داشت. سیل را دیده بود که آکنده از هر گونه چیزها است که از جا می‌کند و با خود می‌برد. ممکن بود به ترمیم شکافها و آبرفتهایی که پس از پایان یافتن سیل بر جای می‌ماند کومک کرده باشد. شاید دیده بود که چگونه سد درنتیجهٔ فشار سیلاب می‌شکند و خرابی به بار می‌آورد. قطعاً داستانهایی دربارهٔ بعضی از سدها شنیده بود که قرنها بر سر پا مانده یا بر اثر شکستن ناگهانی فاجعه به بار آورده بوده‌اند. فکر او فشار رودخانه را بر سطح سد تصوّر می‌کرد و از فشار و تنش درون آن آگاهی داشت.

ولی سدساز مصری تصوّر دقیق و کمّی و علمی ازفشار آب یا تنش و تلاش درجسم جامد آگاهی نداشت. این مفاهیم قسمت اساسی افزار عقلی یک مهندس نوین را تشکیل می‌دهد. ولی همین مهندس نیز مقداری شناخت را به کار می‌برد که هنوز به تراز علمی دقیق نرسیده، آنچه از فرسایش بر اثر جریان آب و انتقال یافتن رسوبها و کشسانی و دیگر خواصّ کاملاً تعیین نشدهٔ بعضی از مصالح می‌داند، شناختی است که بیشتر رنگ تجربی و اختباری دارد.

مثال ما نشان می‌دهد که شناخت مورد نیاز ومفاهیم به کاررفته در مسائل عملی بسیار پیچیده‌تر از مسائل ریاضی است و کمتر از آنها به صورت دقیق تحدید و تعیین می‌شود.

۳. مجهول و داده‌ها و شرایط و مفاهیم و شناخت ضروری مقدّماتی، همه در مسائل عملی پیچیده‌تر و غیردقیقتر از آن است که در مسائل ریاضی محض دیده می‌شود. این تفاوت مهم و شاید تفاوت عمده، و محقّقاً متضمن تفاوتهای بیشتر است؛ با وجود این، انگیزه‌ها و روشهای حلّ برای هردونوع مسئله شبیه هم به نظر می‌رسد.

اعتقادی بسیار شایع حاکی از آن است که حلّ مسائل عملی به تجربه

و آزمودگی داشتنی بیش از آن نیازمند است که برای مسائل ریاضی ضروری به نظر می‌رسد. با این همه، به احتمال بسیار قوی، تفاوت اختلاف در ماهیت شناخت مورد نیاز است نه در ایستار ما نسبت به مسئله. در حلّ مسئله‌ای از یکی از این دو نوع، باید بر تجربه‌ای که خود در حلّ مسئلهٔ مشابهی داشته‌ایم اعتماد کنیم و غالباً این سؤالها طرح می‌شود: **آیا همین مسئله را با شکلی اندک متفاوت دیده‌اید؟ آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟**

در حلّ یک مسئلهٔ ریاضی، از مفاهیم بسیار روشنی آغاز می‌کنیم که به خوبی در فکر و ذهن ما مرتب شده‌اند. در حلّ یک مسئلهٔ عملی، غالباً مجبوریم که کار را بیشتر با اندیشه‌های مبهم آغاز کنیم، سپس، واضح و روشن ساختن تصورها و مفاهیم جزءِ مهمّی از مسئله می‌شود. علم پزشکی امروز از لحاظ تحقیق و وارسی در بیماریهای عفونی در وضعی بهتر از وضع زمان پیش از پاستور قرار دارد که خودِ مفهوم عفونت مبهم و مهالود بود. **آیا همهٔ مفاهیم مندرج در مسئله را به حساب آورده‌اید؟** این پرسشی خوب برای هر گونه مسئله است، ولی کاربرد آن بنا بر ماهیّت مفاهیمی که در کار می‌آید متغیّر است.

در یک مسئلهٔ ریاضی که خوب بیان شده، همهٔ داده‌ها و قیدهای شرط ضرورت دارند و باید به حساب آیند. در مسائل عملی مقدار فراوانی از داده‌ها و شرطها داریم؛ تا آنجا که بتوانیم اینها را به حساب می‌آوریم ولی ناگزیر باید از بعضی از آنها غفلت کنیم. مثال طرّاح نقشهٔ سدرا در نظر بگیرید. وی منافع عمومی و سودمندیهای اقتصادی مهم را در نظر می‌گیرد، ولی ناگزیر از توجّه کردن به بعضی از ادّعاها و شکایتها وناخرسندیهای کوچک خودداری می‌کند. داده‌های مسئلهٔ وی، اگر درست بخواهیم سخن بگوییم، پایان ناپذیر است. مثلاً، وی دوست دارد که در بارهٔ ماهیّت زمینشناختی زمینی که سدبرروی‌آن‌بنامی‌شوداندکی‌بیشترچیزبداند،ولی‌سرانجام‌گردآوری‌اطّلاعات زمینشناختی را متوقّف می‌کند وبا باقی ماندن مقداری عدم یقین اجتناب ناپذیر کار ترسیم نقشه را به پایان می‌رساند.

آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را به کار بردید؟ هنگامی که با مسائل ریاضی سروکار داریم، نباید این پرسشها را فراموش کنیم. ولی، در مسائل عملی باید به این پرسشها صورت دیگری بدهیم: آیا همهٔ داده‌هایی را که در حلّ مسئله **می‌تواند سهم قابل توجّهی داشته باشد** مورد استفاده قرار دادید؟ آیا از همهٔ شرطهایی که در حلّ مسئله **می‌تواند تأثیر قابل توجّهی داشته باشد** بهره‌گیری کردید. به مخزن اطّلاعات مربوط به

مسئله که در دسترس قرار گرفته باشد مراجعه می‌کنیم، واگر لازم باشد به گرداوری اطّلاعات بیشتر می‌پردازیم، ولی سرانجام باید از گرداوری باز ایستیم، وخود را به حدّی محدود کنیم و ناگزیر نسبت به بعضی از چیزها غفلت نشان دهیم. «اگر می‌خواهید در دریا بدون خطر سفر کنید، باید هرگز قدم به دریا نگذارید.» اغلب اوقات مقدار زیادی از داده‌ها می‌ماند که هیچ تأثیری برحلّ نهایی ندارد.

٤. طرّاحان پلها در مصر قدیم می‌بایستی به تفسیر مطابق رأی عقل سلیم از تجربهٔ خود اعتماد کنند وچیز دیگری برای تکیه کردن به آن در اختیار خود نداشتند. مهندس نوین نمی‌تواند تنها برعقل سلیم متّکی باشد، مخصوصاً اگر طرح مربوط به چیزی تازه وتهوّرآمیز باشد؛ وی باید مقاومت سدّ طرح شده را محاسبه کند، وبه صورت کمّیِ فشار وتنش درونی آن را پیشبینی کند. به این منظور باید نظریّهٔ کسانی را (که به خوبی قابل تطبیق در ساختمانهای سیمانی است) در محاسبات خود مورد استفاده قرار دهد. برای رسیدن به این هدف به مقدار فراوانی ریاضیات نیازمند است. حل کردن مسئلهٔ عملی مهندسی به حل یک مسئلهٔ ریاضی می‌انجامد.

این مسئلهٔ ریاضی بیش از آن جنبهٔ فنّی دارد که در اینجا بتوانیم آن را مورد بحث قرار دهیم؛ آنچه دربارهٔ آن می‌توانیم بگوییم یک ملاحظهٔ کلّی است. در ساختن و پرداختن و حل کردن مسائل ریاضی متفرّع شدهٔ از مسائل عملی، معمولاً خود را به تقریب راضی می‌کنیم. ناگزیر باید از بعضی از شرایط و داده‌های کوچک مسئلهٔ عملی چشم بپوشیم. بنابراین مجاز شمردن اندکی نادرستی در محاسبات معقول به نظر می‌رسد، مخصوصاً در آن هنگام که به جای آن چه از لحاظ صحّت از دست می‌دهیم چیز دیگری از لحاظ سادگی به دست می‌آوریم.

۵. دربارهٔ تقریب بسیار چیزها می‌توان گفت که شایستهٔ توجّه کلّی باشد. ولی، نمی‌توانیم شناخت ریاضی خاصّی را شرط آن بدانیم و به همین جهت خود را به آوردن مثالی شهودی و آموزنده محدود می‌کنیم.

ترسیم نقشه‌های جغرافیایی یک مسئلهٔ عملی مهمّ است. در طرح یک نقشه چنان فرض می‌شود که زمین به شکل کره است. ولی این تقریبی بیش نیست و حقیقت راستین به شمار نمی‌رود. سطح زمین هرگز به شکل ریاضی یک سطح معیّن و تحدید شده نیست و به یقین می‌دانیم که زمین در قطبین فرو رفته و پخیده است. با کروی فرض کردن زمین، نقشه‌ای از آن را آسانتر می‌توانیم ترسیم کنیم. از این راه مقدار فراوانی سادگی

بهرهٔ ما می‌شود و آنچه به خاطر عدم صحّت از دست می‌دهیم در مقایسهٔ با آن چندان زیاد نیست. فرض کنید که بالونی کروی درست به شکل زمین با قطری برابر با ۲۵ متر در استوای آن داشته باشیم. فاصلهٔ میان دو قطب این کره کمتر از ۲۵ متر است، بدان جهت که زمین در دو قطب فرورفتگی دارد، ولی این تفاوت فاصله کمتر از ۳ سانتیمتر است و به همین جهت کروی فرض کردن زمین تقریب عملی خوبی است.

مسائل یافتنی، مسائل ثابت کردنی. به مقایسه و بیان وجوه شباهت میان این دو می‌پردازیم.

۱. هدف یک «مسئلهٔ یافتنی» به دست آوردن چیزی است که عبارت از مجهول مسئله است.

مجهول را به نامهای مطلوب و خواسته شده نیز می‌نامند. «مسئلهٔ یافتنی» ممکن است نظری باشد یا عملی، مجرّد یا مجسّم، جدّی یا فقط معمّایی. باید همه‌گونه مجهول را درنظر داشته باشیم؛ باید چشم به راه همه‌گونه مجهول باشیم؛ ممکن است لازم باشد که همه‌گونه چیزهای قابل تخیّل را بیابیم یا به دست بیاوریم یا کسب کنیم یا تولید کنیم یا بسازیم. در مسئلهٔ داستانهای اسرارآمیز مجهول یک قاتل است. در مسئله‌ای از شطرنج مجهول حرکتی است که شطرنجباز باید به یکی از مهره‌های خود بدهد. در بعضی از معمّاها مجهول یک کلمه است. در پاره‌ای از مسائل مقدّماتی جبر مجهول یک عدد است. در مسئلهٔ ساختمانی هندسه مجهول کشیدن یک شکل است.

۲. هدف یک «مسئله ثابت کردنی» اثبات قطعی صحّت یک ادّعا یا اثبات قطعی عدم صحّت آن است. باید به این پرسش پاسخ دهیم: آیا این ادّعا درست است یا نادرست؟ و ما باید به صورت قطعی درستی یا نادرستی آن را به اثبات برسانیم.

در محکمهٔ دادگستری یک گواه شهادت می‌دهد که در فلان شب متّهم در خانه بوده است. قاضی باید به این واقعیّت برسد که ادّعای شاهد درست است یا نادرست، و علاوه براین باید تا آنجا که ممکن است زمینه‌های خوبی برای نظرخود به دست بیاورد. بنابراین قاضی با یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» روبه‌رواست. «مسئلهٔ ثابت کردنی» دیگر «اثبات قضیّهٔ فیثاغورس است.» نمی‌گوییم: «قضیّهٔ فیثاغورس را ثابت یا رد کن.» از بعضی از جهات بهتر آن است که در صورت بیانی مسئله امکان یا عدم امکان اثبات گنجانده شود، ولی دراین مورد از آن غفلت می‌کنیم، بدان جهت که می‌دانیم احتمال رد کردن قضیّهٔ فیثاغورس بسیارکم است.

۳. **قسمتهای اصلی «مسئلهٔ یافتنی» عبارت است از مجهول و داده‌ها و شرط.**
اگر بخواهیم مثلّثی با اضلاع a و b و c بسازیم، مجهول یک مثلّث است و داده‌ها طولهای a و b و c، و شرط آن است که مثلّث مطلوب شرط داشتن اضلاعی به طولهای a و b و c را تأمین کند. اگر بناباشد مثلّثی با ارتفاعهای a و b و c بسازیم، مجهول چیزی است از گونهٔ مجهول مسئلهٔ پیش از آن و داده‌ها همانها است، ولی شرطی که مجهول را به داده‌ها می‌پیوندد تفاوت پیداکرده است.

٤. اگر «مسئلهٔ ثابت کردنی» یک مسئلهٔ ریاضی از گونهٔ معمولی باشد، اجزاءِ اصلی آن عبارت است از **فرض** و **نتیجهٔ** قضیّه‌ای که باید اثبات یا نفی شود.
«اگر اضلاع یک چهارضلعی برابرباشند، در آن صورت دوقطر در آن بریکدیگر عمود خواهند بود». قسمت دوم که با «درآن صورت» شروع شده نتیجه است، و قسمت اوّل که با «اگر» آغازشده فرض است.
[همهٔ قضایای ریاضی را نمی‌توان به صورت طبیعی به دوقسمت فرض و نتیجه تقسیم کرد. مثلاً، کمتر احتمال آن می‌رود که این قضیّه را بشکنیم و دوقسمت فرض و نتیجه را از آن بیرون بیاوریم: «شمارهٔ اعداد اوّل بینهایت است.»]
۵. اگر بخواهید یک «مسئلهٔ یافتنی» را حل کنید، باید قسمتهای اصلی آن یعنی مجهول و داده‌ها و شرط را بشناسید و بسیار درست بشناسید. فهرست ما مشتمل بر پرسشها و پیشنهادهایی مربوط به این قسمتها است.

مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ نتیجه چیست؟
قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید.
ارتباط میان داده‌ها ومجهول را پیدا کنید.

به مجهول نگاه کنید؟ وبکوشید تا دربارهٔ مسئله‌ای آشنا بیندیشید که همین مجهول یا چیزی شبیه به آن را داشته باشد.

تنها یک جزءِ از شرط را نگاه دارید وجزءِ دیگر را کنار بگذارید؛ آیا در این صورت مجهول تا چه حد معیّن می‌شود، وچگونه ممکن است تغییر پیدا کند؟ آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟ آیا می‌توانید دربارهٔ داده‌های دیگر مفید برای تعیین مجهول بیندیشید؟ آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها یا اگر لازم باشد هردو را چنان تغییر دهید که مجهول وداده‌ها به یکدیگر نزدیکتر باشند؟

آیا همهٔ داده‌ها را به کار بردید؟ آیا همهٔ شرط را به کار بردید؟

٦. اگر بخواهید یک «مسئلهٔ ثابت کردنی» را حل کنید، باید قسمتهای اصلی آن

را که عبارت از فرض ونتیجه است بشناسید وخوب بشناسید. پرسشها وپیشنهادهایی سودمند مربوط به این قسمتها در فهرست ما وجود دارد که به صورت خاص قابل تطبیق در «مسائل یافتنی» است.

فرض چیست؟ نتیجه چیست؟

قسمتهای مختلف فرض را از یکدیگر جدا کنید.

ارتباط میان فرض ونتیجه را به دست آورید.

به نتیجه نگاه کنید! وبکوشید تا دربارهٔ قضیّه‌ای بیندیشید که همین نتیجه یا چیزی شبیه به آن را داشته باشند.

تنها یک قسمت از فرض را نگاه دارید وقسمت دیگر آن را کنار بگذارید؛ آیا نتیجه هنوز درست است؟ آیا می‌توانید از فرض چیزی سودمند استخراج کنید؟ آیا می‌توانید دربارهٔ فرض دیگری بیندیشید که‌بتوانیداز آن به‌آسانی‌نتیجه‌رااستخراج کنید ؟آیامی‌توانیدفرض‌یانتیجه یادرصورت لزوم هردو را چنان تغییردهیدکه فرض تازه و نتیجهٔ تازه به یکدیگر نزدیکترباشند؟

آیا همهٔ فرض را به کارگرفتید؟

۷. «مسائل یافتنی» در ریاضیّات مقدّماتی مهمتر است و «مسائل ثابت کردنی» در ریاضیّات پیشرفته. درکتاب حاضر دربارهٔ «مسائل یافتنی» بیش از «مسائل ثابت کردنی» تأکید شده است، ولی نویسنده امیدوار است که هنگام بحث کاملتر دربارهٔ این موضوع تعادل برقرارشود.

مسئلهٔ عادی. معادلهٔ حل کردنی $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورتی می‌توانیم مسئله‌ای عادی بخوانیم که حل معادلهٔ درجهٔ دوم پیش ازآن چنان توضیح و تصویر شده باشد که دانشجوجز جانشین کردن اعداد ۳- و ۲ به جای بعضی ازحروف که درحلّ کلّی دخالت می‌کند کاری نداشته باشد. حتّیٰ اگر معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت کلّی با «حروف» حل نشده باشد، ولی نیم دوجین معادلات درجهٔ دوم عددی مشابه با ضریبهای عددی حل شده باشد، باید آن را یک «مسئلهٔ عادی» یا «مسئلهٔ پیش پاافتاده» بخوانیم. به صورت کلّی، مسئله‌ای را «مسئله عادی» می‌خوانند که در آن باید داده‌هایی وارد یک مسئله کلّی که پیشتر حل شده است بشود، یا باید گام به گام، بدون وجود اثری از ابتکار از یک نمونهٔ کهنه تقلید و پیروی شود. پس از طرح یک مسئلهٔ عادی، معلّم بلافاصله خود درکار دخالت می‌کند و به جای دانشجو پاسخ این پرسش را که: «**آیا از مسئلهٔ وابسته‌ای آگاهی دارید؟**» می‌دهد. بنابراین دانشجو به چیزی جز اندکی

دقّت و شکیبایی برای پیروی ازیک دستور حاضر و آماده نیازمند نیست و فرصتی برای به کار انداختن داوری یا ملکهٔ اختراع ندارد.

مسائل عادی بسیاری ممکن است برای آموزش ریاضیّات ضروری باشد ولی اگر چنان شود که دانشجویان به کاری از گونهٔ دیگر بپردازند گناهی نابخشودنی صورت گرفته است. تعلیم دادن انجام مکانیکی عملیّات عادی وپیش پا افتاده ریاضی وچیزی جز آن تعلیم ندادن، حتّیٰ از تراز کتاب دستورهای آشپزی هم پایینتر است، چه درکتابهای آشپزی مقداری جا برای به کار افتادن تخیّل وداوری آشپز باقی است، ولی در نسخه‌ها ودستورهای ریاضی چنین نیست.

مسئلهٔ کومکی یا معاون مسئله‌ای است که آن را برای خودش در نظر نمی‌گیریم، بلکه امید آن داریم که باتوجّه به حلّ آن بتوانیم مسئلهٔ دیگری را که مسئلهٔ اصلی است حل کنیم. حلّ مسئلهٔ اصلی هدفی است که می‌خواهیم به آن برسیم، و مسئلهٔ معاون وسیله‌ای برای رسیدن به این هدف است.

حشره‌ای که می‌خواهد از میان شیشهٔ پنجره عبور کند و برایش امکان این عبور کردن وجود ندارد، مکرّر به همین‌گونه تلاش می‌کند و هیچ دربند آن نیست که از کنار شیشهٔ آن پنجره بگذرد و کنار پنجرهٔ دیگر پهلوی آن برود که درِباز دارد و از همان جا وارد اطاق شده است، و راه فرار خود را پیدا کند. انسان می‌تواند، یالااقل باید بتواند، هوشمندانه‌تر عمل کند. برتری انسان در آن است که اگر به مانعی برخورد که عبور آن از طریق مستقیم امکانپذیر نیست، در پیرامون آن آن مانع به تفحّص برمی‌خیزد تا راه عبوری برای خود پیدا کند، و به این ترتیب هنگام روبه رو شدن با یک مشکل و مسئله، مسئلهٔ معاونی طرح می‌کند و به حلّ آن می‌پردازد. طرحریزی مسئلهٔ معاون عمل مهمّی از مغز آدمی است. مسئلهٔ خدمتگزار روشی برای مسئلهٔ دیگر طرح ریختن، و چیزی را که عنوان وسیله برای هدفی دارد همچون هدفی درنظر گرفتن، دستاورد ظریفی از عقل و شعور انسان است. آموختن (یا تعلیم دادن) این که چگونه هوشمندانه با مسائل کومکی روبه‌رو شویم وظیفه‌ای مهمّ است.

۱. **مثال.** x را به صورتی‌که در معادلهٔ زیر صدق کند به دست آورید:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

اگر این امر را در نظر بگیریم که $x^4 = (x^2)^2$ ، درخواهیم یافت که وارد

کـــردن

$$y = x^2$$

به عنوان مجهول معاون در حلّ مسئله چه اندازه حـــایز اهمّیّت است. بـــا ایــن فرض معادلهٔ تازه‌ای بدین صورت به دست می‌آوریم.

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

مسئلهٔ جدید مسئله‌ای معاون و کومک کننده است، می‌خـواهیم از آن هـمچون وسیـله‌ای برای حل کردن مسئلهٔ اصلی خودمان استفاده کنیم. مجهول مسئلهٔ معاون، یـعنی y، بـه صورتی شایسته به نام **مجهول معاون** خوانده شده است.

۲. **مثال.** قطر مکعّب مستطیلی را که اندازهٔ یالهای خـارج شدهٔ از یـک رأس آن د ر دست است حساب کنید.

در ضمن حلّ این مسئله (بخش ۸) ممکن است کـه از راه تـمثیل (بـخش ۱۵) بـــه طرح مسئله‌ای دیگر هدایت شویم: وآن یافتن قطر مربّع مستطیلی است که اندازه‌های دو ضلع خارج شدهٔ از یک رأس آن را می‌شناسیم.

این مسئله تازهٔ یک مسئلهٔ کومکی (معاون) است، از این جهت به آن توجّه می‌کـنیم که امید گرفتن بهره‌ای از آن داریم که با در نظر گفتن آن به حلّ مسئلهٔ اصلی دسترس پیدا می‌کنیم.

۳. **سود.** بهره‌ای که ازتوجّه به یک مسئلهٔ معاون نصیب ما مـی‌شود، انواع گـوناگون دارد. ممکن است نتیجهٔ حاصل از مسئلهٔ معاون را در حلّ مسئلهٔ اصلی بـه کـار بـگیریم. مثلاً، در مثال ۱، پس از آنکه اندازهٔ y را از حلّ معادله برابر با ٤ یا ۹ به دست آوردیم، از آن نتیجه می‌گیریم که $x^2=4$ یا $x^2=9$ است وبنابراین اندازه‌های مختلف x کـه مـجهول مسئلهٔ اصلی است بر ما معلوم می‌شود. درحالات دیگر، ممکن است **روش** مسئلهٔ معاون را مورد استفاده قرار دهیم. مثلاً، در مثال ۲، مسئلهٔ معاون مسئله‌ای از هندسهٔ مـسطّحهٔ است که به مسئلهٔ اصلی‌که ازهندسهٔ فضایی است شبیه ولی‌ازآن ساده‌تر است. به آن امید وارد کردن این مسئلهٔ معاون سودمند است که ممکن است آموزنده واقع شود، و فرصتی برای آشنا شدن با بعضی از روشها وعملیّات یا افـــزارهایی کـــه پـــس از آن بـــاید از آنها در حلّ مسئلهٔ استفاده کنیم فراهم می‌آورد. در مثال ۲، انتخـاب مـسئلهٔ مـعاون بیشتر مایهٔ خوشبختی بوده، چون آن را از نزدیک مورد مطالعه قرار دادیم، دانستیم کـه می‌توانیم هم از روش و هم از نتیجهٔ آن بهره‌برداری کنیم (بـه بـخش ۱۵ و **آیـا از هـمهٔ**

داده‌ها استفاده کرده‌اید؟ مراجعه کنید.)

٤.خطر. وقت و تلاشی را که به مصرف مسئلهٔ معاون می‌رسانیم، از مسئلهٔ اصلی می‌گیریم. اگر تحقیق ما دربارهٔ مسئلهٔ کومکی بی‌نتیجه باشد، وقت و تلاشی که مصرف آن داشته‌ایم تلف شده است. بنابراین لازم است داوری خود را دربارهٔ انتخاب یک مسئلهٔ کومکی با تمرین تقویت کنیم. ممکن است دلایل خوبی برای انتخاب خود داشته‌باشیم. مسئلهٔ کومکی ممکن است بیش از مسئله اصلی در دسترس باشد، یا این که ممکن است آموزنده به نظر برسد، یا از جنبهٔ زیبایی جالب نظر باشد. گاه تنها مزیّت مسئلهٔ کومکی نو بودن آن است و این که امکانات اکتشاف ناشده‌ای را عرضه می‌دارد؛ از این جهت آن را برمی‌گزینیم که از مسئلهٔ اصلی خسته شده‌ایم که ازهر راه به حل کردن آن آغاز کرده‌ایم بیحاصل مانده است.

۵. چگونه یکی را پیدا کنیم. اکتشاف راه حلّ یک مسئلهٔ پیشنهاد شده غالباً وابستهٔ به اکتشاف یک مسئلهٔ کومکی مناسب است. بدبختانه روش شکست‌ناپذیری برای اکتشاف این مسئله وجود ندارد، همان‌گونه که روش شکست‌ناپذیری برای اکتشاف راه‌حل موجود نیست. با وجود این پرسشها و پیشنهادهایی هست که غالباً مفید واقع می‌شود، همچون آنچه در **به مجهول نگاه کنید** آمده است. غالب اوقات از طریق تغییر شکل مسئله به یافتن مسائل کومکی سودمند رهبری می‌شویم.

٦. مسائل همسنگ. دو مسئله در آن هنگام همسنگ (معادل) یکدیگرند که حلّ یکی مستلزم حلّ دیگری باشد. مثلاً، درمثال ۱، مسئلهٔ اصلی و مسئله کومکی همسنگ یکدیگرند.

مسئلهٔ زیر را درنظر بیاورید:

A. در مثلّث متساوی‌الاضلاع هرزاویه برابر با ٦۰ است.

B. در هر مثلّث متساوی‌الزّوایا هر زاویه برابر با ٦۰ است.

این دو قضیّه عین یکدیگرنیستند. برمفاهیم متفاوت اشتمال دارند؛ یکی به برابر بودن اضلاع مربوط می‌شود، و دیگری به برابر بودن زوایا. ولی هرقضیّه از دیگری نتیجه می‌شود. بنابراین مسئلهٔ ثابت کردنی A همسنگ مسئلهٔ ثابت کردنی B است.

اگر از ما خواسته باشند که A را ثابت کنیم، وارد کردن مسئلهٔ کومکی ثابت کردنی B مزیّت دارد. اثبات قضیّهٔ B اندکی آسانتر از اثبات A است و، آنچه از این هم مهمتراست این که ممکن است پیشبینی کنیم که B آسانتر از A است، و از همان آغاز آسانتر بودن B را نسبت به A بپذیریم. در حقیقت، قضیّهٔ B تنها به زوایا مربوط است،

«متجانستر» از قضیّهٔ A است که با زاویه و ضلع هر دو ارتباط دارد.

عبور از مسئلهٔ اصلی به مسئلهٔ معاون، در صورتی که مسئلهٔ اصلی و مسئلهٔ کومکی همسنگ باشند، به نام تحویل **انعکاسپذیر** یا تحویل دو طرفی یا تحویل همسنگ خوانده می‌شود. بنابراین تحویل A به B (به بالا رجوع کنید) انعکاسپذیراست و بنابراین همان تحویل مثال ۱ است. تحویلهای انعکاسپذیر، از بعضی جهات، مهمتر و مطلوبتر از راههای دیگر واردکردن مسائل کومکی است، ولی آن مسائل کومکی نیز که همسنگ مسئلهٔ اصلی نیستند نیز ممکن است بسیارسودمند باشند، به مثال ۲ توجّه کنید.

۷. **رشتهٔ مسائل کومکی همسنگ** در استدلال ریاضی فراوان است. از ما خواسته‌اند که مسئلهٔ A را حل کنیم، راه حلّ آن به نظرما نمی‌رسد، ولی ممکن است این مطلب را کشف کنیم که A همسنگ با مسئلهٔ دیگر B است. باتوجّه به مسئلهٔ B ممکن است به‌مسئلهٔ سوم C همسنگ با B برسیم. با پیشروی از همین راه از C به D می‌رسیم و همچنین پس از آن تا این که بالاخره با مسئلهٔ L روبه‌رو می‌شویم که راه حلّ آن دانسته است یا بیواسطه به دست می‌آید. چون هرمسئله با مسئلهٔ پیش از خودهمسنگ است، مسئلهٔ اخیر L نیز با مسئلهٔ اصلی ما همسنگ خواهد بود. بدین ترتیب شایستگی آن را پیدا می‌کنیم که با حلّ مسئلهٔ L که آخرین مسئله از یک رشته مسائل همسنگ است به‌حلّ مسئلهٔ اصلی برسیم.

یونانیان باستان به رشتهٔ مسائل از این‌گونه اشاره کرده‌اند، چنان که در فقرهٔ مهمّی از نوشته‌های برجای ماندهٔ **پاپوس** می‌توانیم از آن آگاهی پیداکنیم. برای مجسّم ساختن این مطلب، باردیگر مثال ۱را مورد توجّه قرارمی‌دهیم. شرط مفروض برای x را (A) نام می‌دهیم که چنین است:

$$(A) \qquad x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

یک راه حلّ این مسئله بدل کردن شرط پیشنهادشده است به شرطی دیگر که آن را (B) نام می‌دهیم:

$$(B) \qquad (2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 144 = 0.$$

توجّه داشته باشید که شرایط (A) و (B) با یکدیگر متفاوت است. و ممکن است بگویید که اندکی با یکدیگر تفاوت دارند و بتوانیذ به آسانی متقاعد شوید که قطعاً همسنگ یکدیگرند، ولی قطعاً عین یکدیگرنیستند. عبور از (A) به (B) نه تنها صحیح است بلکه برای هرکس که با حلّ مسائل جبری درجهٔ دوم آشنا است هدفی قطعی دارد. چون

درهمین جهت پیشتر برویم، شرط (B) به شرط دیگر (C) مبدّل می‌شود:

$$(2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 169 = 25. \qquad \text{(C)}$$

و با پیش رفتن چنین خواهیم داشت:

$$(2x^2 - 13)^2 = 25 \qquad \text{(D)}$$

$$2x^2 - 13 = \pm 5 \qquad \text{(E)}$$

$$x^2 = \frac{13 \pm 5}{2} \qquad \text{(F)}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}} \qquad \text{(G)}$$

$$x = 3, \text{ یا } -3, \text{ or } 2, \text{ یا } -2. \qquad \text{(H)}$$

که در این رشته هرتحویلی که انجام دادیم انعکاس‌پذیر است. بنابراین آخرین شرط (H) همسنگ با نخستین شرط (A) است، بدان صورت که ۳ و۳- و۲ و۲- همهٔ جوابهای ممکن معادلهٔ اصلی خواهند بود.

درآنچه گذشت، از یک شرط اصلیِ (A) رشته‌ای از شرطهایِ (B) و (C) و (D) و... را استخراج کردیم که هریک از آنها با شرط پیش از خود همسنگ است. این نکته شایستهٔ توجّه بیشتر است. شرایط همسنگ یا یک چیز واحد تحقّق پیدا می‌کند. بنابراین، اگر از شرط پیشنهاد شده به شرط همسنگ با آن عبور کنیم، همان جوابها را خواهیم یافت. ولی اگر از شرط پیشنهاد شده به شرطی تنگتر بگذریم، جوابها را از دست می‌دهیم، واگر به شرطی وسیعتر گذر کنیم، جوابهای نامناسب وعارضی ونادرست به دست خواهیم آورد که هیچ ارتباطی با مسئلهٔ طرح شده ندارند. اگر دریک رشتهٔ از تحویلهای انعکاسپذیر متوالی نخست از یک شرط تنگتر وسپس دوباره از یک شرط وسیعتر بگذریم، ممکن است ردّ پای مسئلهٔ اصلی را بکلّی گم کنیم. برای پرهیز کردن از این خطر، لازم است ماهیّت هرشرط تازه وارد شده را مورد بررسی قرار دهیم وببینیم که آیا همسنگ شرط اصلی هست یا نه. واین امر هنگامی اهمّیت بیشتر پیدا می‌کند که همچون در حالت کنونی سروکار ما تنها با یک معادله نیست بلکه با دستگاهی از معادلات رو به رو هستیم، یادرآن هنگام که شرط، همچون در مسائل ساختمانی هندسی، با معادلات بیان نشده است.

(به پاپوس، مخصوصاً قسمتهایِ ۲ و۳ و٤ و۸ از آن مراجعه کنید. بیانی که در صفحه ۹٦ سطرهای ۲٤-۱۳آمده، بدون ضرورتی محدودیّت پیدا کرده است، ودرآن رشته‌ای از «مسائل یافتنی» بیان شده که هریک مجهول متفاوتی دارد. مثالی که دراین جا بیان شده، درست خصوصیّت متقابل آن را دارد: همهٔ مسئله‌های رشته مجهول واحد دارند وتنها صورت شرط درآنها تغییر پذیرفته است. البتّه چنین محدودیّتی ضروری نیست.)

۸. **تحویل یکطرفی** . دو مسئلهٔ A و B داریم که هیچ یک حل نشده است. اگر بتوانیم A را حل کنیم، پس از آن می‌توانیم تمام حلّ B را از آن استنباط کنیم. ولی عکس این مطلب درست نیست؛ اگر B را حل کنیم، ممکن است اطّلاعاتی دربارهٔ A به دست بیاوریم، ولی نخواهیم دانست که از حلّ B چگونه حلّ A را استنباط کنیم. در چنین حالتی، با حلّ A نتیجهٔ بیشتری از حلّ B به دست ما می‌رسد. بهتر است از این دو مسئلهٔ A را **بلند پروازتر** و B **را کوتاهپروازتر** بخوانیم.

اگر از یک مسئلهٔ طرح شده به مسئلهٔ کومکی بلندپروازتر یا کوتاه‌پروازتر عبور کنیم، گام برداشته شده را تحویل یکطرفی می‌نامیم. دوگونه تحویل یکطرفی وجود دارد، وهر دو از طریقی یا از طریق دیگر، بیش از تحویل دوطرفی یا انعکاسپذیر خطر دارد.

مثال ۲ نمونه‌ای از تحویل یکطرفی به مسئله‌ای کوتاهپروازتر است. اگر بتوانیم مسئلهٔ اصلی را که مربوط به مکعّب مستطیل با طول وعرض وارتفاع a و b و c است حل کنیم، می‌توانیم از آن به مسئلهٔ کومکی با فرض $C=0$ عبور کنیم ومتوازی‌الاضلاعی با طول وعرض a و b به دست آوریم. برای آگاه شدن از مثال دیگری از تحویل یکطرفی به طرف مسئله‌ای کوتاهپروازتر، رجوع کنید به **تخصیص** ، ۳ و٤ و۵. این مثالها نشان می‌دهد که، با کمی یاری بخت، ممکن است بتوانیم از یک مسئلهٔ کومکی کوتاهپروازتر به عنوان سنگ پرش وسط نهر برای پا گذاشتن بر آن و رفتن به سوی دیگر نهر استفاده کنیم، و از ترکیب کردن راه حل مسئلهٔ کومکی با اشاره‌ای تکمیلی راه حلّ مسئلهٔ اصلی را به دست آوریم.

تحویل یکطرفی به جانب مسئلهٔ بلندپروازتر نیز می‌تواند سودمند واقع شود (به **تعمیم**، ۲، وتحویل نخستین مسئله به دومین مسئله که در **استقراء واستقراءریاضی**، ۱ و۲ آمده رجوع کنید.) عملاً دسترسی به مسئلهٔ بلندپروازتر بیشتر است، واین همان **محالنمای مخترع** است.

معمّاها، بنابرآن چه در بخش ۳ آمده، پرسشها وپیشنهادهای فهرست ما از موضوع مسائل استقلال دارد و درمورد همه گونه مسئله قابل تطبیق است. آزمودن این گفته درمعمّاهای گوناگون جالب توجّه است.

مثلاً ، کلمات زیر را درنظر بگیرید:

DRY OXTAIL IN REAR.

مسئله عبارت از پس وپیش کردن حروف این کلمات و ساختن یک کلمهٔ پانزده حرفی از آنها است. توجّه به این نکته جالب است که هنگام حلّ این معمّا، طرح چندین پرسش که درفهرست چاپ شده شایسته وانگیزنده به نظر می‌رسد.

مجهول چیست؟ یک کلمه.

داده‌ها چیست؟ چهار کلمهٔ DRY OXTAIL IN REAR

شرط چیست؟ کلمهٔ مطلوب دارای پانزده حرف گنجاندهٔ درچهار کلمهٔ داده شده است. محتملاً کلمهٔ انگلیسی نامأنوس هم نیست.

یک شکل بکشید. پانزده خطّ کوتاه یانقطه این هدف راتأمین می‌کند.

- - - - - - - - - - - - - - -

آیا می‌توانید مسئله را دوباره بیان کنید؟ باید کلمه‌ای پیدا کنیم که در آن به ترتیبی خاصّ این پانزده حرف کنار یکدیگر قرار گرفته باشد.

AAEIIOY DLNRRRTX

و این ترتیب قطعاً بیان مجدد همسنگ صورت مسئله است (به مسئله کومکی، ٦، رجوع کنید). ممکن است این بیان مجدّد مزیّتی داشته باشد. جدا کردن مصوّتها از غیر مصوّتها (این کار مهمّ است، ولی مراعات ترتیب قرار گرفتن حروف در الفبا لازم نیست) جنبهٔ دیگری از مسئله است. اکنون می‌بینیم که کلمهٔ مطلوب دارای هفت هجا (سیلاب) است، مگر آنکه بعضی از مصوّتها شکل ترکیبی داشته باشد.

اگر نمی‌توانید مسئلهٔ طرح شده را حل کنید، نخست در آن بکوشید که مسئله‌ای وابستهٔ به آن را حل کنید. یک مسئلهٔ وابسته ساختن کلماتی از حروف داده شده است. یقیناً می‌توانیم کلمات کوتاهی از این گونه بسازیم. سپس به ساختن کلمات بلند و بلندتری می‌پردازیم. هر چه شمارهٔ حروفی که به کار می‌بریم بیشتر باشد به مصوّتهای بیشتر نیاز

پیدا می‌کنیم.

آیا می‌توانید بخشی از مسئله را حل کنید؟ کلمهٔ مطلوب چندان دراز است که باید قسمتهای متمایز از یکدیگر داشته باشد. محتملاً کلمه‌ای ترکیبی است، یا از کلمه‌ای دیگر با افزودن یک پسوند مشتق شده است. آیا این جزءِ پایانی کلمه چه چیز است؟

---------ATION
-----------ELY

تنها یک جز از شرط را نگاه دارید وباقی آن را کنار بگذارید. باید برای یافتن کلمه‌ای دراز تلاش کنیم که احتمالاً هفت سیلاب و معدودی غیر مصوّت و از جملهٔ آنها X و Y دارد.

از پرسشها و پیشنهادهای فهرست ما کار جادویی برنمی‌آید. بدون آنکه تلاش و کوشش از طرف خود ما صورت بگیرد، آنها نمی‌توانند جواب مسئله را به ما بدهند. اگر خواننده بخواهد پاسخ را پیدا کند، باید از کوشیدن و اندیشیدن برای یافتن آن باز نایستد. آنچه از پرسشها و پیشنهادهای فهرست برمی‌آید «غلطان نگاه داشتن توپ است.» هنگامی که از عدم موفّقیّت دلسرد می‌شویم، و به آن تمایل پیدا می‌کنیم که حل کردن مسئله را کنار بگذاریم، پرسشها و پیشنهادها ممکن است آزمایش تازه‌ای را به ما القا کنند، و سیمای تازه یا تغییر جدیدی از مسئله وانگیزهٔ تازه‌ای پدید آورند؛ می‌توانند فکر ما را در حلّ مسئله درکار نگاه دارند.

برای مثالی دیگر به **تجزیه وترکیب مجدد، ۸** رجوع کنید.

نشانه‌های پیشرفت. کریستوف کولومب و یارانش که در کشتی بادبان برافراشته دراقیانوس ناشناخته به طرف باختر درحرکت بودند، هر گاه درهوا مرغی را در حال پرواز می‌دیدند شادمان می‌شدند؛ به مرغ همچون نشانه‌ای مساعد نگاه می‌کردند که از نزدیکی خشکی خبر می‌دهد. ولی از این مشاهده چندین بار دلسرد و نومید شدند. چشم به راهِ دیدن نشانه‌های دیگر نیز بودند. چنان می‌پنداشتند که علفهای متحرّک در دریا یا پایین بودن ابرها خبر از نزدیکی خشکی می‌دهد، امّا از این بابت نیز چندین بار ناراحت و ناامید شدند. ولی یک روز نشانه‌ها مکرّر شد؛ روز پنجشنبه یازدهم ماه اوکتبر سال ۱۴۹۲ «مرغانی از گونه یلوه و قطعهٔ نی‌سبزی را در

نزدیکی کشتی خود دیدند. کسانی که بر کشتی پینتا سوار بودند، یک نی و یک تیر بر روی آب مشاهده کردند و تیر کوچکتری را از آب گرفته که معلوم شد با آهن بر روی آن کار شده است، نیز قطعهٔ دیگری نی و یک قطعه درخت خشکی و یک پرندهٔ کوچک را مشاهده کردند. جاشوان کشتی پینتا نیز علامتهایی از خشکی و شاخهٔ کوچکی مشتمل بر دانه‌های میوه شناور بر آب دیدند. هر کس از دیدن این نشانه‌ها نفس تازه کرد و شادمان شد.» و در واقع روز بعد خشکی را که عبارت از نخستین جزیره از دنیای جدید بود با چشم خود مشاهده کردند.

کاری که به آن مشغولیم ممکن است مهم باشد یا بی‌اهمّیت، و مسئله‌ای است که از هرگونه می‌تواند باشد، هنگامی که سخت کار می‌کنیم، مشتاقانه چشم به راه علامت پیشرفت هستیم، به همان گونه که کریستوف کولومب و یارانش چشم به راه نزدیک شدن خشکی بودند. باید از چند مثال دیگر بحث کنیم تابرما معلوم شود که به چه چیز باید به عنوان نشانهٔ پیشرفت نظر داشته باشیم.

۱. **مثالها**. مسئله مسئله‌ای از شطرنج است. می‌خواهم شاه سیاه را بادو حرکت مات کنم. برصفحهٔ شطرنج یک شاه سفید کاملاً دور از شاه سیاه وجود دارد که ظاهراً زاید به نظر می‌رسد. برای چه خوب است؟ باید این پرسش را نخست بیجواب باقی بگذارم. ولی پس از آزمایشهای گوناگون، به حرکتی تازه متوجّه می‌شوم و آن وقت می‌فهمم که این حرکت شاه سفید ظاهراً زاید را وارد بازی می‌کند. این ملاحظهٔ گرانبها به من امیدی تازه می‌بخشد. به آن همچون نشانه‌ای مساعد می‌نگرم: و آن این که حرکت تازه ممکن است همان حرکت مطلوب باشد. چرا؟

در یک مسئلهٔ شطرنج که خوب طرح شده باشد، چیز زاید وجود ندارد. بنابراین، باید همهٔ مهره‌های قرارگرفتهٔ بر صفحهٔ شطرنج را به حساب بیاوریم. باید همهٔ داده‌ها را به کاربریم. در راه حلّ صحیح قطعاً همهٔ مهرهها به کار گرفته می‌شود، حتّیٰ آن شاه سفید که ظاهراً زیادی به نظرمی‌رسد. از این لحاظ، حرکت تازه‌ای که در نظرگرفته‌ام با حرکت درستی که می‌خواهم آن را پیداکنم، توافق دارد. حرکت تازه شبیه حرکت درست به نظرمی‌رسد، می‌تواند حرکت درست باشد.

مشاهدهٔ وضعی شبیه به آنچه گذشت در یک مسئلهٔ ریاضی جالب توجّه است. منظورمن بیان وسعت سطح یک مثلّث برحسب سه ضلع a و b و c آن است. پیشتر نقشه‌ای برای کارخود طرح کرده‌ام. کمابیش می‌دانم که چه پیوستگیهای هندسی را باید درنظربگیرم و چه نوع محاسبات

را باید انجام دهم. ولی هنوز اطمینان کامل ندارم که نقشهٔ من عملی باشد. اگر اکنون، در امتداد خطّی که با نقشهٔ من ترسیم شده است پیش بروم، به این نتیجه خواهم رسید که کمّیت

$$\sqrt{b+c-a}$$

وارد تعبیر جبری وسعت سطحی می‌شود که در صدد ساختن آن برآمده ام ، و به همین جهت حق دارم شادمان شوم. چرا؟

در واقع باید به این نکته توجّه داشته باشیم که حاصل جمع هر دو ضلع مثلّث بزرگتر از ضلع سوم است. از اینجا محدودیّت پیش می‌آید. داده‌های a و b و c نمی‌تواند مِنْ عِنْدی و به دلخواه باشد؟ مثلاً، $b+c$ باید بزرگتر از a باشد. این یک جزء اصلی از شرط است، و ما باید تمام شرط را به کار بگیریم. اگر $b+c$ بزرگتر از a نباشد، فرمولی که می‌خواهم آن را به دست بیاورم موهومی خواهد شد. اگر $b+c-a$ منفی باشد جذر آن موهومی خواهد شد و دیگر این جذر نمی‌تواند شایستهٔ نمایش دادن یک کمّیت حقیقی شود. بدین ترتیب، فرمول یادشده در داشتن خاصّیت مهمّی با فرمول است. سطح مثلّث شریک فرمول من صحیح به نظر می‌رسد؛ می‌تواند صحیح باشد.

اینک مثالی دیگر. چندی پیش، می‌خواستم یک قضیّه را درهندسهٔ فضایی به اثبات برسانم. بدون زحمتی درآغاز کار به مطلبی توجّه پیداکردم که شایسته به نظر می‌رسید، ولی سپس درفهم درست آن واماندم. چیزی برای تمام کردن اثبات مسئله لازم بود که حضور نداشت. هنگامی که آن روز از ادامه دادن به کار اثبات دست کشیدم، تصوّر بسیار بهتری از زمان آغاز به کار دربارهٔ این که مسئله چگونه باید ثابت و شکاف آن پرشود داشتم، ولی نمی‌توانستم شکاف را پر کنم. روز بعد، پس از گذراندن یک شب آرام، دوباره به مسئله نگریستم و به زودی متوجّه قضیّهٔ مشابهی در هندسهٔ مسطّحه شدم. با جهش برقی در فکرم متقاعد شدم که اکنون به حلّ مسئله رسیده‌ام و گمان می‌کنم که دلیل خوبی برای این متقاعد شدن داشتم، چرا؟

در واقع شباهت و تمثیل و قیاس(مقایسه) راهنمای بزرگی است. حلّ یک مسئله در هندسهٔ فضایی غالباً وابستهٔ به مسئله‌ای مشابه آن در هندسهٔ مسطّحه است(نگاه کنید به **تمثیل، ۷-۳**). مثلاً، درمورد خودم، از همان آغاز احتمال آن وجود داشت که در اثبات موردنظر از قضیّه‌ای از هندسهٔ مسطّحه که اکنون به خاطر من رسیده است، به عنوان قضیّهٔ فرعی می‌توانم بهره‌برداری کنم. «این قضیّه به آن قضیّهٔ فرعی شباهت دارد که به

آن نیازمندم، ممکن است همان قضیّهٔ فرعی باشد که به آن نیاز دارم»- استدلال من چنین بود.

اگر کریستوف کولومب وهمراهانش زحمت استدلال صحیح را بر خود هموار می‌کردند، می‌توانستند با روش مشابهی به استدلال بپردازند. می‌دانستند که دریا در نزدیکی کرانه چگونه به نظر می‌رسد. می‌دانستند که درآنجا، بسیار بیش از وسط دریا، مرغانی درهوا دیده می‌شود که از خشکی برخاسته‌اند، و چیزهایی که از خشکی کنده و بر سطح آب شناور شده‌اند. بسیاری از آن مردان در سفرهایی که پیش از آن سفر از آنها به خانه‌های خود باز می‌گشتند با چنین تجربه‌ها آشنا شده بودند. روز پیش از آن روز بزرگ که در آن جزیرهٔ سان سالوادور را دیدند، چون چیزهای شناور بر روی آب فراوان شده بود باخود چنین اندیشیدند: «چنان به نظر می‌رسد که به زمینی نزدیک شده‌ایم، ممکن است درحال نزدیک شدن به خشکی باشیم» و «هریک با دیدن نشانه‌ها نفسی به راحتی کشید و شادمان شد.»

۲. **خصوصیّت راهیابانهٔ نشانه‌های پیشرفت.** بهتر است دربارهٔ یک نکته تأکید کنیم که شاید پیش از این برای هر کس روشن بوده است، ولی بسیار مهمّ است و به همین جهت باید به صورت کامل روشن شود.

نوع استدلالی که پیشتر با مثالهای یاد شده مجسّم شد، شایسته توجّه و به حساب آمدن جدّی است، هرچند تنها یک نشانهٔ موجّه نما است و از قطعیّت بی‌تردید حکایت نمی‌کند. بهتر است که فاضلانه و با طول و تفصیل غیرطبیعی یکی از این استدلالها را دوباره بیان کنیم:

اگر به خشکی نزدیک شده باشیم، غالباً پرندگان را خواهیم دید.

وما اکنون پرندگان را می‌بینیم.

بنابراین،احتمالاً، درحال نزدیک شدن به خشکی هستیم.

بدون آوردن کلمهٔ «احتمالاً» نتیجه آشکارا غلط درخواهد آمد. کریستوف کولومب و یارانش در واقع چندین بار پرندگان را دیدند ولی امیدشان برای رسیدن به خشکی نقش برآب شد. و ناگهان روزی فرا رسید که در آن چند یلوه را در هوا در حال پرواز دیدند و فردای آن روز، روز اکتشاف دنیای جدید شد.

با کلمهٔ «احتمالاً» نتیجه عقلانی و طبیعی است، ولی به هیچ وجه اثبات نتیجه نیست، تنها یک نشانه و یک تلقین راهیابانه است. فراموش کردن این نکته که چنین

نتیجه‌ای تنها احتمالی است، و آن را یقینی پنداشتن، اشتباهی بزرگ است. ولی این گونه نتیجه‌ها را از نظر دور داشتن و نسبت به آنها غافل ماندن اشتباهی بزرگتر است. اگر نتیجه‌ای راهیابانه را یقینی بدانید، نادانی کرده‌اید و دلسرد و مأیوس خواهید شد، ولی اگر نسبت به نتایج راهیابانه روی هم رفته غفلت ورزید، اصلاً به پیشرفتی نایل نخواهید شد. علامتهای مهمترِ پیشرفتْ راهیابانه است. آیا باید به آنها اعتماد کنیم؟ آیا باید آنها را دنبال کنیم؟ دنبال کنید، ولی چشمان خود را باز نگاه دارید. اعتماد داشته باشید ولی مواظب باشید. و هرگز از داوری خود چشم نپوشید و دست نکشید.

۳. **نشانه‌های آشکارا قابل بیان و تعبیر.** می‌توانیم به مثالهایی که پیشتر آورده شد از دیدگاهی دیگر نگاه کنیم.

در یکی از این مثالها، داده‌ای را که پیشتر به کار نرفته بود (شاه سفید) و توانستیم آن را وارد بازی کنیم، همچون نشانهٔ مساعدی در نظر گرفتیم. در این کار کاملاً حق با ما بود. در واقع، حل کردن یک مسئله اساساً عبارت از **یافتن ارتباطی میان داده‌ها و مجهول** است. علاوه بر این باید، دست کم در مسائلی که خوب بیان شده‌اند، **همهٔ داده‌ها را به کار بریم**، و هریک از آنها را به مجهول ارتباط دهیم. بنابراین، وارد کردن دادهٔ بیشتر در کار کاملاً به حقّ همچون یک پیشرفت و برداشتن گامی به پیش احساس می‌شود.

در مثالی دیگر، این امر را که قیدی اساسی از شرط به صورت شایسته با فورمول ما به حساب گرفته شده، نشانه‌ای از پیشرفت دانستیم. در این کار کاملاً حق با ما بود. در واقع، **باید همهٔ شرط را به کار بریم.** بنابراین به حساب آوردن یک قید دیگر از شرط به حقّ یک پیشرفت و برداشتن گامی در جهت درست احساس می‌شود.

باز هم در مثالی دیگر، پیدا شدن یک مسئلهٔ مشابه ساده‌تر را همچون نشانهٔ مساعدی از پیشرفت دانستیم. درواقع، تمثیل و قیاس (مقایسه) یکی از سرچشمه‌های عمدهٔ اختراع است. اگر از دیگر وسایل کاری برنیاید باید در آن بکوشیم که **مسئلهٔ مشابهی را تخیّل کنیم.** بنابراین، اگر چنین مسئله‌ای خودبه‌خود پیدا شود، طبیعتاً خوشحال می‌شویم؛ چنان احساس می‌کنیم که به حلّ مسئله نزدیک شده‌ایم.

پس از این مثالها، اکنون به آسانی می‌توانیم به اندیشهٔ کلّی کاملاً توجّه پیدا کنیم. بعضی از عملیّات عقلی و فکری به صورتی برجسته در حل کردن مسائل سودمند است. (معمولترین عملیّات از این‌گونه در این کتاب فهرست شده است.) اگر یکی از این عملیّات برجسته کامیاب شود (اگر دادهٔ بیشتری با مجهول ارتباط پیدا کند ـ قید دیگری از شرط به حساب گرفته شود ـ یا مسئلهٔ مشابهی ساده‌تری در حلّ مسئله ـ

دخالت کند) این کامیابی همچون علامتی از پیشرفت احساس خواهد شد. پس از فهمیدن این نکتهٔ اساسی، می‌توانیم ماهیّت نشانه‌های دیگر پیشرفت را با مقداری وضوح بیان کنیم. کاری که باید بکنیم این است که فهرست را بخوانیم و به پرسشها و پیشنهادهای مختلف از دیدگاه تازه به دست آمدهٔ خودمان نگاه کنیم.

بنابراین، فهمیدن روشن و آشکار ماهیّت مجهول به معنی پیشرفت است. در دسترس قرار دادن واضح و آشکار داده‌های گوناگون به صورتی که به آسانی بتوانیم هریک از آنها را به یاد آوریم نیز به معنی پیشرفت است. تجسّم بخشیدن و دیدن درست شرط به عنوان یک کل می‌تواند به معنی یک پیشرفت اساسی باشد، و جدا کردن اجزاءِ شرط از یکدیگر برداشتن گامی به جانب پیش محسوب می‌شود. هنگامی که شکلی را می‌یابیم که به آسانی می‌توانیم آن را تخیّل کنیم، یا به‌علامتی می‌رسیم که به آسانی می‌توانیم به خاطر بسپاریم، حق داریم به این که مقداری پیشرفت‌کرده‌ایم باور داشته باشیم. به یادآوردن یک مسئلهٔ مربوط به مسئلهٔ خودمان که قبلاً حل شده است می‌تواند گامی تعیین کننده در جهت درست باشد.

و چنین است در موارد دیگر مشابه. در مقابل هر عمل فکری و عقلی که به وضوح دریافت شود، نشانه‌ای آشکارا برجسته و تعبیر کننده وجود دارد. فهرست ما که درست خوانده شود، فهرست نشانه‌های پیشرفت نیز خواهد بود.

پرسشها و پیشنهادهای فهرست ما ساده و آشکار و سازگار با عقل سلیم است. به این مطلب مکرّر اشاره کرده‌ایم، و در مورد نشانه‌های پیشرفت که اکنون در بارهٔ آنها بحث می‌کنیم نیز چنین است. برای خواندن چنین نشانه‌ها نیازی به علم اسرار آمیز نیست، تنها اندکی عقل سلیم و، البتّه ، اندکی تجربه کفایت می‌کند.

٤– نشانه‌هایی با روشنی بیان کمتر. هنگامی که به جدّ و مشتاقانه به کار خود اشتغال داریم، به خوبی میزان سرعت پیشرفت خودمان را احساس می‌کنیم؛ چون سریع باشد، شادمان می‌شویم، و چون کند باشد دلسرد می‌شویم. این تفاوتها را به وضوح احساس می‌کنیم بدون آن که بتوانیم به نشانهٔ مشخّصی اشاره کنیم.اوضاع واحوال واحساسات و سیماهای کلّی وضع نماینده ونشان دهندهٔ پیشرفت ما است. بیان کردن آنها آسان نیست. «به نظر من خوب می‌رسد،» یا «چندان خوب نیست» ازعبارات غیر پرورده‌ای است که در چنین مواردی به کار می‌رود. مردمان مهذّبتر به صورت دیگری نظر خود را اظهار می‌دارند ومی گویند: «این یک نقشهٔ کاملاً متعادل است » یا «نه، چیزی کم است وهمان هماهنگی را تباه کرده

است.» ولی در ماورای تعبیرات ابتدایی ومبهم احساسی غیرقابل اشتباه ازاین مطلب وجود دارد که با اعتماد از آن پیروی می‌کنیم و غالباً مارا به راه راست ودرست رهبری می‌کند. اگر چنین احساسی بسیار نیرومند باشد وناگهانی عارض شود، از الهام سخن به میان می‌آوریم ومردمان معمولاً تردیدی در الهامگیریهای خود ندارند وگاهی فریب آنها را می‌خورند. در واقع باید با احساسات هدایت کننده و الهامات درست به همان گونه رفتار کنیم که با نشانه‌های آشکارا قابل بیان پیشرفت معامله می‌کنیم وپیشتر در بارهٔ آن سخن گفتیم. اعتماد کنید، ولی چشمان خود را باز نگاه دارید.

همیشه از الهام خود پیروی کنید ـ البتّه با یک ارزن شک.

[آیا ماهیّت آن احساسهای هدایت کننده چیست؟ آیا در ورای کلماتی با رنگ زیبا شناختی همچون «کاملاً متعادل» و «آهنگدار» معنایی که ابهام کمتر داشته باشد وجود دارد؟ این پرسشها بیش از آنکه عملی باشد نظری است، ولی زمینهٔ حاضر به جوابهایی اشاره می‌کند که شاید شایستهٔ نقل کردن باشد: چون نشانه‌های پیشرفتی که به صورتی روشنتر قابل بیان وتعبیر باشند با کامیابی یا شکست بعضی از عملیّات عقلی وفکری ارتباط دارند، می‌توانیم چنین گمان کنیم که احساسات هدایت کننده‌ای که قابلیّت بیان وتعبیر کمتر دارند، نیز، به طریق مشابهی ،با فعّالیّتهای عقلی وفکری تاریکتر دیگر ارتباط دارند- شاید با فعّالیّتهایی که ماهیّت وطبیعت آنها بیش از آنکه «منطقی» باشد «روانشناختی» است.]

۵. نشانه‌ها چگونه کومک می‌کند؟ من یک نقشهٔ عمل دارم. به روشنی می‌بینم که از کجا باید آغاز کنم و نخست چه گامی باید بردارم. ولی نمی‌توانم به صورت کامل طرح و نقشهٔ راه را دورتر از مرحلهٔ آغاز آن ببینم. یقین قطعی و کامل ندارم که نقشهٔ من بتواند عملی شود، و، به هرصورت، راه درازی برای پیمودن درپیش دارم.

بنابراین، با احتیاط در جهتی که نقشه نشان می‌دهد کار را آغازمی‌کنم و چشم به یافتن نشانه‌های پیشرفت دارم.ممکن است جرأت خود را از دست بدهم و از راهی که رفته‌ام بازگردم و به گام برداشتن در راهی دیگر آغاز کنمَ. از سوی دیگر، اگر در ضمن پیش رفتن من نشانه‌های پیشرفت افزایش پیداکند، تردیدمن از میان خواهد رفت و روحیّهٔ قویتر پیداخواهم کرد و با اعتماد بیشتر پیش خواهم رفت، درست به همان گونه که کریستوف کولومب و یارانش پیش از دیدن جزیرهٔ سان‌سالوادور چنین کردند.

نشانه‌ها می‌تواند راهنمای کارهای ما باشد. فقدان آنها می‌تواند هشداری برای

بنبست بودن راه به حساب آید و از تلف شدن غیرلازم وقت و نیروی ما جلوگیری کند؛ حضورآنها سبب متمرکز شدن تلاش ما بر روی نقطه‌ای می‌شود که باید به آن توجّه کنیم.

با وجود این امکان آن هست که نشانه‌ها فریبنده باشد. زمانی یک راه را به سبب وجودنداشتن نشانه‌ها ترک کردم، ولی مردی که پس از من از همین راه عبورمی‌کرد و کمی پیش‌رفت به اکتشاف مهمّی دست یافت که خشم مرا برانگیخت و مدّت درازی مایهٔ تأسّف من شد. وی نه تنها ثبات قدمی بیش از من داشت بلکه نشانه‌ای را که من از توجّه کردن به آن غافل مانده بودم به درستی خواند. و نیز، ممکن است که من راهی را با خوشحالی و امیدواری با انگیزش و تشویق یک نشانهٔ مساعد ادامه بدهم، و در جهت یک مانع گمان نا برده و غیرقابل عبورپیشروی کنم.

آری، نشانه‌ها ممکن است در یک حالت خاص ما را گمراه کنند، ولی اکثریّت آنها ما را به راه راست هدایت می‌کند. یک شکارچی ممکن است گاهگاه ردّ پای شکار خود را غلط بخواند، ولی به صورت میانگین رد پا او را هدایت می‌کند، وگرنه چگونه می‌توانست زندگی خود را از راه شکار تأمین کند.

من از تجربه برای تفسیر درست نشانه‌ها استفاده می‌کنم. بعضی از یاران کریستوف کولومب یقیناً از راه تجربه می‌دانستند که دریا در نزدیکی کرانه چگونه به نظرمی‌رسد، و نیز می‌دانستند که نشانه‌های نزدیک شدن به ساحل را چگونه بخوانند و تفسیر کنند. کارشناس از راه تجربه می‌داند که وضع چگونه به نظرمی‌رسد و احساس می‌کند که زمان حلّ مشکل و مسئله چه وقت نزدیک شده است، زیرا که می‌تواند نشانه‌های نمایندهٔ آن را درست بخواند. شخص آزموده بیش از شخص ناآزموده از نشانه‌ها خبردارد، و آنها را بهترمی‌شناسد؛ مزیّت عمدهٔ وی داشتن چنین شناخت و معرفت است. یک شکارچی کارشناس و مجرّب متوجّه ردّپاهای شکارمی‌شود، حتّیٰ از کهنه و نوبودن آنها نیز آگاهی پیدامی‌کند، در صورتی که شخص غیرمجرّب شایستگی دیدن این گونه چیزها را ندارد.

مزیّت عمدهٔ شخصی که دارای استعدادی استثنایی در این زمینه است، داشتن گونه‌ای حسّاسیّت عقلی وروانی فوق‌العاده است. با این حسّاسیّت عالی نشانه‌های دقیق پیشرفت را متوجّه می‌شود یا از نبودن آنها در هنگامی آگاهی پیدا می‌کند که شخص غیرمستعد میان این دوحالت هیچ تفاوتی نمی‌بیند.

[٦. **قیاس راهیابانه.** در شمارهٔ ۲ پیش از این به نوعی از استدلال راهیابانه رسیدیم

که شایستهٔ بحث بیشتر وتوضیح بعضی از اصطلاحات فنّی است. نخست به بیان مجدّد آن استدلال به صورت زیر می‌پردازیم:

اگر به خشکی نزدیک شده باشیم، غالباً پرندگان را خواهیم دید.
وما اکنون پرندگان را می‌بینیم.

بنابراین، بیشتر این مطلب باورکردنی می‌شودکه درحال نزدیکی به خشکی هستیم.

دوجملهٔ بالای خطّ افقی را می‌توانیم به نام دو مقدّمه یا صغریٰ وکبریٰ بنامیم، وجمله‌ای که زیر خطّ افقی دیده می‌شود به نام نتیجه خوانده می‌شود. تمام این مجموعهٔ استدلال فراهم آمدهٔ از صغریٰ وکبریٰ را می‌توانیم **قیاس راهیابانه** بخوانیم.

دومقدّمه در این جا همچون در شمارهٔ ۲ به چاپ رسیده، ولی کلمات نتیجه بادقّت بیشتر انتخاب شده است. یک وضع اساسی بهتر مورد تأکید قرار گرفته است. کریستوف کولومب وهمراهانش از آغاز حدس می‌زدند که سرانجام در ضمن دریانوردی به طرف مغرب به خشکی خواهند رسید، ومی‌بایستی به این حدس خود مقداری اعتماد نشان داده باشند، واگر چنین نبود اصلاً به این سفر آغاز نمی‌کردند. به تدریج که پیش می‌رفتند، هرپیشامد کوچک یا بزرگ را به این سؤال مستولی بر ذهنهای خود ارتباط می‌دادند: «آیا به خشکی نزدیک شده‌ایم؟» اعتماد آنان باظهور حوادث یا عدم ظهور آنها افزایش وکاهش می‌یافت، واعتقاد هریک از افراد گروه به مقتضای زمینه وخصلت شخصی او به صورتی متفاوت بادیگران در نوسان بود. تنش شگفت‌انگیز سفر نتیجه‌ای از همین نوسان اعتماد بود.

قیاس راهیابانه‌ای که نقل شد، نمایش‌دهندهٔ زمینه‌ای معقول برای پیدایش تغییری در سطح و تراز اعتماد است. فرصتی برای چنین تغییر پیش‌آوردن نقش اساسی این گونه استدلال است واین نکته باطرز بیانی که در اینجا آمد بهتر از آنچه در شمارهٔ ۲ آمده بود آشکار شده است.

الگوی کلّی که مثال ما آن را تلقین کرد، می‌تواند به چنین صورت عرضه شود:
اگر A درست باشد، چنانکه می‌دانیم، B نیز درست است. ولی،
اکنون معلوم شده که B درست است.

بنابراین، درستی A پذیرفتنیتر خواهد بود.
یا به صورت کوتاهتر:

اگر A ، پس B

B درست است

A پذیرفتنی‌تر است.

دراین بیانِ به صورت طرحْ خطّ افقـی جانشین «بنابراین» وبیان‌کنندهٔ آن دلالت ضمنی واستلزامی است که میان مقدّمه‌ها ونتیجه وسیلهٔ ارتباط اصلی به شمار می‌رود.]

[۷. **طبیعت وماهیّت استدلال موجّه نما.** در این کتاب از یک مسئلهٔ فلسفی بحث می‌کنیم. از آن تا می‌توانیم به صورت عملی و غیررسمی و دور از روشهای عقلانی سخن می‌گوییم، و با این همه موضوع بحث ما موضوعی فلسفی است. به ماهیّت برهان و استدلال راهیابانه بستگی دارد و، توسّعاً، به گونه‌ای از استدلال مربوط می‌شود که با وجود مهم‌بودن غیراثباتی است و، به سبب نبودن اصطلاح بهتر، می‌توانیم آن را **استدلال موجّه‌نما** بخوانیم.

نشانه‌هایی که شخص مخترع را به خوب‌بودن اختراعش متقاعد می‌سازد، و اشاره‌هایی که ما را در کارهای روزانه رهبری می‌کند، و مدارک محکمه‌پسند وکیل دعاوی، و تکیه‌گاه استقرایی شخص دانشمند، و مدارک آماری مورد استفادهٔ در موارد فراوان و گوناگون، همه در دو نقطهٔ اساسی با هم سازگاری دارند. نخست، قطعیّت و یقین یک اثبات محض و دقیق را ندارند. دوم، برای به دست‌آوردن شناختی که از اساس تازه است سودمند واقع می‌شوند، و حتّیٰ برای تحصیل هر شناخت که از گونهٔ ریاضی یا منطقی محض نباشد، و هر دانش مربوط به جهان فیزیکی ضرورت دارند. می‌توانیم برهانی راکه براساس این‌گونه از شواهد و مدارک بنا می‌شود، «برهان راهیابانه» یا «استدلال استقرائی» یا (اگر بخواهیم از گسترش‌دادن به معانی اصطلاحات موجود پرهیز کنیم) «استدلال موجّه‌نما» بنامیم. ما این اصطلاح اخیر را پذیرفته‌ایم.

قیاس راهیابانه را که پیشتر معرّفی کردیم، می‌توانیم ساده‌ترین و رایجترین الگوی برهان موجّه نما درنظر بگیریم. ما را به یاد یک الگوی استدلال سنّتی یعنی قیاس شرطها متّصل می‌اندازد، و در این جا هر دو را در کنار یکدیگر می‌آوریم.

اثباتی	راهیابانه
اگر A پس B	اگر A پس B
B درست نیست	B درست است
A نادرست است	A پذیرفتنی‌تر است.

مقایسهٔ این الگوها ممکن است برای ما آموزنده باشد، بدان جهت که می‌تواند دربارهٔ ماهیّت استدلال موجّه‌نما (استقرائی راهیابانه) بینشی به ما ببخشد که از جای دیگر به آسانی تحصیل نمی‌شود.

نخستین مقدّمه در هر دو الگو یکی است:

اگر A پس B

ولی در مقدّمه دوم با یکدیگر تفاوت پیدا می‌کنند. جمله‌های

B درست نیست B درست است

درست متقابل با یکدیگرند، ولی «ماهیّت منطقی مشابه» دارند و در یک تراز «منطقی» قرار گرفته‌اند. اختلاف بزرگ پس از مقدّمه‌ها پیدا می‌شود. نتایج

A نادرست است A پذیرفتنی تر است.

در ترازهای منطقی متفاوت قرار گرفته اند و ارتباط‌های آنها با مقدّمه های مربوطِ به خود ماهیّت منطقی متفاوت دارد.

نتیجهٔ قیاس اثباتی همان ماهیّت منطقی مقدّمه‌ها را دارد. علاوه بر آن، این نتیجه به صورت کامل بیان شده و به صورت کامل به توسّط مقدّمه‌ها تأیید می‌شود. اگر من و همسایه‌ام در پذیرفتن مقدّمه‌ها با یکدیگر توافق داشته باشیم، به صورتی عاقلانه نمی‌توانیم در پذیرفتن نتیجه، هراندازه هم که از لحاظ ذوق و سلیقه و اعتقادات با هم تفاوت داشته باشیم، با یکدیگر توافق نکنیم.

نتیجهٔ قیاس راهیابانه از لحاظ ماهیّت منطقی با مقدّمه‌ها اختلاف دارد، بیشتر مبهم است و قاطعیّت ندارد و به صورت کامل بیان نشده است. نتیجه قابل تشبیه به نیرو است که هم جهت دارد و هم کمّیّت. ما را در یک جهت می‌کشد: A بیشتر پذیرفتنی می‌شود. نتیجه همچنین دارای مقداری استحکام است: A ممکن است بسیار بیشتر، یا فقط اندکی بیشتر پذیرفتنی شود. نتیجه به صورت کامل بیان نشده و کاملاً با مقدّمه‌ها تأیید نمی‌شود. جهت بیان شده و به صورت ضمنی در مقدّمه‌ها آمده، ولی کمّیّت چنین نیست.

برای هر شخص پیرو حکم عقل، مقدّمه‌ها مستلزم آن است که A بیشتر پذیرفتنی باشد (و یقیناً کمتر پذیرفتنی نباشد). با وجود این من و همسایه‌ام می‌توانیم شرافتمندانه در چه اندازه پذیرفتنی بودن A با یکدیگر به توافق نرسیم، چه مزاجها در زمینه‌ها و دلایل

به‌زبان نیامدهٔ ما ممکن است با یکدیگر متفاوت باشد.

در قیاس اثباتی مقدّمه‌ها یک **شالودهٔ کامل** تشکیل می‌دهند که نتیجهٔ بر روی آن استقرار پیدا می‌کند. اگر هر دو مقدّمه مقاومت داشته باشد نتیجه نیز مقاومت خواهد داشت. هرگاه با فراهم آمدن اطّلاعاتی تغییری در باور داشتن ما به مقدّمه‌ها به وجود نیاید، این اطّلاعات نمی‌تواند تغییری در اعتقاد ما به درستی نتیجه بدهد.

در قیاس راهیابانه، مقدمه‌ها تنها **جزئی از شالوده** را که نتیجه برروی آن استقرار پیدا می‌کند، می‌سازند، و آن جزءِ کاملاً بیان شده و «پدیدار» شالوده است؛ یک جزءِ بیان ناشده و ناپیدای شالوده را چیز دیگری شاید از قبیل احساسات بیان ناشده یا دلایل به‌گفتار درنیامده تشکیل می‌دهد. در واقع، ممکن است چنان اتّفاق افتد که اطّلاعات تازه‌ای به دست ما برسد که در اعتقاد ما به هر دو قسمت مقدّمه هیچ تغییری ندهد، ولی اعتماد ما را به A به صورتی درآورد که درست متقابل با آن اعتمادی باشد که در نتیجه بیان شده است. تنها بر زمینهٔ مقدمه‌های قیاس راهیابانهٔ خودمان A را پذیرفتنی‌تر یافتن معقول است. ولی فردا ممکن است زمینه‌هایی پیدا کنم که اصلاً در این مقدّمه‌ها دخالتی ندارد، و چنان شود که A کمتر پذیرفتنی به نظر برسد یا حتّیٰ به صورت قطعی طرد شود. محتمل است بر اثر تزلزلها و اضطراباتی که در قسمتهای ناپیدای شالوده به وجود می‌آید، با وجود استوار ماندن مقدّمه‌ها و قسمت پدیدار، نتیجه متزلزل یا اصلاً برانداخته شود.

این ملاحظات تا حدّی ماهیّت استدلال راهیابانه واستقرائی وگونه‌های دیگر استدلال غیراثباتی وموجّه نما را که چون از دیدگاه برهان منطقی به آنها نگاه کنیم اغفال کننده وطفره‌آمیز به نظر می‌رسد، بیشتر وبهتر قابل فهم سازد. مثالهای عینی بیشتر، وتوجّه به مفهوم احتمالات و مفاهیم دیگر وابستهٔ به آن برای تکمیل برداشتی که گذشت ضروری به نظر می‌رسد؛ رجوع کنید به کتاب دیگر نویسنده، **ریاضیات و استدلال موجه نما** [1] »]

با آنکه براهین راهیابانه چیزی را ثابت نمی‌کنند، اهمّیّت دارند. روشن کردن وتصفیهٔ دلایل راهیابانه نیز مهمّ است هرچند درآن سوی هر دلیل تصفیه شده دلایل دیگری تاریک مانده که شاید از آنچه تصفیه شده مهمتر باشد.

1.G.Polya, **Mathematics and Plausible Reasoning**

فصل چهارم. مسائل، اشاره‌ها، راه‌حلها

این بخش پایانی کتاب فرصت بیشتری برای تمرین در اختیار خواننده می‌گذارد.

حلّ مسائلی که پس از این خواهد آمد، به مقدار دانش وشناختی بیش از آنچه در یک برنامهٔ خوب دبیرستانی تعلیم می‌شود نیاز ندارد. با این همه مسائلی بسیار آسان ومعمولی وپیش پا افتاده نیست؛ درحلّ بعضی از آنها باید ابتکار وهوشمندی به کار افتد.[1]

در «اشاره‌ها» راهنماییهایی برای دست یافتن به نتیجه آمده که بیشتر آنها از راه نقل کردن جملهٔ شایسته‌ای از فهرست است؛ خوانندهٔ دقیق و آمادهٔ استفادهٔ از پیشنهادها، از همین راه می‌تواند به اندیشهٔ کلیدی برای حلّ مسئله دست یابد.

در حلّ مسائل نه تنها جواب آمده بلکه روشی که به دست یافتن به جواب می‌انجامد بیان شده است، ولی خواننده خود باید چیزهایی برای کاملتر کردن جزئیّات برآنها بیفزاید. دربعضی از راه‌حلها کوشیده‌ایم تاباآوردن چند کلمه درپایان آن چشم‌انداز گسترده‌تری برای خواننده فراهم آوریم.

خواننده که مشتاقانه درحلّ مسئله می‌کوشد، نیکوترین فرصت را برای بهره مند شدن از اشارات و راه‌حلها در اختیار دارد. اگر نتایج را از راه به کار انداختن وسایل خود به دست می‌آورد، می‌تواند از مقایسهٔ روش خود با روشی که در کتاب به چاپ

۱- جز مسئلهٔ شمارهٔ (۱) (که به صورتی وسیع شناخته شده وچندان مشغول کننده است که هرگز فراموش نمی‌شود) همهٔ مسائل از مسابقات ورودی دانشگاه استانفورد گرفته شده (با بعضی تغییرات جزئی). بعضی از این مسائل پیش از این در **مجلّهٔ ماهانه ریاضیّات امریکا** و/یا در **نشریّهٔ انجمن ریاضی کالیفورنیا** به چاپ رسیده است. در نشریّهٔ اخیر حلّ بعضی از مسائل به توسّط نویسنده عرضه شده است، دراین جا برای مرتّب کردن مجدد آنها ناگزیر تغییراتی جزئی صورت گرفته است.

رسیده، چیزهایی فراگیرد. هرگاه پس از تلاشی جدّی تمایل به دست‌کشیدن از حلّ مسئله پیدا کند، اشاره‌ها ممکن است برای دست‌یافتن به اندیشه‌های ناپیدا به کومک او برخیزد. حتّیٰ درآن صورت که از اشاره‌کاری برنیاید، می‌تواند به راه حل رجوع کند، و در آن بکوشد که اندیشهٔ کلیدی را از آن بیرون بکشد و کتاب را به کناری بگذارد و سپس خود به کار حلّ مسئله بپردازد.

مسئله‌ها

۰۱ خرسی که از نقطهٔ P به راه افتاده، به اندازهٔ یک کیلومتر رو به جنوب پیش می‌رود. سپس جهت خود را تغییر می‌دهد و یک کیلومتر درست درجهت خاور پیش می‌رود. سپس بار دیگر با تغییر جهت‌دادن یک کیلومتر رو به شمال طی می‌کند و درست به همان نقطهٔ P که از آن به راه افتاده بود می‌رسد. رنگ آن خرس چه رنگی بوده است؟

۰۲ باب می‌خواهد زمین کاملاً همواری با چهار خطّ مرزی برای خود تهیّه کند. دو خطّ مرزی باید درست در جهت شمال و جنوب باشد و دو خطّ دیگر در جهت شرق و غرب و درازای هر خط درست ۱۰۰ متر. آیا باب می‌تواند چنین قطعه زمین را در کشورهای متّحد آمریکا خریداری کند؟

۰۳ باب ۱۰ کیسه و ٤٤ سکّهٔ نقرهٔ یک دلاری دارد. می‌خواهد سکّه‌ها را چنان میان کیسه‌ها توزیع کند که شمارهٔ سکه‌ها در همهٔ آن کیسه‌ها با یکدیگر متفاوت باشد. آیا می‌تواند از عهدهٔ این توزیع برآید؟

۰٤ برای شماره‌گذاری صفحات یک کتاب بزرگ، چاپ‌کنندهٔ کتاب ۲۹۸۹ رقم به کار برده است: آن کتاب چند صفحه دارد؟

۰۵ در میان اوراق پدربزرگ نوشته‌ای بدین‌صورت دیده شد:

۷۹ بوقلمون ـ ٦۷٫۹ـ دلار

اوّلین و آخرین رقم که آشکارا تعیین کنندهٔ قیمت درست بوقلمونها است ، دراین جا با دو خطّ کوتاه نمایش داده شده، بدان جهت که دراصل ناخوانا بوده است.

این دو رقم چیست، بهای یک بوقلمون چه اندازه بوده است؟

٦. یک ششضلعی منتظم ونقطه‌ای در سطح آن در دست است. از این نقطه خطّ راستی چنان رسم کنید که آن ششضلعی رابه دونیمهٔ برابر تقسیم کند.

۷. مربّعی داده شده. مکان هندسی نقاطی راتعیین کنید که مربّع از آنها به زاویهٔ

(a) ۹۰ یا (b) 45° دیده می‌شود. (نقطهٔ P را درخارج مرّبع ولی درسطح خود مرّبع بگیرید. کوچکترین زاویهٔ با رأس P که مربّع را در بر گیرد «زاویه‌ای است که مربّع از P با آن دیده می‌شود».) هردو مکان هندسی را درست ترسیم کنید ودربارهٔ آن توضیح کامل بدهید.

۸. خطّ راستی را که از اتّصال دادن دونقطهٔ از سطح یک حجم به دست می‌آید، وچون حجم برگرد آن به زاویه‌ای بزرگتر از 0° وکوچکتر از 360° دوران کند برخود منطبق بماند، «محور» آن می‌نامیم.

محورهای یک مکعّب را پیداکنید. وضع قرار گرفتن این محورها را به وضوح توصیف کنید وزاویهٔ دوران مربوط به هرمحور رابه دست آورید. با این فرض که طول یال مربّع واحد است، واسطهٔ عددی طولهای محورها را حساب کنید.

۹. دریک چهار وجهی (که لزوماً منتظم نیست) دویال متقابل طول یکسان a دارند ونسبت به یکدیگر عمودند. علاوه براین هریک از آنها عمود برخطّی به طول b است که وسطهای آنها را به یکدیگر متّصل می‌کند. حجم چهاروجهی را برحسب a و b تعیین کنید.

۱۰. رأس هرم عبارت از گوشه‌ای از آن است که روبه روی قاعدهٔ آن قرار گرفته است. (a) اگر هرمی را که رأس آن از همهٔ گوشه‌های دیگرش به یک اندازه فاصله داشته باشد هرم «متساوی‌السّاقین» بخوانیم، ثابت کنید که قاعدهٔ یک هرم متساوی‌السّاقین محاط در دایره‌ای است که مرکز آن پایهٔ ارتفاع هرم است.

(b) حال فرض کنید که هرمی را «متساوی‌السّاقین» بخوانیم که رأس آن ازهمهٔ ضلعهای قاعده‌اش به یک اندازه فاصله (عمودی) داشته باشد. با پذیرفتن این تعریف (متفاوت با تعریف پیشین) ثابت کنید که قاعدهٔ یک هرم متساوی‌السّاقین محیط بردایره‌ای است که مرکز آن پایهٔ ارتفاع هرم است.

۱۱. x و y و u و v را چنان تعیین کنید که در دستگاه چهارمعادلهٔ ذیل صدق کند.

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16 \end{aligned}$$

(ممکن است طولانی وخسته کننده به نظر برسد: درصدد یافتن راه میانه باشید.)

۱۲. باب وپیتر وپول باهم سفر می‌کنند. پیتر وپول درپیاده روی ماهرند؛ هریک ازآنان p کیلومتر درساعت راهپیمایی می‌کند. باب ناراحتی پا دارد واتومبیل کوچکی رامی‌راند که تنها دونفر می‌توانند برآن سوار شوند، نه سه نفر؛ اتومبیل درهرساعت c کیلومتر طی می‌کند. سه رفیق چنین باهم قرار گذاشتند که: باهم به راه بیفتند، پول وباب برماشین سوار شوند و پیتر پیاده به راه بیفتد. پس از مدّتی باب پول را پیاده می‌کند و پول پیاده به راه می‌افتد، سپس باب برمی‌گردد و پیتر را با خود سوار می‌کند و چندان پیش می‌رود تا به پول برسد. در این لحظه وضع را عوض می‌کنند: پول سوار می‌شود و پیتر پیاده می‌رود، به همان گونه که در آغاز چنان بود، و همین کیفیّت تا هر اندازه که لازم باشد تکرار می‌شود.

(a) این رفقا در هر ساعت چه اندازه پیشروی می‌کنند؟

(b) در چه کسری از مسافت پیموده شده بر اتومبیل تنها یک نفر سوار است؟

(c) حالتهای حدّی $p=0$ و $p=c$ را مورد تحقیق قرار دهید.

۱۳. سه عدد در یک تصاعد حسابی قرار گرفته‌اند و سه عدد دیگر در یک تصاعد هندسی. با افزودن جمله‌های متناظر این دو تصاعد متوالیاً این اعداد را به دست می‌آوریم:

۸۵، ۷۶ و ۸۴

و از افزودن سه جملهٔ اوّل تصاعد حسابی عدد ۱۲۶ حاصل می‌شود. جمله‌های هر دو تصاعد را پیدا کنید.

۱۴. m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ ذیل:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$$

چهارریشه پیدا کنید که در یک تصاعد حسابی قرار گرفته باشد.

۱۵. درازای محیط یک مثلّث قائم‌الزّاویه ۶۰ سانتیمتر و درازای ارتفاع وارد بر وتر آن ۱۲ سانتیمتر است. اندازه‌های اضلاع مثلّث را حساب کنید.

۱۶. از قلّهٔ کوهی دو نقطهٔ A و B را در دشت می‌بینید. میان شعاعهای بصری این دو نقطه زاویهٔ γ تشکیل می‌شود. تمایل شعاع بصری A نسبت به سطح افقی برابر با α و از آنِ B برابر با β است. می‌دانیم که A و B در یک سطح افقی قرار گرفته‌اند و فاصلهٔ میان آنها c است.

ارتفاع x قلّه را نسبت به سطح افقی مشترک میان A و B برحسب α و β و

γ حساب کنید.

۱۷.با در نظر گرفتن این مطلب که مقدار

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

به ترتیب برای $n=$ ۱ و ۲ و ۳ برابر است با ۱/۲ و ۵/۶ و ۲۳/۲٤، یک قاعدهٔ کلّی برای این مجموع حدس بزنید (از راه مشاهده کردن اندازه‌های بیشتر، در صورت ضرورت) و حدس خود را به اثبات برسانید.

۱۸.جدول زیر را در نظر بگیرید.

۱	=	۱
۳+۵	=	۸
۷+۹+۱۱	=	۲۷
۱۳+۱۵+۱۷+۱۹	=	٦٤
۲۱+۲۳+۲۵+۲۷+۲۹	=	۱۲۵

قاعده‌ای کلّی را از این مثالها به حدس معیّن کنید و آن را به صورت شایستهٔ ریاضی درآورید و به اثبات برسانید.

۱۹.طول ضلع یک ششضلعی منتظم برابر با n است (n عددی صحیح است). با رسم کردن خطوطی به موازات اضلاع و با فاصله‌های مساوی از یکدیگر این ششضلعی به T مثلّث متساوی‌الاضلاع که طول ضلع هر یک از آنها ۱ است تقسیم می‌شود. V را نمایندهٔ شمارهٔ رأسهایی فرض می‌کنیم که از این تقسیم به وجود آمده است، و L را شمارهٔ خطهای محدودکنندهٔ به طول ۱. (خطّ محدودکننده به یک یا دو مثلّث تعلّق دارد، و یک رأس به دو مثلّث یا بیشتر.) هنگامی که $n=1$ باشد که ساده‌ترین حالت است، $T=6$ و $V=7$ و $L=12$ می‌شود. حالت کلی را مورد ملاحظه قرار دهید و T و V و L را بر حسب n به دست آورید (حدس زدن خوب است و ثابت کردن خوبتر.)

۲۰. از چند راه می‌توانید یک سکّهٔ یک دلاری را خرد کنید؟ («راه خرد کردن» در صورتی معلوم می‌شود که بدانیم چند سکّه از هرنوع یک سِنتی و پنج سِنتی و ده سِنتی و ربع دلاری و نصف دلاری به کار رفته است.)

اشاره‌ها

۱. **مجهول چیست؟** رنگ یک خرس– ولی چگونه می‌توانیم رنگ یک خرس را از

محاسبات ریاضی به دست آوریم؟ **چه چیز معلوم است؟** یک وضع هندسی- ولی مشتمل برتناقض به نظر می‌رسد: چگونه می‌تواند خرس پس از سه کیلومتر راه رفتن به جای نخستین خود باز گردد؟

۲. آیا از مسئله‌ای وابستهٔ خبر دارید؟

۳. اگر باب دلارهای فراوان می‌داشت، برای آنکه شمارهٔ دلارها را در کیسه‌ها متفاوت با یکدیگر سازد هیچ دشواری نمی‌داشت. آیا می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟ آیا حدّاقل شمارهٔ دلارهایی که بتوان در ۱۰ کیسه چنان جای داد که هیچ دو کیسه‌ای مبلغ مشابه یکدیگر نداشته باشد، چه اندازه است؟

٤. در اینجا مسئله‌ای وابستهٔ به مسئلهٔ شما وجود دارد: اگر کتاب شما فقط ۹ صفحه شماره زده می‌داشت، حروفچین چاپخانه چند رقم به کار می‌برد؟ (البتّه ۹ رقم.) دراین جا مسئله‌ای دیگر وابستهٔ به مسئله شما وجود دارد: اگر کتاب شما تنها ۹۹ صفحه داشته باشد، حروفچین چاپخانه چند رقم باید به کار برد؟

۵. آیا می‌توانید صورت مسئله را دوباره بیان کنید؟ اگر بناباشد که بهای کلّی بیان شده باسِنْت (یک صدم دلار) قابل قسمت بر ۷۲ باشد ارقام محو شده چه باید باشد؟

٦. آیا می‌توانید مسئلهٔ وابستهٔ دیگری که بهتر در دسترس باشد تخیّل کنید؟ مسئله ای کلّیتر؟ مسئله‌ای مشابه؟(تعمیم، ۲)

۷. آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟ مکان هندسی نقاطی که از آنها قطعه خطّ مستقیمی به زاویهٔ معیّن دیده شود عبارت از دو کمان دایره است که به دو نقطهٔ اوّل و آخر قطعه خطّ پایان می‌پذیرد، و آن دو قوس نسبت به قطعه خطّ متقارن یکدیگر است.

۸. چنان فرض می‌کنیم که خواننده با شکل مکعّب آشنا است و بعضی از محورها را از راه جستجو و وارسی یافته است ولی آیا همهٔ آنها محوراست؟ **آیا می‌توانید ثابت کنید** که فهرست شما کامل است؟ آیا فهرست شما اصل طبقه‌بندی روشنی دارد؟

۹. **به مجهول نگاه کنید** ! مجهول حجم چهار وجهی است- آری، می‌دانم، حجم هر هرم را می‌توان از روی حاصل ضرب قاعده در ارتفاع که تقسیم بر ۳ شود به دست آورد. ولی در این مسئله نه مساحت قاعده داده شده و نه در ازای ارتفاع. **آیا می‌توانید** مسئله‌ای

را درنظر بگیرید که بهتر در دسترس قرار گرفته باشد؟ (آیا تصوّر نمی‌کنید که یک چهار وجهی‌عاد کنندهٔ چهاروجهی داده شده بیشتر در دسترس قرار گرفته است؟)

۱۰. آیا از قضیّه‌ای وابسته آگاهی دارید؟ آیا از قضیّه‌ای وابسته... ساده‌تر... **شبیه قضیّهٔ موردنظر آگاهید ؟** آری: پایهٔ ارتفاع نقطهٔ وسط یک مثلّث متساوی‌السّاقین است. در اینجا **یک قضیّه وابستهٔ به قضیّهٔ شما که قبلاً حل شده وجود دارد. آیا می‌توانید روش آن را به کار بگیرید؟** قضیّهٔ مربوط به مثلّث متساوی‌السّاقین از روی مثلّثهای قائم‌الزّاویهٔ متشابهی که ارتفاع ضلع مشترک آنها است به اثبات رسیده است.

۱۱. فرض آن است که خواننده تاحدّی با دستگاههای معادلات خطّی آشنایی دارد. برای حل کردن چنین دستگاهی باید معادلات آن را به صورتی با یکدیگر ترکیب کنیم - باید در جستجوی روابطی میان معادلات باشید که بتواند ترکیب خاصّ دارای مزیّتی را به شما نشان دهد.

۱۲. قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید. آیا می‌توانید آنها را بر روی کاغذ بیاورید؟ میان آغاز حرکت و نقطه‌ای که در آن سه دوست بار دیگر با هم ملاقات می‌کنند، سه مرحله وجود دارد:

(۱) باب با پول سوار است.
(۲) باب تنها سوار است.
(۳) باب با پیتر سوار است.

مدّت دوام این سه مرحله را به ترتیب t_1 و t_2 و t_3 فرض کنید. چگونه می‌توانید شرط را به قسمتهای شایسته تقسیم کنید؟

۱۳- قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید. آیا می‌توانید آنها را بر روی کاغذ بیاورید؟ فرض کنید.

$$a-d, \qquad a, \qquad a+d$$

جمله های تصاعد حسابی باشد، و

$$bg^{-1}, \qquad b, \qquad bg$$

جمله های تصاعد هندسی.

۱۴. شرط چیست؟ از چهار ریشه باید یک تصاعد حسابی تشکیل شود. ولی معادله

سیمای خاص دارد: تنها مشتمل بر قوای زوج مجهول x است. بنابراین، اگر a یک ریشه باشد، $-a$ نیز یک ریشه خواهد بود.

۱۵. قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید. آیا می‌توانید آنها را بر روی کاغذ بیاورید؟ می‌توانیم سه جزء در شرط تشخیص دهیم، مربوط به

(۱) محیط

(۲) مثلّث قائم الزّاویه.

(۳) ارتفاع وارد بر وتر.

۱۶. قسمتهای مختلف شرط را از یکدیگر جدا کنید. آیا می‌توانید آنها را بر روی کاغذ بیاورید؟ فرض کنیم a و b طولهای دو خطّ رؤیت (مجهول)، و α و β به ترتیب میلهای آنها نسبت به سطح افقی بوده باشد. می‌توانیم سه جزءِ متمایز در شرط تشخیص دهیم، مربوط به

(۱) زاویهٔ تمایل a

(۲) زاویهٔ تمایل b

(۳) مثلّث با ضلعهای a و b و c.

۱۷. آیا مخرجهای ۲ و ٦ و ۲٤ را **می‌شناسید ؟ آیا از مسئله‌ای وابسته آگاهی دارید؟ از یک مسئلهٔ مشابه؟ (استقراء و استقراءِ ریاضی).**

۱۸. اکتشاف از طریق استقراء محتاج مشاهده و ملاحظه است. طرف دست راست و جمله‌های آغازین دست چپ و نیز جمله‌های پایانی آن را ملاحظه کنید. قانون کلّی چیست؟

۱۹. یک شکل بکشید. ملاحظه کردن آن می‌تواند برای اکتشاف قانون از طریق استقراء به شما یاری کند، یا می‌تواند شما را به روابطی میان T و V و L و n متوجّه سازد.

۲۰. مجهول چیست؟ فرض آن است که دنبال چه چیز می‌گردیم؟ حتّیٰ هدف این مسئله ممکن است نیازمند اندکی توضیح و تفسیر باشد. **آیا می‌توانید مسئله‌ای وابسته را که بیشتر در دسترس باشد تخیّل کنید؟ مسئله‌ای کلّیتر؟ مسئله‌ای مشابه؟** در اینجا یک مسئلهٔ مشابه بسیار ساده وجود دارد: به چند راه می‌توانید یک سِنْت را بپردازید (در این مورد تنها یک راه) . مسئله کلّیتر این است: به چند راه می‌توانید مبلغ n سِنْت را با به کار بردن پنج نوع سکّهٔ متفاوت بپردازید: سِنْتها، پنج سنتیها، ده سِنْتیها، ربع دلاریها و نصف دلاریها؟ در مسئلهٔ حاضر با حالت خاصّ $n = ۱۰۰$ رو به رو هستیم.

در ساده‌ترین حالتهای خاص، برای n های کوچک، می‌توانیم پاسخ را بدون توسّل

به روش عقلی، فقط ازطریق کوشش و جستجو به دست آوریم. دراین جا جدولی را ثبت کرده‌ایم (که خواننده باید آن را وارسی کند).

n	٤	۵	۹	۱۰	۱٤	۱۵	۱۹	۲۰	۲٤	۲۵
E_n	۱	۲	۲	٤	٤	٦	٦	۹	۹	۱۳

سطر اوّل مبلغ پرداختی را نشان می‌دهد که عموماً آن را n می‌نامیم . سطر دوم شمارهٔ «راههای پرداختن» متناظر باآن است که عموماً با E_n نمایانده می‌شود (این که چرا این علامتها را برگزیده‌ام رازی متعلّق به خود من است که نمی‌خواهم در این مرحله از حل مسئله آن را آشکار کنیم.)

به E_{100} توجّه خاص داریم، ولی کمتر امید آن هست که بتوانیم E_{100} را بدون اختیار کردن روش خاص به دست آوریم. در واقع مسئلهٔ حاضر ازخواننده خواستار چیزی بیش از آن است که در مسائل پیشتر خواهان آن بود. خواننده باید یک نظریّهٔ کوچک اختراع کند.

پرسش ما کلّی است(محاسبهٔ E_n برای n کلّی)، ولی «جداشده و منعزل» است. آیا می‌توانید مسئلهٔ وابسته‌ای را تخیّل کنید که بیشتر در دسترس باشد؟ مسئله‌ای مشابه؟ مسئلهٔ سادهٔ بسیارمشابه چنین است: A_n شمارهٔ راههای پرداختن مبلغ n سِنْت را با استفادهٔ از سِنْتها پیداکنید. ($A_n = ۱$)

راه‌حلها

۱. آیا خیال نمی‌کنید که رنگ خرسْ سفید و نقطهٔ P قطب شمال باشد؟ **آیا می‌توانید ثابت کنید که این گفته درست است؟** چنانکه کمابیش مفهوم است، این پرسش خیالی طرحریزی شده است. زمین را به صورت کرهٔ کامل تصوّر می‌کنیم و خرس را همچون یک نقطهٔ مادّی متحرّک. چون رو به جنوب یا روبه شمال حرکت کند قوسی از نصف‌النّهار را می‌پیماید، و چون روبه خاور یا باختر در حرکت باشد قوسی از یک مدار(موازی با خطّ استوا) را طی می‌کند. دوحالت متمایز را می‌توانیم تشخیص دهیم.

(۱) اگر خرس در ضمن بازگشت به P بر روی نصف‌النّهاری متفاوت باآن نصف‌النّهار در حرکت باشد که هنگام دورشدن از P برآن در حرکت بوده، P ناگزیر در قطب شمال است. تنها نقطهٔ دیگری از زمین که در آن دو نصف‌النّهار با یکدیگر تلاقی می‌کنند قطب جنوب است، ولی خرس تنها با حرکت کردن روبه شمال می‌تواند این

قطب را ترک کند.

(۲) خرس هنگامی می‌تواند هنگام بازگشت به P بر امتداد همان نصف‌النّهاری در حرکت باشد که هنگام به راه افتادن از P برآن در حرکت می‌کرد که آن‌گاه که یک کیلومتر روبه خاور حرکت می‌کند، درست n بار یک مدار را بپیماید که n ممکن است ۱ یا ۲ یا ۳... باشد. در این حالت P قطب شمال نیست بلکه نقطه‌ای واقع بر یک مدار بسیار نزدیک به قطب جنوب است (که محیط آن برحسب کیلومتر اندکی کمتر از $2\pi + 1/n$ است.

۲. کره را همچون در راه حلّ مسئلهٔ ۱ مجسّم می‌کنیم. زمینی که باب خواستارآن است محدود به دونصف‌النّهار و دومدار است. دونصف‌النّهار ثابت و یک مدار متحرّک که از خطّ استوا درحال دورشدن است درنظربگیرید: قوسی واقع برمدار متحرّک که میان دونصف‌النّهار ثابت درحال حرکت است رفته‌رفته کوتاهتر می‌شود. مرکززمینی که باب خواستارآن است باید برخطّ استوا قرارگرفته باشد. وی نمی‌تواند چنین زمینی در کشورهای متّحد آمریکا به دست آورد.

۳. کمترین حدّ ممکن دلارهای یک کیسه محقّقاً صفراست. شمارهٔ دلارهای بزرگتر نزدیک به صفر، لااقل ۱ است و پس از آن لااقل ۲ ... و شمارهٔ دلارهای آخرین (دهمین) کیسه دست کم ۹ خواهد بود. بنابراین شمارهٔ دلارهای خواسته شده دست کم برابر است با

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$$

و باب که بیش از ٤٤ دلار ندارد نمی‌تواند آنها را به صورتی که مسئله خواسته است توزیع کند.

٤. کتابی دارای ۹۹۹ صفحه خواستار ارقامی برای حروفچینی به این اندازه است.

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 = 2889$$

و اگر آن کتاب بزرگ x صفحه داشته باشد، می‌توانیم چنین بنویسیم.

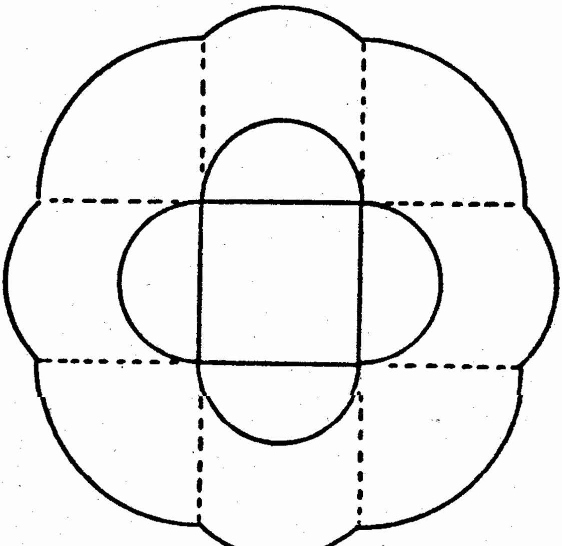
$$2889 + 4(x - 999) = 2989$$
$$x = 1024$$

این مسئله‌می‌تواند به‌ما بیاموزد که‌تخمین‌مقدّماتی یک مجهول ممکن‌است‌سودمند واقع شود (یا حتّیٰ ضرورت پیدا کند، همچون درهمین حالت).

۵. اگر –۶۷۹– بر ۷۲ بخشپذیـــر باشد، بـر ۸ و ۹ هـردو نیـز بـخشپذیر است. برای آنکه –۷۹ بر ۸ بخشپذیر باشد (بدان جهت که ۱۰۰۰ بر ۸ بـخشپذیر است) بـاید ۷۹۲ بوده باشد: پس رقم دست راست محو شده ۲ است. اگر بـنا بـاشد ۶۷۹۲– بـر ۹ بخشپذیر باشد، مجموع ارقام آن باید قابل قسمت بــر ۹ بــاشد (قــاعدهٔ «نه‌نه طــرح کردن») و به همین جهت اوّلین رقم محو شده باید ۳ باشد. بنابراین بهای بـوقلمون (در زمان پدر بزرگ) دلار ۵٫۱۱=۳۶۷٫۹۲/۷۲ بوده است.

۶. «وضع یک نقطه ویک شکل نسبت به یک مرکز تقارن (درهــمان سطــح) دردست است. خطّ راستی گذران بر نقطهٔ داده شده را چنان رسم کنید کـه سطـح داده شده را به دو قسمت برابر تقسیم کند» ·خطّ مطلوب البتّه از مرکز تقارن خواهد گذشت. نگاه کنید به **محالنمای مخترع.**

۷. در هروضع دو ضلع زاویه می‌باید از دو رأس مربّع بگذرد. تا زمانی که اضلاع از همان دو رأس بگذرند، رأس زاویه در امتداد قوس واحدی از دایـره حـرکت مــی کـنـد (بنابر قضیّه‌ای که اشاره مبتنی برآن است). بنابر این هریک از دومکان هندسی خـواسته شده عبارت از چند قوس دایره است: از ٤ نیمدایره درحالت (a) و ۸ ربـع دایـره درحالت (b) ؛ رجوع کنید به شکل ۳۱.



شکل ۳۱

۸. محور داده شده سطح مکعّب را درجایی سوراخ می‌کند که یا یک رأس است یا نقطه‌ای از یال است و یا در درون یکی از وجوه آن جای دارد. اگر محور برنقطه‌ای از یک یال بگذرد (ولی نه دریکی از دونقطهٔ پایانی آن)، این نقطه می‌بایستی وسط آن یال بوده باشد: اگر چنین نباشد یال نمی‌تواند پس از دوران برخود منطبق شود. به همین گونه، محوری که از نقطه ای واقع بریکی از وجوه بگذرد، از مرکز آن خواهد گذشت. البتّه هرمحور باید از مرکز مکعّب هم بگذرد. بنابراین سه گونه محور وجود دارد:

(۱) ٤ محور گذران بر رأسهای متقابل مکعّب، زاویه‌های °۱۲۰ و °۲٤۰.

(۲) ٦ محور گذران بر نقاط وسط دویال متقابل، زاویهٔ °۱۸۰.

(۳) ۳ محور گذران برمراکز وجوه متقابل، زاویه‌های °۹۰ و °۱۸۰ و °۲۷۰ .

برای به دست آوردن درازای محوری از گونهٔ اوّل رجوع کنید به پخش ۱۲، محاسبهٔ محورهای دیگر از این هم آسانتر است. میانگین مطلوب عبارت است از:

$$\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+3}{13}=1.416$$

(این مسئله می تواند برای آماده کردن خواننده به مطالعهٔ بلورشناسی سودمند باشد. خواننده‌ای که به اندازهٔ کافی در حساب انتگرال پیش رفته باشد، متوجّه خواهد شد که میانگین محاسبه شده تقریب خوبی از «پهنای میانگین» مکعّب است که در حقیقت برابر با ۱,۵ =۳/۲ است.

۹. سطحی که بر یک یال به طول a و خط عمود بر آن به طول b بگذرد، چهار وجهی را به دو چهار وجهی متشابه که بیشتر در دسترس قرار گرفته است تقسیم می کند که قاعدهٔ هریک $ab/2$ است و ارتفاع هریک $a/2$. بنابراین حجم خواسته شده چنین است.

$$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2b}{6}$$

۱۰. قاعدهٔ هرمْ یک چند ضلعی دارای n ضلع است. در حالت (a) n یال طرفی هرم با یکدیگر برابر است، در حالت (b) ارتفاعهای (ترسیم شدهٔ از رأس هرم) در n وجه طرفی برابر با یکدیگر است. اگر ارتفاع هرم را رسم کنیم و پایهٔ آن را در حالت (a) با خطوطی به n رأس قاعده، و در حالت (b) به پایه‌های ارتفاعهای وجوه طرفی اتّصال دهیم، در هر دو حالت n مثلّث قائم‌الزّاویه خواهیم داشت که در آنها ارتفاع هرم یک ضلع مشترک است: می گوییم که این n مثلّث قائم‌الزّاویه با یکدیگر متشابهند. زیرا که وترها [یک یال طرفی در حالت (a) و یک ارتفاع طرفی در حالت (b)] در آنها، بنابر

تعریف موجود در مسئله، با یکدیگر برابر است، و نیز توجّه داریم که ضلع دیگر (ارتفاع هرم) و یک زاویه (زاویه قائمه) در میان همهٔ مثلّثها مشترک است. در n مثلّث متشابه ضلعهای سوم نیز باید برابر باشد، و اینها خطوطی است که از نقطهٔ واحد (پایهٔ ارتفاع هرم) در یک سطح (قاعده) ترسیم شده است: از آنها n شعاع یک دایره فراهم می‌آید که به ترتیب در حالتهای (a) و (b) محیط بر قاعده یا محاط در آن است. [ولی در حالت (b) باید این را نیز ثابت کنیم که n شعاع یاد شده بر اضلاع متناظر قاعده عمود است، و این مطلب از روی قضیّهٔ بسیار معروفی از هندسهٔ فضایی در بارهٔ تصویرها نتیجه می‌شود.]

۱۱. باید ملاحظه کنیم که ارتباط معادلهٔ اوّل به آخرین معادله همچون ارتباط معادلهٔ دوم به معادلهٔ سوم است: ضریبهای طرف چپ معادله مشابه یکدیگر است ولی ترتیبی متقابل دارد، در صورتی که طرفهای راست در آنها متقابل با یکدیگر است. از افزودن معادلهٔ اوّل به معادلهٔ آخر و معادلهٔ دوم به معادلهٔ سوم چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 6(x+u)+10(y+v)&=0,\\ 10(x+u)+10(y+v)&=0. \end{aligned}$$

این دو معادله را می‌توانیم دستگاهی از دو معادله درنظر بگیریم که دومجهول آن عبارت است از $x+u$ و $y+v$ و به آسانی از حلّ آن نتیجه می‌شود.

$$x+u=0, \qquad y+v=0.$$

با جانشین کردن $-x$ به جای u و $-y$ به جای v در دومعادلهٔ اوّل دستگاه اصلی چنین خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} -4x+4y&=16\\ 6x-2y&=-16. \end{aligned}$$

که از حلّ آن به آسانی جوابهای ذیل به دست می‌آید:

$$x=-2, \qquad y=2, \qquad u=2, \qquad v=-2$$

۱۲. میان آغاز حرکت ونقطهٔ تلاقی، هریک از آن سه نفر فاصلهٔ یکسانی را پیموده‌اند. (به خاطر داشته باشید که فاصله= سرعت × زمان) دراین شرط دوقسمت را درنظر می‌گیریم:

باب به اندازهٔ پول راه پیموده است:

$$ct_1-ct_2+ct_3=ct_1+pt_2+pt_3$$

پول به اندازهٔ پیتر راه پیموده است :

$$ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3$$

از معادلهٔ دوم چنین نتیجه می‌شود:

$$(c - p)t_1 = (c - p)t_3$$

البتّه فرض آن است که اتومبیل سریعتر از پیاده حرکت می‌کند، یعنی $c > p$ بنابرآن

$$t_1 = t_3;$$

یعنی پیتر درست به اندازهٔ پول راه رفته است. از معادلهٔ اوّل چنین به دست می‌آید

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{c + p}{c - p}$$

که البتّه همان اندازهٔ t_1/t_2 است. بنابراین جوابها چنین خواهد شد.

(a) $$\frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c + 3p)}{3c + p}$$

(b) $$\frac{t_2'}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c - p}{3c + p}$$

(c) $$0 < p < c.$$

دو حالت حدّی وجود دارد. چون

اگر $p = 0$ از (a) به دست می‌آید $c/3$ و از (b) ۱/۳

اگر $p = c$ از (a) به دست می‌آید c و از (b) صفر.

این نتایج را می‌توان بدون محاسبه به آسانی ملاحظه کرد.

۱۳. شرط به آسانی قابل تجزیهٔ به چهار جزء است که با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} a - d + bg^{-1} &= 85 \\ a + b &= 76 \\ a + d + bg &= 84 \\ 3a &= 126. \end{aligned}$$

از آخرین معادله a=٤۲ به دست می‌آید، و سپس از دومی b=۳٤ نتیجه می‌شود. از

جمع کردن دو معادلهٔ باقی مانده (برای حذف d) چنین خواهیم داشت.

$$2a + b(g^{-1} + g) = ۱۶۹$$

که چون در آن به جای a و b مقادیر به دست آمدهٔ آنها را قرار دهیم یک معادلهٔ درجهٔ دوم برای g به دست می‌آوریم که پس از حلّ آن و پیدا کردن دو مقدار g و قرار دادن آن در معادلهٔ سوم جوابها چنین خواهد شد.

$g = ۲ \qquad d = ۲۶ \qquad g = ۱/۲ \qquad d = ۲۵$

و بنابراین تصاعدها عبارت خواهد بود از:

۱۶ ، ۴۲ ، ۶۸ یا ۶۷ ، ۴۲ ، ۱۷
۶۸ ، ۳۴ ، ۱۷ یا ۱۷ ، ۳۴ ، ۶۸

۱۴. اگر a و a – ریشه‌هایی با کمترین قدر مطلق باشند، در تصاعد در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و شکل آن تصاعد چنین خواهد شد:

$-۳a, \quad -a, \quad a, \quad ۳a,$

و بنابراین طرف چپ معادلهٔ طرح شده باید بدین صورت باشد

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2)$$

که پس از انجام دادن عمل ضرب و مقایسه کردن ضریبهایی که همقوّه هستند با یکدیگر، دستگاه دو معادلهٔ ذیل به دست می‌آید.

$$10a^2 = 3m + 2,$$
$$9a^4 = m^2$$

که با حذف a چنین خواهیم داشت

$$19m^2 - 108m - 36 = 0$$

و بنابرآن

$$m = 6 \text{ یا } -6/19$$

۱۵– اگر a و b ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه و c وتر مثلّث قائم‌الزّاویه باشد، سه جزءِ شرط با سه معادلهٔ زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} a+b+c &= 60 \\ a^2+b^2 &= c^2 \\ ab &= 12c. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن این که

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

چنین حاصل می‌شود

$$(60-c)^2 = c^2+24c$$

و بنابرآن $c=۲۵$ و در نتیجه یا $a=۱۵$ و $b=۲۰$ یا $a=۲۰$ و $b=۱۵$ (که برای مثلّث تفاوتی حاصل نمی‌شود.)

۱٦. سه جزءِ شرط بدین صورت بیان می‌شود

$$\sin\alpha = \frac{x}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{x}{b},$$

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

که با حذف a و b چنین خواهیم داشت

$$x^2 = \frac{c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}$$

۱۷. چنان حدس می‌زنیم که

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$$

به پیروی از الگوی **استقراء و استقراءِ ریاضی**، از خود می‌پرسیم: آیا فرمول حدس زده شده، در آن هنگام که از مقدار n به مقدار بعدی $n+1$ می‌رویم صحّت دارد؟ همراه با فرمول بالا باید چنین داشته باشیم.

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} = 1-\frac{1}{(n+2)!}$$

که چون معادلهٔ اوّلی را از آن کم کنیم می‌شود

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = -\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

یا

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

که این معادلهٔ اخیر آشکارا برای $n=$ ۱، ۲، ۳،... صحت دارد و بنابراین، با پیروی از الگویی که در بالا بدان اشاره شد، می‌توانیم حدس خود را به اثبات برسانیم.

۱۸. در n اُمین سطر چنان به نظر می‌رسد که عدد دست راست n^3 است واعداد دست چپ حاصل جمع n جمله. آخرین جمله از این حاصل جمع mاُمین عدد فرد یا $2m-1$ است که در آن

$$m = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

رجوع کنید به **استقراء و استقراءِ ریاضی**، ٤. بنابراین آخرین جمله از حاصل جمع طرف چپ باید چنین باشد

$$2m - 1 = n^2 + n - 1$$

پس می‌توانیم جملهٔ اوّل مجموع مورد نظر را از **دو راه** به دست آوریم: چون از جملهٔ پایانی به اندازهٔ $n-1$ گام به عقب بازگردیم، چنین خواهیم یافت.

$$(n^2 + n - 1) - 2(n-1) = n^2 - n + 1$$

در صورتی که اگر یک گام از جملهٔ پایانی سطر پیشین جلوتر رویم چنین می‌یابیم

$$[(n-1)^2 + (n-1) - 1] + 2$$

که پس از ساده شدن همان نتیجهٔ سابق را به دست می‌دهد: بسیار خوب! بنابراین قبول می‌کنیم که

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots + (n^2 + n - 1) = n^3$$

که در آن جمله‌های دست چپ نمایندهٔ حاصل جمع n جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی با قدر نسبت ۲ است. اگر خواننده از قاعدهٔ به دست آوردن چنین تصاعدی آگاه باشد (که عبارت از واسطهٔ عددی جملهٔ اوّل و جملهٔ آخر ضرب در عدّهٔ جمله‌ها است) می‌تواند سرانجام چنین بنویسد

$$\frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} n = n^3$$

و از همین راه ادّعا را به اثبات برساند.

(قاعدهٔ بیان شده را می‌توان به آسانی از روی شکلی اندک متفاوت با شکل ۸ به دست آورد.)

۱۹. طول محیط ششضلعی منتظم با ضلع به طول n برابر با $6n$ است. پس محیط عبارت از $6n$ خطّ مرزی به طول ۱ و مشتمل بر $6n$ راس است. بنابراین در انتقال از $n-1$ به n، V به اندازهٔ $6n$ واحد افزایش پیدا می‌کند و در نتیجه:

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 3n^2 + 3n + 1$$

رجوع کنید به استقراء و استقراء ریاضی، ٤. با سه قطر ششضلعی که از مرکز آن می‌گذرد. این ششضلعی به ٦ مثلّث متساوی الاضلاع (بزرگ) تقسیم می‌شود. با وارسی یکی از آنها معلوم می‌شود که

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) = 6n^2$$

(قاعدهٔ به دست آوردن حاصل جمع یک تصاعد حسابی که در حلّ مسئلهٔ ۱۸ از آن یاد کردیم).T مثلّث روی هم رفته $3T$ ضلع دارند. در این مجموع $3T$ هر خطّ داخلی تقسیم به ۱ دوبار به حساب می‌آید، ولی $6n$ خط در امتداد محیط ششضلعی تنها یک بار شمرده می‌شود. بنابراین

$$2L = 3T + 6n, \qquad L = 9n^2 + 3n$$

(برای خوانندهٔ پیشرفته‌تر: از قضیّهٔ اویلر دربارهٔ چند وجهیها نتیجه می‌شود که $T + V = L + 1$. این رابطه را به اثبات برسانید!)

۲۰. در این‌جا یک ردیف خوب مرتّب شده از مسائل متشابه وجود دارد: A_n و B_n و C_n و D_n و E_n را حساب کنید. هریک از این کمّیّتها نمایندهٔ عدّهٔ راههای پرداخت مبلغ n سِنْت است، اختلاف در سکّه‌های به کار رفته است:

A_n تنها سِنْتها است

B_n سِنْتها و پنج سِنْتیها

C_n سِنْتها و پنج سِنْتیها و ده سِنْتیها

D_n سِنْتها و پنج سِنْتیها و ده سِنْتیها و ربع دلاریها

E_n سِنْتها و پنج سِنْتیها و ده سِنْتیها و ربع دلاریها و نیمدلاریها.

نمادهای E_n (که دلیل آن اکنون آشکار است) و A_n پیشتر به کار رفته بود.

همهٔ راههای پرداختن مبلغ n سِنْت با پنج نوع سکّه با E_n نمایش داده شده. با وجود این می‌توانیم دوامکان را متمایز تشخیص دهیم:

نخست، نیمدلاری به کار نرود. شمارهٔ چنین راههای پرداخت، بنا بر تعریف، D_n است.

دوم، یک نیمدلاری (احتمالاً بیشتر) به کار رفته باشد. پس از آن که اوّلین نیمدلاری روی پیشخوان گذاشته شد، مبلغ n-۵۰ باقی می‌ماند که باید پرداخت شود که درست با E_{n-50} می‌توان آن را پرداخت. سپس چنین استنتاج می‌کنیم که

$$E_n = D_n + E_{n-50}.$$

و به همین‌گونه

$$D_n = C_n + D_{n-25},$$
$$C_n = B_n + C_{n-10},$$
$$B_n = A_n + B_{n-5}.$$

اندکی توجّه نشان می‌دهد که این فورمولها با فرض زیر معتبر می‌ماند

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

(که آشکار دارای معنی است) و به هریک از کمّیّتهای A_n و B_n و... E_n در صورتی که نشانهٔ زیرین آن منفی باشد به صورت صفر نظر می‌کند. (مثلاً $E_{25}=D_{25}$ چنانکه آشکارا دیده می‌شود، و این با نخستین فورمول ما توافق دارد، بدان جهت که $E_{25-50}=E_{-25}=0$)

فورمولهای ما حساب کردن کمّیّتها را به صورت قهقرایی ، یعنی، از طریق بازگشتن به مقادیر پایینتر n یا به حروف پیشتر الفبا مجاز می‌شمارد. مثلاً، می‌توانیم C_{30} را از افزایش سادهٔ C_{20} و $_{30}$ در صورت از پیش دانسته بودن اینها به دست آوریم. در جدول زیر ردیف اصلی که A_n بر سر آنها قرار دارد و ستون اصلی که صفر بر سر آن است، تنها مشتمل بر عدد ۱ است. (چرا؟) با آغاز کردن از این اعداد اصلی، اعداد دیگر را از طریق قهقرایی، با جمعهای ساده، به دست می‌آوریم:

هرعدد دیگر از جدول یا با عدد بالای آن برابر است و یا با حاصل جمع دوعدد: عدد بالای آن و عدد دیگری به فاصلهٔ خاصّ در طرف چپ. مثلاً،

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16$$

محاسبهٔ تا $E_{50}=50$ ادامه پیدا می‌کند: پنجاه سنت را درست به ۵۰ راه مختلف می‌توانید بپردازید؟. با پیش رفتن در همین‌راه خواننده خواهد دانست که $E_{100}=292$؛ یعنی می‌توانید یک دلار را با ۲۹۲ راه مختلف خرد کنید.

n	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	٤۰	٤۵	۵۰
A_n	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
B_n	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
C_n	۱	۲	٤	٦	۹	۱۲	۱٦	۲۰	۲۵	۳۰	۳٦
D_n	۱	۲	٤	٦	۹	۱۳	۱۸	۲٤	۳۱	۳۹	٤۹
E_n	۱	۲	٤	٦	۹	۱۳	۱۸	۲٤	۳۱	۳۹	۵۰